ALGEBRAISCHE ZYKLEN AUF HILBERT-BLUMENTHAL-FLÄCHEN*

Von G. Harder in Bonn, R.P. Langlands in Princeton und M. Rapoport in Heidelberg

EINLEITUNG

Es sei K ein endlicher algebraischer Zahlkörper und X eine glatte projektive algebraische Fläche, die über K definiert ist. Es sei $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluß von K und K' ein in $\bar{K}$ enthaltener endlicher Erweiterungskörper von K. Die Fundamentalklassenabbildung ordnet jedem über K' definierten algebraischen Zykel der Dimension 1 ein Element aus $H^2\big(X \underset{K}{\times} \bar{K}, \mathbf{Q}_l(1)\big)$ zu. Es sei $\mathcal{Z}(K')$ der so erzeugte $\mathbf{Q}_l$-Untervektorraum. Die erste der beiden uns hier interessierenden von Tate [32] ausgesprochenen Vermutungen lautet:

$$\mathcal{Z}(K') = H^2\big(X \underset{K}{\times} \bar{K}, \mathbf{Q}_l(1)\big)^{\mathrm{Gal}(\bar{K}/K')}.$$

Hier operiert die Galoisgruppe durch Strukturtransport auf der l-adischen Kohomologie. Die zweite Vermutung von Tate postuliert die Gleichheit der Dimension von $\mathcal{Z}(K')$ und der Polordnung der Zetafunction von X über K' im Punkte $s = 2$:

$$L_Q^2(X/K', s) = \prod_{\mathfrak{p} \notin Q} \det\big(1 - N\mathfrak{p}^{-s}\Phi_{\mathfrak{p}}^{-1} | H^2(X \underset{K}{\times} \bar{K}, \mathbf{Q}_l)\big)^{-1}.$$

Hier bezeichnet $\Phi_{\mathfrak{p}}$ die Frobeniussubstitution in der Primstelle $\mathfrak{p}$ von K'. Die Polordnung in $s = 2$ ist unabhängig von der genügend großen endlichen Menge von Primstellen Q, die in diesem Produkt weggelassen werden.

* Appeared in Jour. für die reine und ang. Math., Bd. 366 (1986)

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit diesen Vermutungen im Fall der Hilbert-Blumenthal-Flächen. Es sei F ein reellquadratischer Zahlkörper und $\mathcal{O}_F$ der Ring der ganzen Zahlen. Die Gruppe $SL(2, \mathcal{O}_F)$ operiert auf dem Produkt $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ von zwei oberen Halbebenen. Der Quotient ist eine nichtkompakte algebraische Fläche. Falls wir den Quotienten nach einer genügend kleinen Kongruenzuntergruppe Γ von $SL(2, \mathcal{O}_F)$ bilden, ist diese Fläche glatt. Für arithmetische Untersuchungen ist es vorteilhaft, eine endliche Vereinigung von solchen Flächen zu bilden, die dann in natürlicher Weise über **Q** definiert ist. Wir untersuchen nichtsinguläre Kompaktifizierungen dieser Flächen, deren Ort im Unendlichen ein Divisor mit normalen Schnitten ist. *Unser Hauptergebnis ist der Beweis der beiden Vermutungen von Tate für diese Flächen über einer abelschen Erweiterung von* **Q**. Eine Zusammenfassung unserer Ergebnisse findet sich im §2. Dort erläutern wir auch, wie man die Tate'schen Vermutungen für nichtkompakte Flächen zu formulieren hat und warum die von uns bewiesenen Behauptungen die obige Aussage zur Folge hat. In dieser Einleitung wollen wir lediglich herausarbeiten, wo die Günde für unseren Teilerfolg liegen.

Ein Hauptgrund liegt in der Tatsache, daß wir über eine große Menge von algebraischen Zyklen verfügen, die Hirzebruch-Zagier-Zyklen [17]. Diese Zyklen entstehen grob gesagt in der folgenden Weise. Die obere Halbebene $\mathfrak{H}$ kann diagonal in $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ eingebettet werden. Ein Element $g \in GL(2, F)$ mit total positiver Determinante operiert auf $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ und die Projektion von $g \cdot \mathfrak{H}$ auf $\Gamma \backslash \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$, isomorph zu $\Delta \backslash \mathfrak{H}$ mit $\Delta = g^{-1} \cdot \Gamma g \cap SL(2, \mathbf{Q})$, ist eine algebraische Kurve. Eine leichte Modifikation dieser Konstruktion liefert eine noch größere Gruppe von algebraischen Zyklen, die über abelschen Erweiterungen von **Q** definiert sind. (Man wichtet zusammenhängende Kurven mit zyklotomischen Charakteren.) Hirzebruch und Zagier betrachten zusätzliche Kurven auf $\Gamma \backslash \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$, die mittels Quaternionendivisionsalgebren über **Q** konstruiert werden; es stellt sich aber heraus, daß diese keine größere Gruppe von algebraischen Zyklen leifern. Wir zeigen, daß die Hirzebruch-Zagier-Zyklen zusammen mit gewissen universellen Chernklassen die Gruppe aller algebraischen Zyklen über einer abelschen Erweiterung von **Q** erzeugen. Über nichtabelschen auflösbaren Erweiterungen sagen mitunter die Tate'schen Vermutungen die Existenz von zusätzlichen algebraischen Zyklen voraus. Weil wir diese algebraischen Zyklen nicht zu konstruieren versucht haben, müssen wir uns auf abelsche Erweiterungen von **Q** beschränken. Eine genauere Beschreibung dieser Sachlage findet sich am Ende des §4.

Der zweite wichtige Punkt im Beweis der Vermutungen liegt in der Berechnung der Zetafunktion von Hilbert-Blumenthal-Flächen (in den guten Primstellen) als Produkt von automorphen L-Funktionen. Ein ähnlicher Satz ist gleichzeitig von Brylinski und Labesse [8] bewiesen worden. Weil die Grundideen der beiden Beweise identisch sind und weil wir mit dem von ihnen formulierten

Satz hier auskommen können, haben wir darauf verzichtet, unseren Beweis ausführlich darzulegen. Weil andererseits unser Beweis in gewisser Hinsicht vielleicht nicht ohne Vorteile ist, haben wir doch den Teil unseres Beweises, der von den ihrigen abweicht, wenigstens andeuten wollen. Die prinzipielle Methode ist natürlich die übliche: ein Vergleich der Lefschetz'schen Fixpunktformel mit der Selberg'schen Spurformel. Die hier gegenüber dem kompakten Fall [23] neu auftretende Schwierigkeit ist es nachzuweisen, daß der Beitrag der Spitzen zur Lefschetz'schen Fixpunktformel verschwindet.

Um weiterzukommen, ist eine Untersuchung der auftretenden automorphen L-Funktionen, insbesondere ihrer Nullstellen und Polstellen, nötig. Hier liefern die Theorie des Basiswechsels [24] und die Arbeiten [12], [20], [18] und [31] die gebrauchten Informationen.

Um die Invarianten unter der Galoisgruppe in der Kohomologie zu bestimmen, verwenden wir Tricks, die von Ribet [28] und Serre [29] stammen. Daß wir diese Methoden überhaupt anwenden können, liegt an einer schlagend einfachen, aber wichtigen Bemerkung von Oda. Oda hat seine Entdeckung selbst verwendet, um die Vermutungen von Tate für einige Hilbert-Blumenthal-Flächen zu beweisen [26].

Wir haben die Bestimmung der Zetafunktion und der Galoisinvarianten für lokale Systeme durchgeführt. Für den Beweis der Vermutungen von Tate ist die Betrachtung der konstanten Garbe ausreichend.

Zum Abschluß dieser Einleitung möchten wir erwähnen, daß diese Arbeit ihren Ursprung in einer Arbeitsgemeinschaft in Oberwolfach hat, bei der insbesondere Tunnell's Beweis der Tate'schen Vermutungen für das Produkt von zwei modularen Kurven vorgetragen wurde. Überhaupt wurde uns die Idee, die Tate'schen Vermutungen für Shimuravarietäten zu betrachten, von Tunnell nahegebracht. Es ist sehr zu bedauern, daß er seine Ergebnisse über die von ihm gelösten Fälle nicht veröffentlicht hat. Unsere Ergebnisse wurden in vorläufiger Form während des Sommersemesters 1981 im Seminar über automorphe Formen in Bonn vorgetragen. Wir bedanken uns bei den Seminarteilnehmern für ihr Interesse, insbesondere bei L. Clozel, dessen Vorschläge uns sehr nützlich waren. Der SFB Reine Mathematik der Universität Bonn ermöglichte uns ein Jahr angenehmer Zusammenarbeit.

§1. HINTERGRUND

1.1. Es sei G die über $\mathbf{Q}$ definierte reduktive Gruppe $R_{F/\mathbf{Q}}GL(2)$. Dann ist $G(\mathbf{R}) = GL(2,\mathbf{R}) \times GL(2,\mathbf{R})$, wobei jeder Faktor einer Einbettung von F in $\mathbf{R}$ entspricht. Wir fixieren den Homomorphismus $h : \mathbf{C}^\times \to G(\mathbf{R})$

$$h : a + i \cdot b \to \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Jede offene kompakte Untergruppe K von $G(\mathbf{A}_f)$ bestimmt eine quasiprojektive Varietät $S = S_K = S_K(G,h)$, die in natürlicher Weise über $\mathbf{Q}$ definiert ist. Wir bemerken, daß wir in der Wahl des kanonischen Modells (=Wahl des Reziprozitätshomomorphismus des Modells) den Konventionen von Deligne in [11] folgen. Inbesondere ist der Isomorphismus der Klassenkörpertheorie so gewählt, daß er die Frobeniussubstitution in das *Inverse* einer lokalen Uniformisierenden überführt. Wir nennen diese spezielle Shimuravarietät eine *Hilbert-Blumenthal-Fläche*. Die Menge ihrer komplexen Punkte kann mit $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/K_\infty K$ identifiziert werden, wobei

$$K_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \right\} \subset G(\mathbf{R}).$$

Wir werden K immer genügend klein voraussetzen, beispielsweise in einer Hauptkongruenzgruppe vom Niveau $N \geqq 3$. Unsere Hauptergebnisse lassen sich im Fall einer beliebigen Untergruppe K aus den hier bewiesenen Sätzen herleiten.

1.2. Wir werden zwei Kompaktifizierungen des Schemas S beschreiben. Das plurikanonische lineare System definiert eine offene Einbettung von S in eine normale projektive Varietät $\bar{S}$ über $\mathbf{Q}$, die Satake-Baily-Borel-Kompaktifizierung. Die Differenz $\bar{S}\backslash S$ besteht aus endlich vielen Punkten, die wir *Spitzen* nennen. Da wir mit einer größeren Gruppe als in [27] arbeiten, muß die Beschreibung der Spitzen entsprechend modifiziert werden. Das soll jetzt geschehen.

Eine *Positivität* auf einem eindimensionalen F-Vektorraum P ist die Vorgabe einer Ordnung auf dem $\mathbf{R}$-Vektorraum

$$P \underset{F,\sigma}{\otimes} \mathbf{R}$$

für jede reelle Einbettung σ von F. Die Menge der Spitzen kann mit der Menge der Isomorphieklassen folgender Tripel identifiziert werden. Ein Tripel besteht aus:

a) Einer exakten Sequenz von F-Vektorräumen

$$0 \to H' \to H \to H'' \to 0$$

mit dim $H' = dim\, H'' = 1$.

b) Einer Positivität auf $\Lambda^2_F H$.

c) Einer Klasse von Isomorphismen modulo K

$$\phi : H \underset{F}{\otimes} \mathbf{A}_f(F) \to \mathbf{A}_f(F) \oplus \mathbf{A}_f(F).$$

Hierbei ist $\mathbf{A}_f(F) = \mathbf{A}_f \otimes F$. Wir gewinnen aus a) eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_F$-Moduln

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

mittels

$$\phi(M) = \phi(H) \cap \big(\mathbf{Z}_f(F) \oplus \mathbf{Z}_f(F)\big), \quad M' = H' \cap M.$$

Dabei ist $\mathbf{Z}_f(F) = \mathbf{Z}_f \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathcal{O}_F$.

Die Automorphismengruppe eines Tripels besteht aus denjenigen linearen Abbildungen A von H, die H' stabilisieren, deren Determinante total positiv ist und so daß $\phi A \phi^{-1}$ in K liegt. Bis auf Isomorphie hängt diese Gruppe nur von der Spitze s ab. Sie wird mit $B(s)$ bezeichnet. Es sei $N(s)$ die Untergruppe der Elemente, die trivial auf H' und H'' operieren. Dann liegt $N(s)$ in

$$Z(s) = \mathrm{Hom}_F(H'', H') = \mathrm{Hom}_F(H'' \underset{F}{\otimes} H'', H' \underset{F}{\otimes} H'') = \mathrm{Hom}_F(H'' \underset{F}{\otimes} H'', \Lambda^2_F H),$$

einem F-Vektorraum mit natürlicher Positivität. Somit liefert eine Spitze einen $\mathbf{Q}$-Vektorraum $Z(s)$, der ein Gitter $N(s)$ enthält, und den Kegel der positiven Elemente $C(s)$ in dem 2-dimensionalen Vektorraum $H(s) \otimes \mathbf{R}$. Die Operation der Gruppe $M(s) = B(s)/N(s)$ auf $Z(s)$ erhält $N(s)$ und $C(s)$.

1.3. Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ operiert auf der Menge der Spitzen, diese Operation faktorisiert über den maximal abelschen Quotienten, kann also nach der Klassenkörpertheorie durch eine Operation der Idelegruppe $\mathbf{I_Q}$ beschrieben werden. Es sei s eine Spitze und $a \in \mathbf{I_Q}$. Wir wählen uns eine beliebige Zerfällung der exakten Folge a)

$$H \cong H' \oplus H'',$$

und definieren die lineare Abbildung $\psi(a)$ auf $H \underset{F}{\otimes} \mathbf{A}_f(F)$ durch die Gleichung

$$\psi(a) : h' \oplus h'' \to a \cdot h' \oplus h''.$$

Wir erhalten eine neue Spitze, indem wir die exakte Sequenz a) beibehalten, die Positivität mittels des Vorzeichens von a im Unendlichen abändern, und ϕ durch $\phi \circ \psi(a)$ ersetzen. Man prüft leicht nach, daß diese Spitze in der Tat nur von s und a abhängt, und sogar nur von der Ideleklasse von a. Sie wird mit $a \cdot s$ bezeichnet.

Es sei $\tau : \mathbf{I_Q} \to \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_{\mathrm{ab}}/\mathbf{Q})$ die durch die Klassenkörpertheorie gegebene Abbildung. Dann gilt:

$$\tau(a)s = a \cdot s \text{ für alle } a \in \mathbf{I_Q}.$$

1.4. Die Seiten des Kegels $C(s)$ sind nicht rational. Wir können ihn aber so zerlegen, daß er eine Vereinigung von Kegeln σ_α mit rationalen Seiten und inneren Punkten ist. (Dabei ist σ_α abgeschlossen in $C(s)$.) Eine Zerlegung heißt *zulässig*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) Falls $\alpha \neq \beta$, so ist $\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta$ eine Halbgerade oder leer.

b) Die Zerlegung ist invariant bezüglich $M(s)$ und die Anzahl der Bahnen ist endlich.

c) Für jedes α ist $N(s) \cap \sigma_\alpha$ eine kommutative Halbgruppe, die von zwei Elementen $\lambda_\alpha, \mu_\alpha$ frei erzeugt wird.

d) $m\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta = \emptyset$, falls $m\sigma_\alpha \neq \sigma_\beta$ und $m \in M(s)$ nichttrivial auf $N(s)$ operiert.

Wir machen auf zwei Unterschiede zu der Definition in [25] aufmerksam. Dort enthalten die rationalen Kegel σ_α den Ursprung und enthalten überdies nicht notwendigerweise eine offene Menge. Andererseits werden dort keine c) und d) entsprechenden Bedingungen gestellt; diese beiden Bedingungen werden Singularitäten der noch zu beschreibenden toroidalen Kompaktifizierungen von S und Selbstüberschneidungen des Divisors im Unendlichen verhindern.

Wenn wir die Abhängigkeit dieser Definitionen von der Gruppe K hervorheben wollen, sprechen wir von K-Spitzen und K-zulässigen Zerlegungen. Die folgenden Aussagen sind bekannt.

(I) Für jede Spitze gibt es zulässige Zerlegungen.

(II) Jede rationale Zerlegung besitzt eine zulässige Verfeinerung.

Wenn b die rationale Zahl mit demselben Vorzeichen und dem gleichen Absolutbetrag in den endlichen Primstellen wie das Idele a ist, dann ist $C(as) = bC(s)$ und $N(as) = bN(s)$. Zulässige Zerlegung $\Sigma(s) = \{\sigma_\alpha(s)\}$ und $\Sigma(as) = \{\sigma_\beta(as)\}$ heißen *verträglich*, falls $\Sigma(as) = \{b\sigma_\alpha(s)\}$. Eine Zerlegung $\Sigma = \{\Sigma(s)\}$ sämtlicher Spitzen heißt *zulässig*, falls $\Sigma(s)$ und $\Sigma(as)$ für jedes a und jedes s verträglich sind. Mittels einer zulässigen Zerlegung Σ kann man eine nicht-singuläre über **Q** definierte Kompaktifizierung $\tilde{S} = \tilde{S}_K = \tilde{S}_\Sigma = \tilde{S}_{K,\Sigma}$ der Varietät S konstruieren (siehe 1.6).

1.5 Definition. Eine Primzahl p heißt *unverzweigt* (bezüglich K), falls:

(a) p in F unverzweigt ist.

(b) $K = K_p \cdot K^p$, wobei $K^p \subset G(\mathbf{A}_f^p)$ und $K_p \subset G(\mathbf{Q}_p)$ die durch das Gitter $(\mathcal{O}_F \oplus \mathcal{O}_F) \otimes \mathbf{Z}_p$ definierte maximal kompakte Untergruppe ist.

Im folgenden wird angenommen, daß p unverzweigt ist.

1.6. Es sei $\mathbf{Z}_{(p)}$ der Unterring von $\mathbf{Q}$, in dem alle Primzahlen außer p invertierbar sind. Der Vorzug von $\tilde{S}$ im Gegensatz zu $\bar{S}$ ist, daß $\tilde{S}$ als eigentliches glattes Schema über $\mathbf{Z}_{(p)}$ definiert werden kann, dessen Ort im Unendlichen ein relativer Divisor mit normalen Schnitten ist. Da eine ganz ähnliche Behauptung in [27] bewiesen ist, verzichten wir auf die Angabe des Beweises und begnügen uns mit der Beschreibung der uns nützlichen Eigenschaften.

Es gibt ein kommutatives Diagramm über $\mathbf{Q}$.

$$\begin{tikzcd} \bar{S} \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\bar{j}"'] & \tilde{S} \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd}$$

Es sei $S^\infty = S^\infty_\Sigma = \tilde{S}_\Sigma \backslash S$. Wir wollen die Komplettierung T von $\tilde{S}_\Sigma$ längs S^∞ beschreiben. Da p unverzweigt ist, können wir einen in p unverzweigten endlichen Kreiskörper E wählen, so daß alle Spitzen über E definiert sind. Es sei R der ganze Abschluß von $\mathbf{Z}_{(p)}$ in E. Dann ist

(1.6.1) $$T \otimes_{\mathbf{Z}_{(p)}} R = \coprod_s T(s).$$

Will man nun T beschreiben, so beschreibt man zunächst die $T(s)$ und anschließend konstruiert man ein Abstiegsdatum für die Operation von $\mathrm{Gal}(E/\mathbf{Q})$ auf $\coprod_s T(s)$. D.h., man konstruiert Isomorphismen

$$\phi_\tau : \coprod_s T(s) \to \big(\coprod_s T(s)\big)^\tau$$

für $\tau \in \mathrm{Gal}(E/\mathbf{Q})$, so daß stets $\phi_{\tau\tau_1} = \phi_\tau^{\tau_1} \circ \phi_{\tau_1}$. Weil $R/\mathbf{Z}_{(p)}$ unverzweigt ist, liefert uns dies dann $T/\mathbf{Z}_{(p)}$, indem wir einfach auf den affinen Ringen die Galoisinvarianten betrachten.

Das in 1.2 definierte Gitter $N(s)$ wird als Gitter der einparametrigen Untergruppen eines Torus $H/\mathrm{Spec}(R)$ interpretiert. Die Zerlegung des Kegels $C(s)$ liefert eine unendliche toroidale Einbettung ([2], Chap. I) von H in $H_{\{\sigma_\alpha\}}$.

Auf der Komplettierung von $H_{\{\sigma_\alpha\}}$ längs $H_{\{\sigma_\alpha\}} \backslash H$ operiert die unendlich zyklische Einheitengruppe, und $T(s)$ ist der Quotient dieser Komplettierung nach dieser Einheitengruppe.

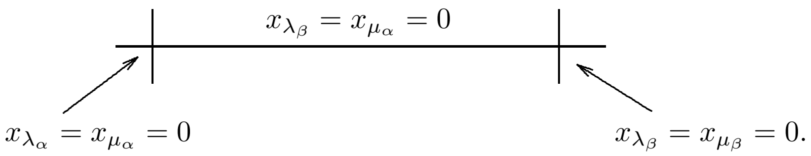
Wenn man die Vorschriften aus [2], Chap. I auf unsere Situation übersetzt, so liefert uns dies das folgende Bild. Zu jedem σ_α haben wir Erzeugende $\lambda_\alpha, \mu_\alpha$ des Kegels σ_α und wir führen zwei Variable $x_{\lambda_\alpha}, x_{\mu_\alpha}$ ein. Wenn σ_β ein benachbarter Kegel ist und $\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta = \mathbf{N}\mu_\alpha = \mathbf{N} \cdot \lambda_\beta$, dann ist

$$\mu_\beta = m\mu_\alpha - \lambda_\alpha.$$

Nun betrachten wir die folgende Identifizierungsvorschrift

$$\begin{array}{ccc} R[x_{\lambda_\alpha}, x_{\mu_\alpha}] & & R[x_{\lambda_\beta}, x_{\mu_\beta}] \\ \cap & & \cap \\ R[x_{\mu_\alpha}, x_{\lambda_\alpha}, x_{\lambda_\alpha}^{-1}] & = & R[x_{\lambda_\beta}, x_{\mu_\beta}, x_{\mu_\beta}^{-1}], \end{array}$$

wobei die Identifizierung durch $x_{\lambda_\beta} = x_{\mu_\alpha} \cdot x_{\lambda_\alpha}^m$ und $x_{\mu_\beta} = x_{\lambda_\alpha}^{-1}$ gegeben ist. Dann können wir die affinen Räume $\mathrm{Spec}(R[x_{\lambda_\alpha}, x_{\mu_\alpha}])$ und $\mathrm{Spec}(R[x_{\lambda_\beta}, x_{\mu_\beta}])$ über die obige Identifizierung zusammenkleben und wenn wir dann in beiden affinen Ebenen längs der Koordinatenachsen komplettieren, erhalten wir als Bild



D.h., die beiden Doppelpunkte, die den offenen Kegeln $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ entsprechen, werden durch die projektive Gerade verbunden, die der Seite $\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta$ entspricht und auf der $x_{\mu_\beta}, x_{\lambda_\alpha}$ die Koordinaten sind.

Setzt man diese Konstruktion nach beiden Seiten fort, so erhält man die unendliche toroidale Einbettung, und $T(s)$ ist der Quotient davon durch die Einheitengruppe.

Ist nun τ ein Element aus der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(E/\mathbf{Q})$ und ist $a \in \mathbf{I_Q}$ ein Element, das τ über den Reziprozitätsisomorphismus entspricht, dann ist $T(s)^\tau = T(s^\tau) = T(a \cdot s)$. Das Idele a vermittelt eine Abbildung zwischen den Zerlegungen von $C(s)$ und $C(a \cdot s)$, weil wir von einer zulässigen Zerlegung ausgehen. Wenn $\sigma'_\alpha, \sigma'_\beta$ zwei benachbarte Kegel in $C(as)$ sind, die gerade die Bilder von $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ in $C(s)$ unter a sind, dann bekommen wir Isomorphismen

$$R[x_{\lambda_\alpha}, x_{\mu_\alpha}] \to R[x_{\lambda'_\alpha}, x_{\mu'_\alpha}],\ f(x_{\lambda_\alpha}, x_{\mu_\alpha}) \to f^\tau(x_{\lambda'_\alpha}, x_{\mu'_\alpha})$$

und entsprechend für die β-Variablen, und das liefert einen Isomorphismus zwichen den toroidalen Einbettungen, die oben beschrieben worden sind. Er wird von a unabhängig, wenn wir zum Quotienten übergehen, und das liefert uns

$$\phi_\tau : \coprod_s T(s) \to \big(\coprod_s T(s)\big)^\tau.$$

Damit ist das Abstiegsdatum und somit auch $T/\mathbf{Z}_{(p)}$ konstruiert.

1.7. Wenn K' in K enthalten ist, so gibt es einen natürlichen endlichen étalen Morphismus $S_{K'} \to S_K$, der sich in einen endlichen flachen Morphismus $\bar S_{K'} \to \bar S_K$ erweitert. Beide Morphismen werden mit $R(1)$ bezeichnet. Allgemeiner sei $g \in G(\mathbf{A}_f)$ und $K' \subset K \cap g \cdot K g^{-1}$. Dann ist die auf den komplexen Punkten durch $x \to x \cdot g$ definierte Abbildung

$$G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/K_\infty \cdot K' \to G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/K_\infty \cdot K$$

von einem über $\mathbf{Q}$ definierten Morphismus $R(g) : S_{K'} \to S_K$, der sich in $\bar S_{K'} \to \bar S_K$ erweitert, induziert. Wir erhalten eine Heckekorrespondenz

$$\begin{tikzcd} & \bar S_{K'} \arrow[dl, "R(1)"'] \arrow[dr, "R(g)"] & \\ \bar S_K & & \bar S_K \end{tikzcd}$$

1.8. Es gibt gute Gründe, die Schnittkohomologie von Goresky-MacPherson und Deligne [7] ins Spiel zu bringen. Es sei μ eine endlich-dimensionale über $\mathbf{Q}$ definierte Darstellung der Gruppe G in einem Vektorraum $V = V_\mu$. Wir nehmen an, daß μ absolut irreduzibel ist. Dieser Darstellung ordnet man ein lokales System $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\mu$ von $\mathbf{Q}$-Vektorräumen über der komplexen Mannigfaltigkeit $S(\mathbf{C})$ und von $\mathbf{Q}_l$-Vektorräumen über dem Schema S zu. Die intermediäre Erweiterung von $\mathcal{V}$ auf $\bar S$ [7], 2.2 bezeichnen wir mit demselben Symbol. Wir interessieren uns für die Schnittkohomologiegruppen $\mathbf{H}^p(\bar S \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V})$. In diesem speziellen Fall sieht man leicht ein [7], 2.2, daß

$$\begin{aligned} &\mathbf{H}^i(\bar S \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V}) = H^i(S \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V}), \quad i = 0, 1; \\ &\mathbf{H}^2(\bar S \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V}) = \mathrm{Im}\,\big(H^2_c(S \underset{\mathbf{Q}}{\times} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V}) \to H^2(S \underset{\mathbf{Q}}{\times} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V})\big); \\ &\mathbf{H}^i(\bar S \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V}) = H^i_c(S \underset{\mathbf{Q}}{\times} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V}), \quad i = 3, 4. \end{aligned}$$

Wir betten $\bar{\mathbf{Q}}$ in $\bar{\mathbf{Q}}_l$ und diesen Raum in $\mathbf{C}$ ein. Dann kann man auf Grund allgemeiner Prinzipien und der Benutzung der Zucker'schen Vermutung (siehe [8], 1.3.6 und 1.3.7) die Kohomologie $\mathbf{H}^{\cdot}(\bar S \times_{\mathbf{Q}}$

$\bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V})$ nach der Operation der Heckealgebra zerlegen. Das sieht dann so aus: ist π eine irreduzible Darstellung der Adelegruppe $G(\mathbf{A}) = GL_2(\mathbf{A}_F)$, die in $L^2\big(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})\big)$ auftaucht, so sagen wir, daß

$$\pi \in \mathrm{Coh}(\mu) \Leftrightarrow H^{\cdot}(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty, \pi_\infty \otimes \mathcal{V}_\mu) \neq 0.$$

Dabei ist π_∞ die unendliche Komponente in der Zerlegung von $\pi = \pi_\infty \times \pi_f$, die der Zerlegung $G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{R}) \times G(\mathbf{A}_f) = G_\infty \times G(\mathbf{A}_f)$ entspricht. Die Menge $\mathrm{Coh}(\mu)$ kann man in einen "trivialen" und einen "interessanten" Anteil zerlegen

$$\mathrm{Coh}(\mu) = \mathrm{Coh}_e(\mu) \cup \mathrm{Coh}_0(\mu),$$

wobei $\mathrm{Coh}_e(\mu) = \{\pi \in \mathrm{Coh}(\mu) |\, dim\, \pi = 1\}$. Es ist $\mathrm{Coh}_e(\mu) = \emptyset$, falls $dim\, \mathcal{V}_\mu > 1$, und sonst ist

$$\mathrm{Coh}_e(\mu) = \{\pi |\, dim\, \pi = 1, \pi_\infty | G^0(\mathbf{R}) = \mu^{-1} | G^0(\mathbf{R})\}.$$

Die Elemente in $\mathrm{Coh}_e(\mu)$ sind natürlich Größencharaktere, wie wir weiter unten erläutern werden.

Die Menge $\mathrm{Coh}_0(\mu)$ besteht aus cuspidalen Kohomologieklassen, und zwar aus solchen π, bei denen π_∞ das μ entsprechende Mitglied der diskreten Serie ist.

Dann gilt:

Satz 1.9. a) $\mathbf{H}^1(\bar{S} \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V}) = \mathbf{H}^3(\bar{S} \times_{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V}) = 0.$

b) $\mathbf{H}^0(\bar{S} \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V}) = \underset{\pi \in \mathrm{Coh}_e(\mu)}{\otimes} H^0_\infty(\pi) \otimes \pi_f^K,$

c) $\mathbf{H}^4(\bar{S} \times_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}, \mathcal{V}) = \underset{\pi \in \mathrm{Coh}_e(\mu)}{\otimes} H^4_\infty(\pi) \otimes \pi_f^K,$

d) $\mathbf{H}^2(\bar{S} \times_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}, \mathcal{V}) = \underset{\pi \in \mathrm{Coh}(\mu)}{\otimes} H^2_\infty(\pi) \otimes \pi_f^K.$

Dabei sind die rechten Seiten wie folgt zu verstehen: es sei $H_{\pi,\infty}$ der Raum der C^∞-Vektoren in dem Raum der automorphen Formen $H_\pi \subset L^2\big(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})\big)$. Dann ist die Kohomologie

$$H^{\cdot}(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty, H_{\pi,\infty}) \stackrel{\mathrm{Def}}{=} H^{\cdot}_\infty(\pi) \otimes H_{\pi_f},$$

und es ist π_f^K der Modul unter der Heckealgebra, der aus den K-invarianten Elementen aus H_{π_f} besteht, d.h. $\pi_f^K = H^K_{\pi_f}$. Wir bemerken, daß in diesem Fall π_f^K über $\bar{\mathbf{Q}}$ realisiert werden kann. Für $\pi \in \mathrm{Coh}_e(\mu)$ ist

$$H^{\cdot}(\pi_\infty) = H^0(\pi_\infty) \oplus H^2(\pi_\infty) \oplus H^4(\pi_\infty) = \mathbf{C} \oplus (\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}) \oplus \mathbf{C}.$$

Für $\pi \in \mathrm{Coh}_0(\mu)$ ist nur Kohomologie in der Dimension 2 vorhanden, und es ist

$$dim\, H^2_\infty(\pi) = 4.$$

Die Zerlegung 1.9 wird mit Hilfe der Heckeoperatoren definiert. Das übliche Verfahren läßt sich in der Tat anwenden, weil die Schnittkohomologie funktoriell unter endlichen Morphismen ist [7]. Somit ist sie, wenn es sich um l-adische Kohomologie handelt, mit der Wirkung von $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ verträglich, und die Räume $H^i_\infty(\pi)$ erweisen sich als Galoismoduln, die aber durch π und nicht allein durch π_∞ bestimmt werden. Da die Wirkung der Galoisgruppe auf der Menge der Zusammenhangskomponenten bekannt ist, lassen sich die Moduln $H^0_\infty(\pi)$ unschwer beschreiben. Dazu erinnern wir, wie man gewissen Größencharakteren l-adische Galoisdarstellungen zuordnet.

Mittels des Artin'schen Reziprozitätsgesetzes können wir Ideleklassencharaktere endlicher Ordnung mit Charakteren endlicher Ordnung der Galoisgruppe identifizieren. Es entspricht ferner dem komplexen Charakter $\alpha : x \to |x|$ der Ideleklassengruppe die zyklotomische ein-dimensionale l-adische Darstellung (siehe Konvention aus 1.1)

$$\alpha : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{Gal}\big(\mathbf{Q}(\sqrt[ell^\infty]{1})/\mathbf{Q}\big) = \mathbf{Z}_l^\times .$$

Man kann daher jedem π aus $\mathrm{Coh}_e(\mu)$ eine l-adische Darstellung χ_π der Galoisgruppe zuordnen, indem man $\pi(g) = \nu(\det g)$ schreibt und ν auf $\mathbf{I}_\mathbf{Q}$ einschränkt und dann zur entsprechenden Galoisdarstellung übergeht.

1.10 Proposition.

(a) *Die Galoisdarstellung auf* $H^0_\infty(\pi)$ *ist* χ_π.

(b) *Die Galoisdarstellung auf* $H^4_\infty(\pi)$ *ist* $\alpha^{-2}\chi_\pi$.

Von wesentlicher Bedeutung für diese Arbeit ist die Bestimmung der Darstellungen auf $H^2_\infty(\pi)$, zumindest ihrer Einschränkung auf die Zerlegungsgruppe in einer unverzweigten Primstelle.

1.11. Wir hätten, statt mit der Gruppe G zu beginnen, auch mit der Gruppe $H = GL_2/\mathbf{Q}$ und dem Homomorphismus $\mathbf{C}^\times \to H(\mathbf{R})$

$$a + i\cdot b \to \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

beginnen können. Zu einer offenen kompakten Untergruppe $L \subset H(\mathbf{A}_f)$ erhalten wir eine über $\mathbf{Q}$ definierte Kurve J_L. Die Diagonaleinbettung $H \to G$ definiert einen über $\mathbf{Q}$ definierten Morphismus $J_L \to S_K$, falls $L \subset K$. Es sei $\bar{J}_L$ die kanonische Kompaktifizierung der Kurve J_L. Der obige Morphismus erweitert sich in einen Morphismus $\bar{J}_L \to \tilde{S}_K$. Insbesondere liegt der durch J_L definierte Zykel in $H^2\big(S_K \times_\mathbf{Q} \bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_l(1)\big)$ im Bild der Restriktionsabbildung

$$H^2\big(\tilde{S}_K \times_\mathbf{Q} \bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_l(1)\big) \to H^2\big(S_K \times_\mathbf{Q} \bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_l(1)\big).$$

(Beachte, daß dieser Zykel beim Abändern von L in eine kleinere offene kompakte Untergruppe durch ein Vielfaches ersetzt wird.)

§2. ZUSAMMENSTELLUNG DER ERGEBNISSE

Wir erläutern zunächst, wie die Vermutungen von Tate für nichtkompakte Flächen zu formulieren sind (vgl. Einleitung). Es sei X eine glatte algebraische Fläche über dem Zahlkörper E und es sei $\tilde{X}$ eine über E definierte glatte Kompaktifizierung von X, so daß der Ort im Unendlichen ein Divisor Y mit normalen Schnitten ist. Einem Resultat von Grothendieck zufolge ist das Bild $\tilde{H}^2\big(X \times_E \bar{E}, \mathbf{Q}_l(1)\big)$ der Restriktionsabbildung

$$H^2\big(\tilde{X} \times_E \bar{E}, \mathbf{Q}_l(1)\big) \to H^2\big(X \times_E \bar{E}, \mathbf{Q}_l(1)\big)$$

unabhängig von der Wahl von $\tilde{X}$. Weil sich jeder algebraische Zykel auf X in einen algebraischen Zykel auf $\tilde{X}$ erweitert, ist die Gruppe der algebraischen Kohomologieklassen $\mathcal{Z}(E)$ in $\tilde{H}^2\big(X \times_E \bar{E}, \mathbf{Q}_l(1)\big)$ enthalten. Die erste Vermutung von Tate lautet wie im projektiven Fall

$$\mathcal{Z}(E) = H^2(X \times_E \bar{E}, \mathbf{Q}_l(1)\big)^{\mathrm{Gal}(\bar{E}/E)} = \tilde{H}^2\big(X \times_E \bar{E}, \mathbf{Q}_l(1)\big)^{\mathrm{Gal}(\bar{E}/E)}.$$

Die letzte Gleichheit folgt aus der Tatsache, daß $\tilde{H}^2$ gerade der reine Anteil in H^2 ist (vergleiche den Beweis von Lemma 2.1 und die Diskussion in §5.) Die zweite Vermutung setzt die Dimension von $\mathcal{Z}(E)$ gleich der Polordnung der Zetafunktion von X in $s = 2$, wobei die Zetafunktion mit dem Galoismodul $\tilde{H}^2$ gebildet wird (vgl. Einleitung)

$$L_Q^2(X/E, s) = \prod_{\mathfrak{p} \notin Q} \det\Big(1 - N\mathfrak{p}^{-s}.\Phi_{\mathfrak{p}}^{-1} | \tilde{H}^2(X \times_E \bar{E}, \mathbf{Q}_l)\Big)^{-1}.$$

2.1 Lemma. *Falls die Tate'schen Vermutungen für X gelten, so auch für $\tilde{X}$.*

Beweis. Wir setzen $\bar{Y} = Y \times_E \bar{E}$ und betrachten die lange exakte Kohomologiefolge

$$H^2_{\bar{Y}}\big(\tilde{X} \times_E \bar{E}, \mathbf{Q}_l(1)\big) \to H^2\big(\tilde{X} \times_E \bar{E}, \mathbf{Q}_l(1)\big) \to H^2(X \times_E \bar{E}, \mathbf{Q}_l(1)\big) \to H^3_{\bar{Y}}(\tilde{X} \times_E \bar{E}, \mathbf{Q}_l(1)\big)$$

(SGA 4, 2, V, 6.7). Die relativen Kohomologiegruppen berechnen sich als Limes einer Spektralfolge

$$H^{\cdot}(\bar{Y}, \mathcal{H}^{\cdot}_{\bar{Y}}) \Rightarrow H^{\cdot}_{\bar{Y}}\big(\tilde{X} \times_E \bar{E}, Q_l(1)\big)$$

(SGA 4, 2, loc.cit.). Nun kann man zeigen (siehe SGA 4, 1/2, [Cycle]), daß das Bild von $H^2_{\bar{Y}}\big(\tilde{X} \times_E \bar{E}, \mathbf{Q}_l(1)\big)$ in $H^2\big(\tilde{X} \times_E \bar{E}, \mathbf{Q}_l(1)\big)$ gerade von den Bildern der Zyklen in dem Divisor Y erzeugt wird.

Damit ist Lemma 2.1 bewiesen. Um die oben formulierte Behauptung einzusehen, muß man zeigen, daß $H^3_{\bar{Y}}\big(\tilde{X} \times_E \bar{E}, \mathbf{Q}_l(1)\big)$ nach Reduktion mod irgendeiner Primstelle nicht rein vom Gewicht 0 ist. Das folgt aus den fundamentalen Sätzen in [10], angewandt auf die Terme vom Grad 3 in $H(\bar{Y}, \mathcal{H}^{\cdot}_{\bar{Y}})$.

Wir kehren jetzt zu dem uns interessierenden Spezialfall zurück. Das nächste Lemma stellt die Verbindung zwichen den eben eingeführten Kohomologiegruppen und den im vorhergehenden Abschnitt betrachteten Schnittkohomologiegruppen her.

2.2 Lemma. *Die beiden Untergruppen* $\tilde{H}^2(S_K \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_l)$ *und* $\mathbf{H}^2(\bar{S}_K \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_l)$ *von* $H^2(S_K \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_l)$ *sind identisch.*

Beweis. Wir betrachten das folgende Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten (alles Kohomologie mit konstanten Koeffizienten). Wir setzen $\bar{S}^\infty = S^\infty \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^2(\bar{S}^\infty) & & \\
 & & \uparrow & & \\
H^2_{S^\infty}(\tilde{S} \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}) & \longrightarrow & H^2(\tilde{S} \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}) & \xrightarrow{(1)} & H^2(S \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}) \\
 & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (2)} \\
 & & H^2_c(S \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}) & = & H^2_c(S \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}).
\end{array}$$

Daß die Pfeile (1) und (2) das gleiche Bild haben, resultiert aus dem folgenden Hilfssatz, von dem wir in 5.3 eine Verallgemeinerung beweisen werden.

2.3 Hilfssatz. *Der Homomorphismus*

$$H^2_{S^\infty}(\tilde{S} \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}) \to H^2(\bar{S}^\infty)$$

ist ein Isomrophismus.

Beweis. Siehe 5.3. Es folgt aber auch sofort daraus, daß die Schnittmatrix negativ definit ist, vgl. 5.4.

Wir betrachten nicht nur die konstante Garbe, sondern allgemeiner ein durch eine $\mathbf{Q}$-rationale Darstellung von $G/\mathbf{Q}$ definiertes lokales System. Dies liefert uns auch ein System l-adischer Kohomologiegruppen. Wie in §1 fixieren wir Einbettungen $\tau : \bar{\mathbf{Q}} \to \bar{\mathbf{Q}}_l \to \mathbf{C}$, und mit $\mathbf{H}^i(\bar{S}_K \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V})$ bezeichnen wir die Tensorprodukte der l-adischen Kohomologie mit $\bar{\mathbf{Q}}_l$. Auf dieser Kohomologie operiert nun die Algebra $\mathcal{H}_K$ der K-biinvarianten Funktionen mit kompakten Trägern auf $G(\mathbf{A}_f)$ und die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Wir bekommen dann eine Zerlegung in isotypische Komponenten

$$\mathbf{H}^i(\bar{S}_K \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V}) = \bigoplus_{\pi \in \mathrm{Coh}(\mu)} \mathbf{H}^i(\bar{S}_K \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V})(\pi_f^K),$$

und jeder der $\bar{\mathbf{Q}}_l$-Vektorräume in der Summe rechts ist ein Tensorprodukt

$$\mathbf{H}^i(\bar{S}_K \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V})(\pi_f^K) = W(\pi_f) \otimes X^{(i)}(\pi_f),$$

wobei $W(\pi_f)$ ein irreduzibler $\mathcal{H}_K$-Modul ist, auf dem $\mathcal{H}_K$ durch π_f^K operiert und wobei $X^{(i)}(\pi_f^K)$ ein endlichdimensionaler $\bar{Q}_l$-Vektorraum ist, auf dem die Galoisgruppe operiert

$$\rho^i(\pi) : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to GL\big(X^{(i)}(\pi_f^K)\big).$$

Uns interessiert besonders der Fall $i = 2$, dann wollen wir für $X^{(i)}(\pi_f^K)$ $\big($bzw. $\rho^i(\pi)\big)$ einfach $X(\pi_f)$ $\big($bzw. $\rho(\pi)\big)$ schreiben. Nach 1.9 ist

$$dim\, X(\pi_f) = 4 \text{ falls } \pi \in \mathrm{Coh}_0(\mu),$$
$$dim\, X(\pi_f) = 2 \text{ falls } \pi \in \mathrm{Coh}_e(\mu).$$

An den unverzweigten Stellen p definiert $\rho(\pi)$ einen lokalen Eulerfaktor

$$L_p\big(s, \rho(\pi)\big) = \det(1 - \rho(\pi)(\Phi_p^{-1})p^{-s})^{-1},$$

wobei Φ_p der arithmetische Frobenius ist.

Der nächste Satz beschreibt diesen lokalen L-Faktor in Termen, die der automorphen Form π zugeordnet sind. Dazu erinnern wir zunächst an die Definition der L-Gruppe. (Siehe [4], vergl. auch den Artikel von Casselman im gleichen Band.) In unserem Fall ist die L-Gruppe ${}^LG$ von $G/\mathbf{Q}$ gleich

$${}^LG = \big(GL_2(\mathbf{C}) \times GL_2(\mathbf{C})\big) \times \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}),$$

wobei $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ auf dem Produkt über die Faktorisierung $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q})$ auf $GL_2(\mathbf{C}) \times GL_2(\mathbf{C})$ operiert und wobei das nichttriviale Element die Faktoren vertauscht.

Wir betrachten die natürliche Darstellung

$$r : GL_2(\mathbf{C}) \times GL_2(\mathbf{C}) \to GL(\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2),$$

wobei die Faktoren jeweils auf den entsprechenden Faktoren des Tensorproduktes natürlich operieren. Diese Darstellung wird zu einer Darstellung

$$r : {}^LG \to GL(\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2)$$

forgesetzt, wobei

$$r(\mathrm{Id} \times \mathrm{Id} \times \sigma)\,(x \otimes y) = \begin{cases} x \otimes y & \sigma|F = 1, \\ y \otimes x & \sigma|F \neq 1. \end{cases}$$

Man ordnet nun dem Paar π, r eine lokale L-Funktion zu, die an den unverzweigten Stellen durch die folgende Formel ([4], 7.2) gegeben ist:

$$L_p(s, \pi, r) = \det\left(1 - r(A(\pi_p))p^{-s}\right)^{-1},$$

wobei $A(\pi_p)$ die zu π_p gehörige Konjugationsklasse in ${}^LG$ ist. Wenn man wie üblich eine lokale Darstellung in der unverzweigten Hauptserie mit

$$\pi_{\mathfrak{p}}(\mu_{\mathfrak{p}}, \nu_{\mathfrak{p}}) = \pi_{\mathfrak{p}}(\alpha_{\mathfrak{p}}, \beta_{\mathfrak{p}})$$

notiert, wobei $\alpha_{\mathfrak{p}}, \beta_{\mathfrak{p}}$ die Werte der Quasicharaktere auf einem uniformisierenden Element sind, dann gilt

$$r\big(A(\pi_p)\big) \sim \begin{pmatrix} \alpha_{\mathfrak{p}}\alpha_{\mathfrak{p}'} & & & \\ & \beta_{\mathfrak{p}}\alpha_{\mathfrak{p}'} & & \\ & & \alpha_{\mathfrak{p}}\beta_{\mathfrak{p}'} & \\ & & & \beta_{\mathfrak{p}}\beta_{\mathfrak{p}'} \end{pmatrix}$$

falls $p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$. Falls $p\mathcal{O} = \mathfrak{P}$ ein träges Primideal ist, dann ist

$$r\big(A(\pi_p)\big) = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathfrak{P}} & & & \\ & 0 & \alpha_{\mathfrak{P}} & \\ & \beta_{\mathfrak{P}} & 0 & \\ & & & \beta_{\mathfrak{P}} \end{pmatrix} = r\left[\begin{pmatrix} \alpha_{\mathfrak{P}} & 0 \\ 0 & \beta_{\mathfrak{P}} \end{pmatrix} \times \mathrm{Id} \times \Phi_p\right].$$

Es sei im folgenden ε sets der zu $F/\mathbf{Q}$ gehörige Charakter. Dann gilt:

2.4 Satz. *Es sei p unverzweigt und $\pi_f^K \neq 0$.*

a) *Wenn $\pi \in \mathrm{Coh}_e(\mu)$, dann ist*

$$L_p\big(s, \rho^0(\pi)\big) = \left(1 - \frac{\chi_\pi(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

$$L_p\big(s, \rho^2(\pi)\big) = \left(1 - \frac{p\chi_\pi(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{p \cdot \varepsilon(p)\chi_\pi(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

$$L_p\big(s, \rho^4(\pi)\big) = \left(1 - \frac{p^2\chi_\pi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

b) *Wenn* $\pi \in \mathrm{Coh}_0(\mu)$, *dann ist*

$$L_p\big(s, \rho(\pi)\big) = L_p(s-1, \pi, r).$$

Das Product der drei lokalen Faktoren in a) ist gerade $L_p(s-1,\pi,r)$. Somit können wir 2.4 umformulieren, indem wir das Verfahren in [22] nachahmen. Falls π in p unverzweigt ist, sei $A(\pi_p) \in {}^LG$ die entsprechende Konjugationsklasse (siehe [4], 7).

2.4′ Satz. *Es sei p unverzweigt (bezüglich K). Für jedes i ist die Galoisdarstellung ρ^i unverzweigt in p. Es sei Φ_p die Frobeniussubstitution in p und $g \in G(\mathbf{A}_f^p)$. Dann gilt für jede positive ganze Zahl n*

$$\sum_{i=0}^{4}(-1)^i \operatorname{Spur}\big(\rho^i(\Phi_p^{-n}) \cdot T(g)\big) = \sum_{\pi\in\mathrm{Coh}(\mu)} p^n \cdot \operatorname{Spur} r\big(A^n(\pi_p)\big) \operatorname{Spur} \pi_f(KgK).$$

Hierbei bezeichnet $T(g)$ den durch die Heckekorrespondenz g^{-1} vermittelten Endomorphismus von $\mathbf{H}^i(\bar{S}_K \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V})$. Auf der rechten Seite steht die Spur des Operators

$$\pi_f(KgK) = \{\int_K dx\}^{-1} \cdot \int_{KgK} \pi_f(x) \cdot dx.$$

Der Beweis dieses Satzes wird in §6 skizziert werden. Im Gegensatz zu [8], die die Lefschetz'sche Fixpunktformel auf $\bar{S}_K$ verwenden, arbeiten wir auf $\tilde{S}_K$.

Wir definieren wie folgt die ganze Zahl $n = n(\mu)$:

$$\mu(z) = z^{2n} \quad \text{für} \quad z \in \mathbf{Q}^\times \subset GL(2,F).$$

Es sei ω ein Charakter endlicher Ordnung von $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Wir betrachten die globale L-Funktion, die zu der l-adischen Darstellung $\omega \cdot \rho(\pi)$ gehört:

$$L_Q\big(s, \omega\cdot\rho(\pi)\big) = \prod_{p\notin Q} L_p\big(s, \omega\cdot\rho(\pi)\big).$$

2.4.1 Bemerkung. Wenn wir ω über den Reziprozitätsisomorphismus als Charakter auf $\mathbf{I}_{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}^\times$ interpretieren und diesen Charakter zu einem Galoischarakter ω' auf $\mathbf{I}_F/F^\times$ fortsetzen, dann wird

$$L_p\big(s, \omega\cdot\rho(\pi)\big) = L_p\big(s, \rho(\pi\otimes\omega')\big).$$

2.5 Satz. *Die Funktion $L_{\mathbf{Q}}\big(s, \omega \cdot \rho(\pi)\big)$ ist fortsetzbar in eine Umgebung von $s = n+2$. Es sei $\mathfrak{pol}(\pi, \omega)$ die Polordnung im Punkte $s = n+2$. Es sei $\mathfrak{t}(\pi, \omega)$ die Dimension des Vektorraums der Tate-Klassen*

$$\mathcal{T}(\pi, \omega) = \{x \in X(\pi_f) | \rho(\pi)(\sigma) \cdot x = \alpha^{-n-1}(\sigma) \cdot \omega^{-1}(\sigma) \cdot x, \sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})\}.$$

Dann gilt: $\mathfrak{pol}(\pi, \omega) = \mathfrak{t}(\pi, \omega)$.

Nach 1.9 ist die von dem $\mathbf{H}^2$ herrührende L-Funktion gleich

$$L(s, \omega \cdot \rho) = \prod_{\pi \in \mathrm{Coh}(\mu)} L\big(s, \omega \cdot \rho(\pi)\big),$$

und es gilt

2.6 Korollar. *Die Funktion $L(s, \omega \cdot \rho)$ ist fortsetzbar in eine Umgebung von $s = n+2$. Ihre Polordning $\mathfrak{pol}(\omega)$ in $s = n+2$ ist gleich der Dimension $\mathfrak{t}(\omega)$ des Vektorraums*

$$\mathcal{T}(\omega) = \{x \in \mathbf{H}^2(\bar{S}_K \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V}) | \rho(\sigma) \cdot x = \alpha^{-n-1}(\sigma) \cdot \omega^{-1}(\alpha) \cdot x, \sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})\}.$$

Wir bemerken, daß für $\pi \in \mathrm{Coh}_e(\mu)$ aus 2.4 folgt, daß $\mathfrak{pol}(\pi, \omega) = \mathfrak{t}(\pi, \omega)$ entweder 0 oder 1 ist und daß diese Zahl 1 ist genau dann, wenn χ_n gleich $\alpha^{-n} \cdot \omega^{-1}$ oder $\varepsilon \cdot \alpha^{-n} \cdot \omega^{-1}$ ist. Somit ist der Satz 2.5 für $\pi \in \mathrm{Coh}_e(\mu)$ trivial. Für unendlichdimensionale π wird 2.5 aus einer präziseren Aussage folgen.

2.7 Definition. Eine unendlich-dimensionale Form π auf $G(\mathbf{A})$ heißt *ausgezeichnet* bezüglich $\alpha^{-n}\omega^{-1}$, wenn sie von der Form

$$\pi = (\pi^0_{\mathbf{Q}} \times F) \otimes (\nu' \otimes \omega')^{-1}$$

ist, wobei die folgenden Forderungen gestellt sind:

1) $\pi^0_{\mathbf{Q}}$ ist eine automorphe Form auf $GL_2(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$ und $\pi^0_{\mathbf{Q}} \times F$ ist ihre Liftung nach F.

2) ν' und ω' sind Galoischaraktere auf $\mathbf{I}_F/F^\times$, und für ihre Einschränkungen auf $\mathbf{I}_{\mathbf{Q}}$ gilt

$$\omega'|\mathbf{I}_{\mathbf{Q}} = \omega; \; \omega_{\pi^0_{\mathbf{Q}}} = \alpha^{-n}_{\mathbf{Q}} \cdot \nu \cdot \varepsilon$$

mit $\nu'|\mathbf{I}_{\mathbf{Q}} = \nu$ und $\omega_{\pi^0_{\mathbf{Q}}}$ = zentraler Charakter von $\pi^0_{\mathbf{Q}}$.

Wir wollen zwei kleine Bemerkungen anschließen.

2.7.1. Die automorphe Form π ist genau dann ausgezeichnet bezüglich $\alpha^{-n}\omega^{-1}$, wenn $\pi \otimes \omega'$ ausgezeichnet bezüglich α^{-n} ist.

2.7.2. Wenn π ausgezeichnet bezüglich $\alpha^{-n}\omega^{-1}$ ist, dann ist $\omega_\pi|\mathbf{I}_{\mathbf{Q}} = \omega^{-2}\alpha^{-2n}_{\mathbf{Q}}$.

2.8 Satz. *Es sei* $\pi \in \mathrm{Coh}_0(\mu)$

(a) *Die Zahl* $\mathfrak{pol}\,(\pi,\omega)$ *ist entweder 0 oder 1. Sie ist genau dann gleich 1, wenn* π *ausgezeichnet (bezüglich* $\alpha^{-n}\omega^{-1}$*) ist.*

b) *Die Zahl* $\mathfrak{t}(\pi,\omega)$ *ist entweder 0 oder 1. Sie ist 1 genau dann, wenn* π *ausgezeichnet (bezüglich* $\alpha^{-n}\omega^{-1}$*) ist.*

Jetzt sei $\mathcal{V}$ die konstante Garbe. Es sei $\mathcal{Z}$ der von den über einem Zahlkörper definierten algebraischen Zyklen aufgespannte Unterraum von

$$\tilde{H}^2(S_K \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} \bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_l) = \mathbf{H}^2(\bar{S}_K \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_l).$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{Z}(\omega)$ $\big($bzw. $\mathcal{Z}(\pi,\omega)\big)$ den Durchschnitt von $\mathcal{Z}$ mit $\mathcal{T}(\omega)$ $\big($bzw. $\mathcal{T}(\pi,\omega)\big)$. Wir erhalten eine Zerlegung

$$\mathcal{Z}(\omega) = \underset{\pi\in\mathrm{Coh}(1)}{\oplus} \mathcal{Z}(\pi,\omega) \otimes \pi_f^K.$$

Unser Hauptresultat lautet:

2.9 Satz. *Es sei* $\mathfrak{z}(\pi,\omega)$ *die Dimension von* $\mathcal{Z}(\pi,\omega)$*. Es gilt*

$$\mathfrak{z}(\pi,\omega) = \mathfrak{pol}(\pi,\omega) = \mathfrak{t}(\pi,\omega).$$

In der Tat hat dieser Satz die Richtingkeit der Vermutungen von Tate für S_K, so wie sie am Anfang dieses Paragraphen formuliert sind, über einer abelschen Erweiterung von **Q** zur Folge. Was eindimensionale π betrifft, folgt aus der Bemerkung nach 2.6, daß man die Behauptung von 2.9 aus folgender Aussage erhält.

2.10 Proposition. *Es sei* $\pi \in \mathrm{Coh}_e(1)$*. Dann ist* $\mathfrak{z}(\pi,\omega)$ *gleich 0 oder 1, und zwar 1 genau dann, wenn* $\chi_\pi = \omega^{-1}$ *oder* $\chi_\pi = \varepsilon\cdot\omega^{-1}$*.*

Aus 1.11 erhält man mit Hilfe von 2.2 eine Abbildung

$$H^0(J_L) \to \mathbf{H}^2(\bar{S}_K \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}).$$

Ihr Bild liegt in $\mathcal{Z}$. Es sei $\mathcal{D}$ der durch die Wirkung der Heckeoperatoren von dem Bild von $H^0(J_L)$ erzeugte Unterraum von $\mathbf{H}^2(\bar{S}_K \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}})$. Offenbar ist $\mathcal{D} \subset \mathcal{z}$. Wir nennen die Elemente von $\mathcal{D}$ *Hirzebruch-Zagier-Zyklen.* Wir erhalten eine Zerlegung von

$$\mathcal{D}(\omega) \underset{\mathrm{Df.}}{=} \mathcal{D} \cap \mathcal{Z}(\omega),$$
$$\mathcal{D}(\omega) = \underset{\pi\in\mathrm{Coh}(1)}{\oplus} \mathcal{D}(\pi,\omega) \otimes \pi_f^K.$$

Es sei $\mathfrak{d}(\pi,\omega)$ die Dimension von $\mathcal{D}(\pi,\omega)$. Offenbar ist $\mathfrak{d}(\pi,\omega) \leqq \mathfrak{z}(\pi,\omega)$. Somit ist der Satz 2.9 eine Folgerung aus 2.10, 2.8 und dem folgenden Satz.

2.11 Satz. *Die Zahl $\mathrm{d}(\pi,\omega)$ ist gleich 0 oder 1. Falls $\pi \in \mathrm{Coh}_e(\mu)$, so ist sie genau dann 1, wenn $\chi_\pi = \omega^{-1}$. Falls $\pi \in \mathrm{Coh}_0(1)$ ausgezeichnet ist, so ist $\mathrm{d}(\pi,\omega)$ gleich 1.*

In den nächsten beiden Abschnitten nehmen wir die Gültigkeit von Satz 2.4 an und beweisen diejenigen Aussagen dieses Paragraphen, die nicht Folge anderer sind, allerdings nicht in der Reihenfolge, in der sie hier formuliert wurden.

§3. HIRZEBRUCH-ZAGIER-ZYKLEN

Es seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{k}$ die Liealgebren von $G(\mathbf{R})$ und K_∞. Für $\pi \in \mathrm{Coh}(1)$, wenn es sich um komplexe Kohomologie handelt, kann der Raum $H^2_\infty(\pi) \otimes \pi_f^K$ mit

$$\mathrm{Hom}_{K_\infty}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \pi^K) = \mathrm{Hom}_{K_\infty}\big(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \pi_\infty\big) \otimes \pi_f^K \tag{3.1}$$

identifiziert werden. Hier bezeichnet π sowohl die Darstellung als auch den entsprechenden Raum der automorphen Formen. Es sei $\omega_i, 1 \leqq i \leqq 6$, eine Basis des dualen Raums von $\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$. Dann schreibt sich ein Element aus (3.1) als $\sum_{i=1}^6 f_i \cdot \omega_i$, wobei f_i eine quadratintegrierbare automorphe Form auf $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/K$ ist. Die ω_i sind als linksinvariante Differentialformen auf $G(\mathbf{R})$ und somit auf $G(\mathbf{R})/K_\infty$ aufzufassen. Mittels der Einbettung $H(\mathbf{R}) \to G(\mathbf{R})$ aus 1.11 liefert ω_i eine Form ω_i^H auf $H(\mathbf{R})$ oder $H(\mathbf{A})/L$. Es sei

$$L_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right\} \subset H(\mathbf{R}).$$

Die Form $\sum f_i\omega_i$ ist invariant bezüglich K_∞ und $\sum f_i \cdot \omega_i^H$ ist bezüglich L_∞ invariant. Wir erhalten somit eine Form auf der orientierten Mannigfaltigkeit $H(\mathbf{A})/L_\infty \cdot L$.

Wir haben eine natürliche Paarung auf $\mathbf{H}^2(S_K \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}})$. Unter der Identifikation von $\mathbf{H}^2(\bar{S}_K \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}})$ mit der L^2-Kohomologie in der Zucker'schen Vermutung gilt dabei in naheliegender Weise:

$$\langle \sum f_i \cdot \omega_i, \sum f_i' \cdot \omega_j \rangle = \sum_{i,j} \int\limits_{G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{R})\backslash G(\mathbf{A})/K_\infty \cdot K} f_i \cdot f_j' \cdot \omega_i \wedge \omega_j. \tag{3.2}$$

Insbesondere gilt für die Aktion der Heckeoperatoren

$$\langle T(g)x, x' \rangle = \langle x, T(g^{-1})x' \rangle. \tag{3.3}$$

Wir identifizieren dem Raum $H^0(J_L)$ mit dem Raum der lokal konstanten Funktionen auf $H(\mathbf{Q})\backslash H(\mathbf{A})/L_\infty L$. Die in 1.11 definierte Zykelabbildung definiert wegen 2.2 eine Paarung zwischen dem Raum (3.1) und $H^0(J_L)$.

3.5 Hilfssatz. *Der Wert der Paarung auf dem Paar $\sum f_i \cdot \omega_i$, und $\mu \in H^0(J_L)$ ist bis auf eine nichtverschwindende Konstante gleich*

$$\int\limits_{H(\mathbf{Q})\backslash H(\mathbf{A}/L_\infty \cdot L} \mu \cdot \sum_i f_i \cdot \omega_i^H.$$

Beweis. Dies ist ein sehr technischer Hilfssatz, zu dem es mehrere Beweise gibt. Wir wollen im folgenden einen möglichen Beweis skizzieren. Der weise Leser wird die nachstehenden Zeilen bis zum nächsten Auftauchen der Zeichenfolge q.e.d. überschlagen.

Wir arbeiten mit der Borel-Serre Kompaktifizierung, genauer gesagt, wir schneiden die Spitzen ab und schieben dann die Ränder ins Unendliche. Die durch H definierten Zykeln sind dann als relative Homologieklassen in $H_2\big(S, \partial S(c), \mathbf{C}\big)$ zu interpretieren, dabei ist c das Niveau, an dem wir die Spitzen abschneiden; wenn $c \to \infty$ geht, dann erreichen wir den Rand der Borel-Serre Kompaktifizierung. Der Durchschnitt von $\partial S(c)$ mit dem Zykel ist dann eine Vereinigung von Kreisen, die als Randkomponenten auftreten, wenn wir den Modulkurven die Spitze abschneiden. Das sind Kreise, die in der Beschreibung aus [14], §1 (siehe auch [8], §1) in der durch den unipotenten Teil gegebenen Faser der Faserung liegen, sie sind also nullhomolog. (Siehe [14], Proposition 1.1; es ist aber auch so klar, daß die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $u \in \mathcal{O}$ Torsionsklassen in der Faktorkommutatorgruppe von der Boreluntergruppe $B(\mathcal{O})$ sind.) Also ist der Zykel im Bild der Abbildung

$$H_2(S, \mathbf{C}) \to H_2\big(S, \partial S(c), \mathbf{C}\big)$$

und damit wird klar, daß die Auswertung einer Klasse aus $H^2(S, \mathbf{C})$ auf dem Zykel sinnvoll ist. (Das haben wir vorher mit Hilfe der nichtsingulären Kompaktifizierung und 2.2 auch schon eingesehen.) Ist nun ω eine unsere cuspidale Kohomologieklasse repräsentierende automorphie Form, so können wir schreiben

$$\omega = \tilde{\omega} + d\phi,$$

wobei $\tilde{\omega}$ kompakten Träger hat. Nach Definition ist die Auswertung der Klasse auf dem Zykel durch das Integral von $\tilde{\omega}$ über dem Zykel gegeben. Man kann nun aber $d\phi$ nach Borel [5], Theorem 7.4 so wählen, daß ϕ logarithmisch wächst, d.h. wie ein Polynom in log c. Das Volumen des Randkreises geht aber mit c^{-1} nach Null und dann folgt

$$\int d\phi = \lim_{c \to \infty} \int\limits_{\partial S(c) \cap \mathrm{Zykel}} \phi = 0. \qquad \text{q.e.d.}$$

Die Menge der Zusammenhangskomponenten von J_L kann mit $\mathbf{Q}^\times\backslash\mathbf{I}_\mathbf{Q}/\mathbf{R}_+^\times \cdot \det L$ identifiziert werden [11]. Falls ω ein Größencharakter endlicher Ordnung auf $\mathbf{I}_\mathbf{Q}$ ist, der nicht trivial auf $\det L$ ist, wo $L = H(\mathbf{A}_f) \cap K$, ist $H^0(J_L)(\omega)$ trivial. Sonst ist $H^0(J_L)(\omega)$ vom Bild der Funktion ω^{-1} auf den Zusammenhangskomponenten erzeugt.

Wir können die Basis $\{\omega_i | 1 \leqq i \leqq 6\} = \{\omega_{\pm,\pm}, \omega_1, \omega_2\}$ so wählen, daß

$$\begin{aligned}\omega_{\pm,\pm} &= (dx_1 \pm idy_1) \wedge (dx_2 \pm idy_2),\\ \omega_j &= (dx_j + idy_j) \wedge (dx_j - idy_j).\end{aligned}$$

Dann ist $\omega^H_{+,+} = \omega^H_{-,-} = 0$ und $\omega^H_{+,-}, \omega^H_{-,+}, \omega^H_1$ und ω^H_2 sind invariant unter L_∞ und liefern die invariante 2-Form auf $H(\mathbf{R})/L_\infty$. Da wir $f_{+,-}$, und $f_{-,+}$ oder f_1 und f_2 unabhängig voneinander wählen können und da wegen (3.3) die Algebra der Heckeoperatoren selbstadjungiert ist, erhalten wir die folgende Aussage. In ihr bezeichnet Z das Zentrum von H.

3.6 Lemma. *Es sei* $H^2(\pi)^K = H^2_\infty(\pi) \otimes \pi_f^K \neq 0$. *Dann ist dieser Raum genau dann nicht orthogonal zu* $\mathcal{D}(\omega)$, *wenn es ein* f *im Raum von* π *und ein* $g \in G(\mathbf{A})$ *gibt, so daß*

$$\int\limits_{H(\mathbf{Q})Z(\mathbf{R})\backslash H(\mathbf{A})} \omega(\det h) \cdot f(h \cdot g) dh \neq 0.$$

Dieses Lemma ist genau genommen – im Gegensatz zu der vorangehenden Bermerkung – noch nicht vollständig bewiesen. Wir wissen nur, daß wir, um die behauptete Nichtorthogonalität zu zeigen, die obige Ungleichung für ein $g \in G(\mathbf{A}_f)$ (d.h. $g_\infty = 1$) und ein $f \in \pi$ zeigen müssen, das die folgende Bedingung erfüllt (dies gilt für den Fall $\pi \in \mathrm{Coh}_0$, im anderen Fall ist das Lemma klar):

a) f ist K-invariant.

b) Für

$$k = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \in K_\infty$$

gilt

$$k \cdot f = \left(\frac{a_1 + i \cdot b_1}{a_1 - i \cdot b_1} \cdot \frac{a_2 - i \cdot b_2}{a_2 + i \cdot b_2} \right)^{\pm 1} \cdot f.$$

Wir werden aber bald einsehen, daß diese zusätzlichen Bedingungen unnötig sind. Wir schließen wegen (3.2) aus 3.6.

3.7 Lemma. a) *Es sei $\tilde{\pi}$ die zu π kontragrediente Darstellung. Dann ist die $\tilde{\pi}$-Komponente $\mathcal{D}(\tilde{\pi}, \omega)$ genau dann nicht Null, wenn für π der Bedingung in 3.6 gilt.*

b) *Es sei $\pi \in \mathrm{Coh}_e(1)$. Dann ist $\mathcal{D}(\pi, \omega)$ nur dann nicht Null, wenn $\chi_\pi = \omega^{-1}$. Dann ist $\mathrm{d}(\pi, \omega) = 1$.*

Wir untersuchen jetzt die in 3.6 auftretende Bedingung. Wir bemerken, daß 3.6 genau dann bezüglich des Charakters ω gilt, wenn für $\pi \otimes \omega'$ die Bedingung bezüglich des trivialen Charakters gilt; hier ist ω' natürlich wieder eine Fortsetzung von ω. Wir bemerken, daß diese Verträglichkeit mit Twisten genau mit der in 2.7.1 notierten Verträglichkeit zusammenpaßt. Diese Verträglichkeit erlaubt uns Reduktionen, die wir in den folgenden Beweisen oft stillschweigend vornehmen werden.

Es sei

$$I = \mathrm{Ind}_{H(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})} \omega^{-1}.$$

Der Operator

$$T : f \to f' : g \to \int\limits_{H(\mathbf{Q})Z(\mathbf{R})\backslash H(\mathbf{A})} \omega(\det h) \cdot f(hg) dh$$

ist, falls π auf $Z(\mathbf{R})$, dem Zentrum von $H(\mathbf{R})$, gleich ω^{-2} ist, ein Verkettungsoperator zwischen π und I. Wir wollen ihn für eine beliebige cuspidale Darstellung betrachten, wobei ω nicht mehr von einem Galoischarakter herkommen muß. Es sei I_p die entsprechende lokale Darstellung

$$I_p = \mathrm{Ind}_{H(\mathbf{Q}_p)}^{G(\mathbf{Q}_p)} \omega_p^{-1}.$$

Man sieht unschwer ein, daß T nur dann nicht Null sein kann, wenn

$$\mathrm{Hom}_{G(\mathbf{Q}_p)}(\pi_p, I_p) \neq 0$$

für jedes p.

In dem folgenden Satz übertragen wir in offensichtlicher Weise den Begriff einer ausgezeichneten automorphen Form (siehe 2.7) auf *unendlich-dimensionale* Darstellungen der lokalen Gruppe $G(\mathbf{Q}_p)$.

3.8 Satz. a) *Für jede zulässige irreduzible unendlich-dimensionale Darstellung π_p gilt*

$$d(\pi_p) \underset{\mathrm{Df.}}{=} dim\, \mathrm{Hom}_{G(\mathbf{Q}_p)}(\pi_p, I_p) \leqq 1.$$

b) *Falls $d(\pi_p) > 0$, so ist die Einschränkung des Zentrumcharakters ω_{π_p} auf $\mathbf{Q}_p$ gleich ω_p^{-2}.*

c) Falls p zerfällt oder falls π_p in der Hauptreihe liegt, ist $d(\pi_p)$ nur dann gleich 1, falls π_p ausgezeichnet (bezüglich ω_p^{-1}) ist.

Die Behauptung b) ist trivial. Für den Beweis von c) werden wir einen Ansatz von L. Clozel verwenden. Es sei $\omega = 1$. Falls p zerfällt, so ist $\pi_p = \pi_1 \otimes \pi_2$, wobei π_i Darstellungen von $GL(2, \mathbf{Q}_p)$ sind. Da $H(\mathbf{Q}_p)$ diagonal eingebettet ist, ist nach dem Frobeniusreziprozitätsgesetz

$$\mathrm{Hom}_{G(\mathbf{Q}_p)}(\pi_p, I_p) = \mathrm{Hom}_{GL(2,\mathbf{Q}_p)}(\pi_2, \tilde{\pi}_1).$$

Daraus folgen a) und c) in diesem Fall. Im weiteren sei p nicht zerfallend, insbesondere ist p endlich. Bevor wir den ernsthaften Teil des Beweises von 3.8 beginnen, bemerken wir, daß die Behauptung a) es uns ermöglicht, die zusätzlichen Bedingungen auf f und g in 3.6 zu eliminieren. In der Tat, falls $Tf \neq 0$ für ein $f \in \pi$, so ist auch $Tf \neq 0$ für ein f, das die Bedingungen a) und b) nach 3.6 erfüllt. Weil $d(\pi_\infty) = 1$, folgt jetzt $Tf|G(\mathbf{A}_f) \neq 0$.

Beweis von 3.8, a). Aus dem Frobeniusreziprozitätsgesetz folgt

$$\mathrm{Hom}_{G(\mathbf{Q}_p)}(\pi_p, I_p) \cong \mathrm{Hom}_{H(\mathbf{Q}_p)}(\pi_p, \omega_p^{-1}).$$

Wir benutzen das Kirillovmodell der Darstellung π_p [19]. In diesem Modell operiert π_p auf einem Raum $\mathfrak{H}$ von Funktionen auf F_p, der den Raum $\mathcal{S}(F_p^\times)$ der Schwartz-Bruhat-Funktionen mit endlicher Kodimension enthält. Das Modell ist bezüglich eines nichttrivialen Charakters ψ von F_p definiert. Wir nehmen an, daß $\psi|\mathbf{Z}_p$ trivial ist. Dann ist

$$\pi_p\left(\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) f(x) = \psi(nx) \cdot f(x).$$

Es sei $0 \neq L \in \mathrm{Hom}_{H(\mathbf{Q}_p)}(\pi_p, \omega_p^{-1})$. Dann ist $L|\mathcal{S}(F_p^\times) \neq 0$. In der Tat wäre sonst L invariant under $H(\mathbf{Q}_p)$ und

$$N_0(F_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| n \in F_p \right\},$$

und somit unter $SL(2, F_p)$. Das ist unmöglich.

Es sei

$$B_0(\mathbf{Q}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{Q}_p) \right\}.$$

Es genügt zu zeigen:

$$\mathrm{Hom}_{B_0(\mathbf{Q}_p)}\big(\mathcal{S}(F_p^\times), 1\big) = \mathbf{C}.$$

Falls $x \in F_p, x \notin \mathbf{Q}_p$, so gibt es ein $n \in \mathbf{Q}_p$, so daß $\psi(nx) \neq 1$. Folglich ist die Einschränkungsabbildung ein Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{B_0(\mathbf{Q}_p)}\big(\mathcal{S}(F_p^\times), 1\big) \cong \mathrm{Hom}_{B_0(\mathbf{Q}_p)}\big(\mathcal{S}(\mathbf{Q}_p^\times), 1\big).$$

Die letzte Gruppe ist erzeugt durch

$$f \to \int\limits_{\mathbf{Q}_p^\times} f\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d^\times x.$$

Beweis von 3.8, c). Es sei $\pi_p = \pi(\mu, \nu)$, wobei μ, ν einen Charakter der Boreluntergruppe $B_0(F_p)$ definiert

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \to \mu(a) \cdot \nu(c).$$

Die Darstellung π_p ist Bestandteil der induzierten Darstellung $\rho(\mu, \nu)$. Die Gruppe $GL(2, \mathbf{Q}_p)$ operiert auf $\mathbf{P}^1(F_p) = B_0(F_p)\backslash GL(2, F_p)$. Es gibt zwei Bahnen:

$$\{x \in \mathbf{P}^1(F_p) | x = \bar{x}\} = B_0(\mathbf{Q}_p)\backslash GL(2, \mathbf{Q}_p)$$

und

$$\{x \in \mathbf{P}^1(F_p) | x \neq \bar{x}\} = T(\mathbf{Q}_p)\backslash GL(2, \mathbf{Q}_p).$$

Dabei ist

$$T = B \cap \bar{B}$$

ein über $\mathbf{Q}_p$ definierter nicht zerfallender Torus, und B ist eine über F_p definierte Boreluntergruppe mit $\bar{B} \neq B$. Die erste Bahn ist abgeschlossen. Durch Einschränken der Funktionen aus $\rho(\mu, \nu)$ auf diese Bahn erhalten wir eine exakte Sequenz von $GL(2, \mathbf{Q}_p)$-Moduln:

$$0 \to \rho'(\mu, \nu) \to \rho(\mu, \nu) \to \rho(\mu_0 \cdot \alpha_0^{\frac{1}{2}}, \nu_0 \cdot \alpha_0^{-\frac{1}{2}}) \to 0.$$

Dabei sind μ_0, ν_0 die Einschränkungen von μ, ν auf $\mathbf{Q}_p$ und α_0 der Absolutbetrag auf $\mathbf{Q}_p$. Wir haben benutzt, daß für $x \in \mathbf{Q}_p$, und falls α den Absolutbetrag auf F_p bezeichnet, $\alpha(x) = \alpha_0^2(x)$. Da unter der Identifikation

$$T(\mathbf{Q}_p) = \{(t, \bar{t}) | t \in F_p^\times\}$$

die Einschränkung des Charakters μ, ν aud $T(\mathbf{Q}_p)$ gleich $\chi : t \in F_p^\times \to \mu(t) \cdot \bar{\nu}(t)$ wird, können wir $\rho'(\mu, \nu)$ mit einer induzierten Darstellung identifizieren:

$$\rho'(\mu, \nu) = \mathrm{Ind}_{T(\mathbf{Q}_p)}^{GL(2, \mathbf{Q}_p)} \chi.$$

Zunächst ist klar:

$$\mathrm{Hom}_{GL(2,\mathbf{Q}_p)}\big(\rho(\mu_0\alpha_0^{\frac{1}{2}},\nu_0\alpha_0^{-\frac{1}{2}}),1\big)=\begin{cases}\mathbf{C}, & \text{falls } \mu_0=\nu_0=1,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}\tag{3.8.1}$$

$$\mathrm{Hom}_{GL(2,\mathbf{Q}_p)}\big(\rho'(\mu,\nu),1\big)=\begin{cases}\mathbf{C}, & \text{falls } \mu\cdot\tilde{\nu}=1,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}\tag{3.8.2}$$

Indem wir notfalls μ und ν vertauschen, dürfen wir annehmen, daß π_p ein Quotient von $\rho(\mu,\nu)$ ist. Aus $d(\pi_p)>0$ folgt somit

$$\mathrm{Hom}_{GL(2,\mathbf{Q}_p)}\big(\rho(\mu,\nu),1\big)\neq 0.$$

Folglich ist $\mu_0=\nu_0=1$ oder $\mu\cdot\bar{\nu}=1$. Falls $\mu\cdot\bar{\nu}=1$, so sei π_p^0 die Liftung von $\pi(1,\mu_0^{-1}\cdot\varepsilon_p)$. Wegen $\nu(x)=\mu(x)\cdot\mu_0^{-1}(x\cdot\bar{x})$ ist $\pi(\mu,\nu)=\pi_p^0\otimes\mu$ ausgezeichnet. Falls $\mu_0=\nu_0=1$, so gibt es einen Charakter λ von $F_p^\times$, so daß $\mu(x)\cdot\nu^{-1}(\bar{x})=\lambda\begin{pmatrix}\bar{x}\\ x\end{pmatrix}$, d.h.

$$\mu\cdot\lambda(x)=\nu\cdot\lambda(\bar{x}).$$

Es sei $\theta=\mu\cdot\lambda$ und $\pi(\theta)$ die entsprechende Darstellung von $GL(2,\mathbf{Q}_p)$. Dann gilt, falls π_p^0 die Liftung von $\pi(\theta)$ bezeichnet, $\pi(\mu,\nu)=\pi_p^0\otimes\lambda^{-1}$. Das Produkt von ε_p und dem Zentrumscharakter von $\pi(\theta)$ ist gleich $\theta|_{\mathbf{Q}_p^\times}=\lambda|_{\mathbf{Q}_p^\times}$, weil $\mu_0=1$. Folglich ist π_p ausgezeichnet. q.e.d.

Es it zu vermuten, daß die Behauptung c) für alle π_p gilt. In dieser Richtung haben wir folgendes Resultat.

3.9 Satz. *Die Konklusion von 3.8* c) *gilt auch, falls π_p speziell ist.*

Es gilt auch die Umkehrung:

3.10 Satz. *Wenn π_p ausgezeichnet ist, so ist $d(\pi_p)=1$.*

Weil wir diese beiden Behauptungen nicht im Beweis unserer Hauptsätze benutzen werden, verschieben wir die Beweise auf den Schluß dieses Abschnitts.

Wir kommen nun zu weiteren globalen Aussagen, aber zunächst wollen wir eine kleine Vorbemerkung machen. Wir haben als L-Gruppe ${}^LG$ die Gruppe

$$GL_2(\mathbf{C})\times GL_2(\mathbf{C})\times\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}).$$

Wir können also jeden Galoischarakter

$$\omega:\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})^{\mathrm{ab}}\to\mathbf{C}^\times$$

auch als eindimensionale Darstellung der L-Gruppe interpretieren, insbesondere können wir auch die L-Funktion $L(s,\pi,r\cdot\omega)$ betrachten. Wir bemerken, daß für $\pi\in\mathrm{Coh}_0(\mu)$ und im Hinblick auf Satz 2.4 gilt (siehe 2.4.1)

$$L(s,\pi,r\cdot\omega)=L(s,\pi\otimes\omega',s)=L\big(s,\omega\cdot\rho(\pi)\big).$$

Die folgenden Sätze implizieren 2.8 a) und die Gleichheit der ersten beiden Zahlen in 2.9. Die Aussage 2.8 b) wird in §4 bewiesen.

3.11 Satz. *Es sei ω ein Galoischarakter auf $\mathbf{I_Q}/\mathbf{Q}^\times$. Es sei π eine cuspidale automorphe Darstellung, deren Zentrumscharakter auf $Z(\mathbf{R})=\mathbf{R}^\times$ eingeschränkt gleich ω^{-2} ist. Der globale Verkettungsoperator*

$$T:f\to Tf(g)=\int\limits_{H(\mathbf{Q})Z(\mathbf{R})\backslash H(\mathbf{A})}\omega(\det h)\cdot f(hg)dh$$

ist genau dann nicht Null, wenn π ausgezeichnet bezüglich ω^{-1} ist.

3.12 Satz. *Es sei π eine cuspidale automorphe Darstellung, deren Zentrumscharakter auf $\mathbf{I_Q}/\mathbf{Q}^\times$ von der Form $\omega^{-2}\alpha_{\mathbf{Q}}^{-2n}$ ist, mit einem Galoischarakter ω. Ferner liege π_∞ in der diskreten Reihe. Es sei Q eine endliche Menge von Primstellen, die die unendlichen Primstellen und alle Verzweigungsstellen von π enthält. Die Funktion $L_{\mathbf{Q}}(s,\pi,r\cdot\omega)$ ist fortsetzbar auf eine Umgebung von $s=n+1$. Sie hat dort einen Pol erster Ordnung, wenn π ausgezeichnet bezüglich $\alpha^{-n}\omega^{-1}$ ist. Sonst ist $s=n+1$ weder ein Pol noch eine Nullstelle.*

Wenn wir π mit $\alpha^{\frac{n}{2}}$ twisten, verschieben wir in der L-Funktion s in $s+n$. Diese Bemerkung und die vorangehenden Überlegungen erlauben die Reduktion auf den Fall $\omega=1,n=0$. Wir werden 3.11 und 3.12 aus dem folgenden Satz ableiten.

3.13 Satz. *Es sei π eine cuspidale automorphe Darstellung, deren Zentrumscharakter trivial auf $Z(\mathbf{A})$ ist. Ferner liege π_∞ in der diskreten Reihe.*

a) *Die Funktion $L_Q(s,\pi,r)$ ist analytisch fortsetzbar auf eine Umgebung von $s=1$.*

b) *Sie hat dort einen Pol genau dann, wenn der Verkettungsoperator T (mit $\omega=1$) auf π nicht Null ist.*

Ableitung von 3.11 *und* 3.12 *aus* 3.13. Falls $T\neq 0$, so schließen wir aus der lokalen Untersuchung, daß $\bar\pi_p\cong\tilde\pi_p$ für fast jedes p. Daher gilt $\bar\pi\cong\tilde\pi=\pi\bigotimes\omega_\pi^{-1}$. Es gibt einen Größencharakter ν' von $\mathbf{I}_F$, so daß

$$\omega_\pi(x)=\frac{\nu'(\bar x)}{\nu'(x)}.$$

Wir setzen $\pi^0=\pi\bigotimes\nu'$. Dann gilt $\bar\pi^0\cong\pi^0$ und folglich [24] ist π^0 die Liftung einer Darstellung $\pi^0_{\mathbf{Q}}$.

Als L-Gruppe von H wählen wir das direkte Produkt

$$^{L}H = GL(2, \mathbf{C}) \times \mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}).$$

Liftungen entsprechen im Sinn des Funktorialitätsprinzips dem Homomorphismus

$$\phi : {}^{L}H \to {}^{L}G : A \times \sigma \to A \times A \times \sigma.$$

Da $r \circ \phi = r_1 \bigoplus r_2$ mit

$$r_1(A \times \sigma) = \varepsilon(\sigma) \cdot \det A,\ r_2(A \times \sigma) = \mathrm{Sym}^2 A,$$

ist

$$L_Q(s, \pi^0, r) = L_Q(s, \omega_{\pi^0_{\mathbf{Q}}} \cdot \varepsilon) \cdot L_Q(s, \pi^0_{\mathbf{Q}}, r_2).$$

Wir setzen im folgenden $\omega_{\pi^0_{\mathbf{Q}}} = \omega^0_{\mathbf{Q}}$. Es sei ν die Einschränkung von ν' auf $\mathbf{I_Q}$. Dann gilt

$$L_Q(s, \pi, r) = L_Q(s, \pi^0, r \cdot \nu^{-1}) = L_Q(s, \omega^0_{\mathbf{Q}} \cdot \varepsilon \cdot \nu^{-1}) \cdot L_Q(s, \pi^0_{\mathbf{Q}}, r_2 \cdot \nu^{-1}).$$

Der zweite Faktor auf der rechten Seite tritt in der Arbeit [12] auf. Dort wird gezeigt, daß, falls $\pi^0_{\mathbf{Q}}$ nicht von dem Größencharakter einer quadratischen Erweiterung herkommt, der zweite Faktor ganz ist. (Genau genommen steht in [12], Theorem 9.3 eine andere Bedingung; daß diese Bedingung äquivalent zu der hier genannten ist, folgt aus [21], Proposition 6.5.) Nun ist $L_{\mathbf{Q}}(s, \pi^0_{\mathbf{Q}}, r_2 \cdot \nu^{-1})$ die "gewöhnliche" L-Funktion einer automorphen Form auf $GL(3)$, und nach den Resultaten in [20] hat sie bei $s = 1$ keine Nullstelle. Falls also $T \neq 0$, so folgt aus 3.13 b), daß $L_Q(s, \omega^0_{\mathbf{Q}} \cdot \varepsilon \cdot \nu^{-1})$ einen Pol in $s = 1$ hat. Folglich ist $\omega^0_{\mathbf{Q}} \cdot \varepsilon \cdot \nu^{-1}$ trivial und π ausgezeichnet. Ist umgekehrt π ausgezeichnet, d.h. $\pi = (\pi^0_{\mathbf{Q}} \times F) \bigotimes \nu'^{-1}$ und ist $\pi^0_{\mathbf{Q}}$ nicht von der Form $\pi(\theta)$, dann zeigen unsere Formeln für die L-Funktion und die obigen Überlegungen, daß bei $s = 1$ ein Pol vorliegt.

Wir wollen nun voraussetzen, daß π ausgezeichnet ist, aber $\pi^0_{\mathbf{Q}} = \pi(\theta)$ ist, wobei θ ein Größencharakter einer quadratischen Erweiterung E von $\mathbf{Q}$ ist; dann entspricht $\pi(\theta)$ einem Homomorphismus der Weilgruppe nach ${}^{L}H$. Falls es nur ein solches E gibt, so ist

$$L_Q(s, \pi, r) = L_Q(s, \theta_0 \varepsilon \cdot \eta \cdot \nu^{-1}) \cdot L(s, \theta_0 \nu^{-1}) \cdot L(s, r'),$$

wobei r' eine irreduzible 2-dimensionale Darstellung der Weilgruppe ist, so daß $L(1, r') \neq 0$. Hier bezeichnet θ_0 die Einschränkung von θ auf $\mathbf{I_Q}$ und η den der Erweiterung E entsprechenden Charakter.

Falls E nicht eindeutig bestimmt ist, so gibt es zwei andere Erweiterungen E', E'', so daß $\pi^0_{\mathbf{Q}} = \pi(\theta') = \pi(\theta'')$. Es gilt

$$\omega^0_{\mathbf{Q}} = \theta_0 \cdot \eta = \theta'_0 \cdot \eta' = \theta''_0 \cdot \eta''$$

und

$$L_Q(s,\pi,r) = L_Q(s,\omega^0_{\mathbf{Q}} \cdot \varepsilon \cdot \nu^{-1}) \cdot L_Q(s,\omega^0_{\mathbf{Q}} \cdot \eta \cdot \nu^{-1}) \cdot L_Q(s,\omega^0_{\mathbf{Q}} \cdot \eta' \cdot \nu^{-1}) \cdot L(s,\omega^0_{\mathbf{Q}} \cdot \eta'' \cdot \nu^{-1}).$$

In beiden Fällen hat kein Faktor der rechten Seite eine Nullstelle in $s = 1$. Somit hat $L_Q(s,\pi,r)$ einen Pol in $s = 1$, falls $\omega^0_{\mathbf{Q}} \cdot \varepsilon \cdot \nu^{-1} = 1$. Da π_∞ in der diskreten Reihe liegt, ist keine der Erweiterungen E, E', E'' gleich F. Der Pol ist daher erster Ordnung. Die erste Aussage von 3.11 ist damit vollständig bewiesen. Wir müssen noch umgekehrt zeigen, daß π ausgezeichnet ist, wenn ein Pol vorliegt. Wir haben ν' so gewählt, daß

$$\frac{\nu'(x)}{\nu'(\bar{x})} = \omega_\pi(x) = \omega^0_{\mathbf{Q}}(x \cdot \bar{x}) \cdot \nu'(x^{-2})$$

oder

$$\nu'(x \cdot \bar{x}) = \omega^0_{\mathbf{Q}}(x \cdot \bar{x}).$$

Folglich ist $\nu = \omega^0_{\mathbf{Q}} \cdot \varepsilon$ oder $\nu = \omega^0_{\mathbf{Q}}$. Im ersten Fall ist π ausgezeichnet, im zweiten Fall liegt kein Pol vor.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $L_Q(s,\pi,r)$ keine Nullstelle in $s = 1$ hat, wenn π nicht ausgezeichnet ist. Man sieht unschwer ein, daß

$$L_Q(s,\pi,r) \cdot L(s,\pi,r \cdot \varepsilon) = L(s,\pi \times \bar{\pi}).$$

Rechts steht hier die von Jacquet in [18] betrachtete L-Funktion. Weil $\omega = 1$, ist π unitär. Folglich [12] hat diese Funktion genau dann einen Pol in $s = 1$, wenn $\bar{\pi} \sim \tilde{\pi}$, und dieser Pol ist dann erster Ordnung. Sonst ist sie dort analytisch und nicht Null [31]. Es sei ε' eine Erweiterung von ε auf $\mathbf{F}^\times \backslash \mathbf{I}_F$. Dann ist

$$L(s,\pi,r \cdot \varepsilon) = L(s,\pi \otimes \varepsilon', r).$$

Wenn $L(s,\pi,r)$ eine Nullstelle in $s = 1$ hat, so hat $L(s,\pi \bigotimes \varepsilon', r)$ einen Pol in $s = 1$. Folglich ist $\pi \bigotimes \varepsilon'$ ausgezeichnet, also $\bar{\pi} \bigotimes \bar{\varepsilon}' \cdot \varepsilon' \cong \tilde{\pi}$ und $\bar{\pi} \sim \tilde{\pi}$, weil $\bar{\varepsilon}' \cdot \varepsilon' = 1$. Mit den oben erwähnten Tatsachen beendet man jetzt leicht den Beweis.

Beweis von 3.13. Die analytische Fortsetzbarkeit wird mit dem Rankin-Trick wie in [1] bewiesen. Daher werden wir im Beweis uns mehr auf b) konzentrieren.

Wir beginnen mit einer lokal konstanten Funktion G auf $L_\infty \prod_p L_p$ mit $L_p = GL(2, \mathbf{Z}_p)$ und setzen sie in eindeutig bestimmter Weise in eine Funktion $G(h,s)$, $s \in \mathbf{C}$, auf $H(\mathbf{A})$ fort, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(I) $G(b \cdot h, s) = \left|\frac{b_1}{b_2}\right|^{\frac{s+1}{2}} \cdot G(h,s)$, falls $b = \begin{pmatrix} b_1 & u \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in B_0(\mathbf{A})$ und $h \in L_\infty \prod_p L_p$.

(II) $G(\cdot, s)$ ist rechtsendlich bezüglich L_∞ und $\prod_p L_p$.

Wir bilden die entsprechende Eisensteinreihe

$$E(h, 2s-1) = \sum_{a \in B_0(\mathbf{Q}) \backslash H(\mathbf{Q})} G(a \cdot h, 2s-1).$$

Wenn sie einen Pol in $s = 1$ hat, ist dies ein Pol erster Ordnung und ihr Residuum eine konstante Funktion in der Variablen h.

Daher ist der Verkettungsoperator nichttrivial genau dann, wenn für ein f aus π die Funktion

$$\Phi : s \to \int_{H(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash H(\mathbf{A})} f(h) \cdot E(h, 2s-1) dh$$

einen Pol in $s = 1$ hat. Wir haben benutzt, daß $\pi(g) f(h) = f(hg)$.

Wir führen die üblichen Umformungen durch. Zunächst liefert Vertauschen von Integration and Summation

$$\Phi(s) = \int_{B_0(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash H(\mathbf{A})} f(h) \cdot G(h, 2s-1) dh.$$

Wir wählen einen nichttrivialen Charakter ψ auf $F \backslash \mathbf{A}_F$ und somit auf $N_0(F) \backslash N_0(\mathbf{A}_F)$, der trivial auf $\mathbf{A}_\mathbf{Q}$ ist und entwickeln f in eine Fourierreihe. Weil π cuspidal ist, erhalten wir eine Summe über $F^\times$ ([13], §3, 5). Wir integrieren zunächst über $N_0(\mathbf{Q}) \backslash N_0(\mathbf{A})$. Wegen der Wahl von ψ verschwinden alle Glieder, die zu einem Element $a \in F \backslash \mathbf{Q}$ gehören. Den Rest können wir in der Form

(3.13.1) $$\int_{N_0(\mathbf{A})Z(\mathbf{A})\backslash H(\mathbf{A})} W(h) \cdot G(h, 2s-1) dh.$$

schreiben, wobei W im Whittakermodell von π liegt. Das Integral (3.13.1) ist bei passender Wahl von f und G bis auf einen konstanten Faktor ein Produkt von lokalen Integralen.

(3.13.2) $$\Phi_p(s) = \int_{N_0(\mathbf{Q}_p)Z(\mathbf{Q}_p)\backslash H(\mathbf{Q}_p)} W_p(h) \cdot G_p(h, 2s-1) dh.$$

Die unendliche Stelle ist zugelassen. Diese Integrale wollen wir einzeln untersuchen. Aus der Beschreibung des asymptotischen Verhaltens der Funktion W_p ([13], §3, 4) folgt leicht, daß das Integral für $\operatorname{Re} s > 0$ konvergiert. In diesem Gebiet ist Φ_p analytisch.

Mit der Iwasawazerlegung können wir schreiben

$$\Phi_p(s) = \int\limits_{\mathbf{Q}_p^\times} |t|^{s-2} \int\limits_{L^p} W_p\Bigg(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot l \Bigg) \cdot G(l) dl\, dt.$$

Zunächst sei p unendlich, so daß π_p in der diskreten Reihe liegt. Das Whittakermodell von π_p ist das Tensorprodukt von zwei Whittakermodellen von $GL(2, \mathbf{R})$. Folglich [13] gibt es eine Funktion W_p, die invariant under L_∞ ist, und so daß

$$W_p\Bigg(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg) = \begin{cases} t_1^{k_1} \cdot t_2^{k_2} \cdot e^{-2\pi(t_1+t_2)}, & \text{falls } t = (t_2, t_2) \text{ mit } t_1 > 0, t_2 > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist $k_1 \geqq 1, k_2 \geqq 1$. Somit ist bis auf eine Konstante

$$\Phi_p(s) = \int\limits_0^\infty t^{k_1+k_2+s-2} \cdot e^{-t} dt = \Gamma(k_1 + k_2 + s - 1).$$

Insbesondere ist $\Phi_p(1) \neq 0$. Wenn p endlich ist, können wir W_p so wählen, daß

$$W_p\Bigg(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg)$$

eine beliebige vorgegebene Schwartz-Bruhat-Funktion auf $F_p^\times$ ist. Weil W_p lokal konstant ist und $G(l)$ eine beliebige Funktion auf $B_0(\mathbf{Z}_p)\backslash GL(2, \mathbf{Z}_p)$, können wir annehmen

$$\int\limits_{L_p} W_p\Bigg(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot l \Bigg) \cdot G(l) dl = W_p\Bigg(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg).$$

Bei zweckmäßiger Wahl von W_p ist $\Phi_p(1) \neq 0$. Das folgende Lemma beendet den Beweis.

3.14 Lemma. *Es sei p endlich und π_p eine unverzweigte Darstellung mit $\omega_{\pi_p}|\mathbf{Q}_p^\times = 1$. Es sei W_p unter $GL(2, \mathcal{O}_{F_p})$ invariant und $G(\cdot, 2s-1)$ unter L_p invariant. Dann ist bis auf eine nichtverschwindende Konstante*

$$\Phi_p(s) = \frac{L(s, \pi_p, r)}{L(2s, 1)}.$$

Die Konstanten sind belanglos, sie hängen zum Beispiel von der Wahl der Maße ab. Ihr Produkt konvergiert. Mit unseren Voraussetzungen ist, abgesehen von einer Konstanten,

$$\Phi_r(s) = \int\limits_{\mathbf{Q}_p^\times} W_p\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot |t|^{s-2} dt.$$

Wenn p nicht zerfällt, ist dieses Integral bis auf eine Konstante gleich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n(s-1)}} = \frac{1}{(1-\frac{\alpha}{p^s})\cdot(1-\frac{\beta}{p^s})},\ a_n = W_p\left(\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

wobei $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbf{C})$ die der Darstellung π_p der Gruppe $GL(2,F_p)$ entsprechende Konjugationsklasse ist. Die Gleichheit folgt aus der Hecketheorie ([19], S. 75, 106). Andererseits berechnet man leicht

$$L(s,\pi_p,r) = \frac{1}{(1-\frac{\alpha}{p_s})\cdot(1-\frac{\alpha\beta}{p^{2s}})\cdot(1-\frac{\beta}{p^s})}.$$

Die Behauptung folgt für diesen Fall, weil nach Voraussetzung $\alpha\beta = 1$.

Wenn p zerfällt, so ist

$$W_p\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = a'_{n_1} \cdot a''_{n_2},$$

falls $t = (p^{n_1}, p^{n_2}), n_1 \geqq 0, n_2 \geqq 0$. Das Integral ist gleich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a'_n \cdot a''_n}{p^{n(s-1)}}. \tag{3.14.1}$$

Es sei $\pi_p = \pi'_{\mathfrak{p}'} \otimes \pi''_{\mathfrak{p}'}$, wobei $\pi'_{\mathfrak{p}'} \sim \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix}$ und $\pi''_{\mathfrak{p}''} \sim \begin{pmatrix} \alpha'' & 0 \\ 0 & \beta'' \end{pmatrix}$. Die Hecketheorie liefert wieder

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a'_n}{p^{n(s-\frac{1}{2})}} = \frac{1}{(1-\frac{\alpha'}{p^s})\cdot(1-\frac{\beta'}{p^s})},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha''_n}{p^{n(s-\frac{1}{2})}} = \frac{1}{(1-\frac{\alpha''}{p^s})\cdot(1-\frac{\beta''}{p^s})}.$$

Aus der erfrischenden Übungsaufgabe auf S. 33 in [18] erhalten wir, daß (3.14.1) gleich ist zu

$$\frac{1-\frac{\alpha'\alpha''\beta'\beta''}{p^{2s}}}{(1-\frac{\alpha'\alpha''}{p^s})\cdot(1-\frac{\alpha'\beta''}{p^s})\cdot(1-\frac{\beta'\alpha''}{p^s})\cdot(1-\frac{\beta'\beta''}{p^s})} = \frac{L(s,\pi_p,r)}{L(2s,1)},$$

weil $\alpha'\alpha''\beta'\beta'' = 1$. q.e.d.

Wir beenden diesen Abschnitt mit den Beweisen der Sätze 3.9 und 3.10. Beide Sätze sind für zerfallendes p bereits bewiesen.

Beweis von 3.10. Falls π_p ausgezeichnet (bezüglich 1) ist, so folgt $\omega_{\pi_p}|\mathbf{Q}_p^\times = 1$ und $\bar{\pi}_p \cong \tilde{\pi}_p$. Wir betrachten zunächst den Fall, daß $\pi_p = \pi(\mu,\nu)$ in der Hauptreihe oder $\pi_p = \sigma(\mu,\nu)$ speziell ist. Falls π_p in der Hauptreihe liegt, so haben obige Relationen die Gültigkeit einer der beiden folgenden Bedingungen zur Folge:

a) $\mu_0 \cdot \nu_0 = 1$ und $\pi(\bar{\mu},\bar{\nu}) = \pi(\mu^{-1},\nu^{-1})$,

b) $\mu_0 \cdot \nu_0 = 1$ und $\pi(\bar{\mu},\bar{\nu}) = \pi(\nu^{-1},\mu^{-1})$.

Falls π_p speziell ist, so gilt b). Wir nehmen zuhächst an, daß a), aber nicht b) gilt. Weil π_p ausgezeichnet ist, $\pi_p = \pi_p^0 \otimes \lambda^{-1}$, ist die Darstellung, deren Liftung π_p^0 ist, von der Form $\pi(\mu^0,\nu^0)$ oder $\pi(\theta)$, wobei im ersten Fall $\lambda|\mathbf{Q}_p^\times = \mu^0\nu^0 \cdot \varepsilon_p$ und $\mu(x) = \mu^0(x\cdot\bar{x})\cdot\lambda(x^{-1}), \nu(x) = \nu^0(x\cdot\bar{x})\cdot\lambda(x^{-1})$, also $\mu\cdot\bar{\nu} = 1$, was ausgeschlossen ist. Im zweiten Fall ist $\theta\cdot\lambda^{-1}|\mathbf{Q}_p^\times = 1$, also $\mu_0 = \nu_0 = 1$. Aber dann ist offensischtlich $d(\pi_p) > 0$.

Im weiteren dürfen wir also annehmen, daß b) gilt. Wir verwenden die im Beweis von 3.8 eingeführten Bezeichnungen. Wir müssen ein nichttriviales Element L aus

$$\mathrm{Hom}_{GL(2,\mathbf{Q}_p)}\big(\rho'(\mu,\nu),1\big)$$

auf $\rho(\mu,\nu)$ erweitern, und zwar so, daß diese Linearform unter $GL(2,\mathbf{Q}_p)$ invariant ist und, im Falle der speziellen Darstellung $\pi_p = \sigma(\mu,\nu)$, die wir als *Untermodul* von $\rho(\mu,\nu)$ auffassen, ein nichttriviales Element aus $\mathrm{Hom}_{GL(2,\mathbf{Q}_p)}\big(\sigma(\mu,\nu),1\big)$ induziert. Wir deuten den Beweis nur an.

Wir teilen durch den Kern von L und erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \to 1 \to \rho'' \to \rho(\mu_0\alpha_0^{\frac{1}{2}},\nu_0\alpha_0^{-\frac{1}{2}}) \to 0.$$

Wir wenden den Jacquet-Funktor an, der einer Darstellung von $GL(2,\mathbf{Q}_P)$ den größten Quotienten, auf dem $N_0(\mathbf{Q}_p)$ trivial operiert, zuordnet. Auf diesem Quotienten operiert $M_0(\mathbf{Q}_p) = B_0(\mathbf{Q}_p)/N_0(\mathbf{Q}_p)$. Nach dem Reziprozitätsgesetz von Casselman [9] gilt

$$\mathrm{Hom}_{GL(2,\mathbf{Q}_p)}\big(\rho'',\rho(\alpha_0^{-\frac{1}{2}},\alpha_0^{\frac{1}{2}})\big) = \mathrm{Hom}_{M_0(\mathbf{Q}_p)}(\rho''_N,1).$$

Die in ρ''_N auftretenden Charaktere sind (1, 1), $(\mu_0\cdot\alpha_0,\nu_0\cdot\alpha_0^{-1}), (\mu_0,\nu_0)$. Wir können annehmen, daß $(\mu_0,\nu_0) \neq (1,1)$, sonst wären wir im eben erledigten Fall. Indem wir notfalls μ und ν vertauschen, können wir annehmen, daß $(\mu_0\alpha_0, \nu_0\alpha_0^{-1}) \neq (1,1)$ und $(\mu_0\alpha_0, \nu_0\alpha_0^{-1}) \neq (\alpha_0^{-1}, \alpha_0)$. Wegen der ersten Ungleichheit gibt es genau ein Element L'' aus

$$\mathrm{Hom}_{GL(2,\mathbf{Q}_p)}\big(\rho'', \rho(\alpha_0^{-\frac{1}{2}}, \alpha_0^{\frac{1}{2}})\big),$$

das L induziert. Hier deuten wir den trivialen Modul als Untermodul von $\rho(\alpha_0^{-\frac{1}{2}}, \alpha_0^{\frac{1}{2}})$. Wegen der zweiten Ungleichung ist $(\alpha_0^{-1}, \alpha_0)$ kein Charakter von ρ''_N, und das Reziprozitätsgesetz liefert

$$\mathrm{Hom}_{GL(2,\mathbf{Q}_p)}\big(\rho'', \rho(\alpha_0^{\frac{1}{2}}, \alpha_0^{-\frac{1}{2}})\big) = 0.$$

Daher liegt das Bild von L'' im trivialen Untermodul. Damit ist die Behauptung für $\pi_p = \pi(\mu,\nu)$ bewiesen.

Falls $\pi_p = \sigma(\mu,\nu)$ ist, so ist L'' genau dann auf $\sigma(\mu,\nu)$ trivial, wenn es einen $GL(2,\mathbf{Q}_p)$-Homomorphismus des 1-dimensionalen Quotienten $\rho(\mu,\nu)/\sigma(\mu,\nu)$ auf den trivialen Modul gibt. Das bedeutet $\mu_0 = \alpha_0$. Aber $\pi_p = \pi_p^0 \otimes \lambda^{-1}$ ist ausgezeichnet, und π_p^0 ist die Liftung einer speziellen Darstellung $\sigma(\mu^0,\nu^0)$. Dabei ist $\frac{\mu}{\nu} = \alpha$, $\frac{\mu^0}{\nu^0} = \alpha_0$ und damit $\mu(x) = \mu^0(x \cdot \bar{x}) \cdot \lambda^{-1}(x)$. Folglich ist für $x \in \mathbf{Q}_p^\times$

$$\mu_0(x) = \mu^0(x^2) \cdot \mu^0(x^{-1}) \cdot \nu^0(x^{-1}) \cdot \varepsilon_p(x) = \alpha_0(x) \cdot \varepsilon_p(x).$$

Um die Behauptung von 3.10 für supercuspidale π_p zu zeigen, genügt es wegen 3.11 nachzuweisen, daß π_p lokaler Bestandteil einer ausgezeichneten globalen cuspidalen Darstellung ist. Der Einfachheit halber sei $\omega_p = 1$. Es sei $\pi_p = \pi_p^0 \otimes \lambda_p^{-1}$, wobei die Einschränkung von λ_p auf $\mathbf{Q}_p^\times$ das Produkt ist von ε_p und dem Zentrumscharakter der Darstellung $\pi^0_{\mathbf{Q}_p}$, deren Liftung π^0 ist. Nach [24] existiert eine cuspidale Darstellung $\pi^0_{\mathbf{Q}}$ mit lokaler Komponente $\pi^0_{\mathbf{Q}_p}$, die im Unendlichen in der diskreten Reihe liegt. Wir können einen Größencharakter λ finden, der auf $\mathbf{I_Q}$ gleich $\omega^0_{\mathbf{Q}} \cdot \varepsilon$ ist und auf $F_p^\times$ gleich λ_p. Wir setzen $\pi = \pi^0 \otimes \lambda^{-1}$, wobei π^0 die Liftung von $\pi^0_{\mathbf{Q}}$ ist. q.e.d.

Beweis von 3.9. Wir nehmen an, daß $\pi_p = \sigma(\mu,\nu)$ ein *Quotient* von $\rho(\mu,\nu)$ ist. Dann folgt aus $d(\pi_p) > 0$, daß

$$\mathrm{Hom}_{GL(2,\mathbf{Q}_p)}\big(\rho(\mu,\nu), 1\big) \neq 0.$$

Somit ist $\mu_0 = \nu_0 = 1$ oder $\mu \cdot \bar{\nu} = 1$, also $\mu \cdot \bar{\nu} = 1$. Weil $\frac{\mu}{\nu} = \alpha$ folgt daher $\mu_0 = \alpha_0$ oder $\mu_0 = \alpha_0 \cdot \varepsilon_p$. Aber aus dem vorletzen Absatz des vorhergehenden Beweises folgt, daß, falls $d\big(\sigma(\mu,\nu)\big) > 0$ notwendigerweise gilt, $\mu_0 = \alpha_0 \cdot \varepsilon_p$. Somit existiert die Darstellung $\sigma(1, \mu_0^{-1} \cdot \varepsilon_p)$, und falls π_p^0 ihre Liftung ist, so ist $\sigma(\mu,\nu) \cong \pi_p^0 \otimes \mu$ ausgezeichnet. q.e.d.

§4. TATE-KLASSEN

Die Hauptaufgabe dieses Abschnitts besteht in dem Beweis des folgenden Satzes, der dem Satz 2.8 b) entspricht.

4.1 Satz. *Es sei* $\pi \in \mathrm{Coh}_0(\mu)$ *und* $n = n(\mu)$. *Es sei* ω *ein Charakter endlicher Ordnung auf* $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. *Dann ist* $\mathfrak{t}(\pi, \omega) = 0$ *oder* 1 *und* $\mathfrak{t}(\pi, \omega) = 1$ *genau dann, wenn* π *ausgezeichnet bezüglich* $\alpha^{-n}\omega^{-1}$ *ist.*

Die Bemerkungen 2.4.1 und 2.7.1 zeigen uns, daß wir uns auf den Fall $\omega = 1$ zurückziehen können. Wir wollen daher annehmen, daß $\omega = 1$ und setzen $\mathfrak{t}(\pi) = \mathfrak{t}(\pi, 1)$.

Unser entscheidendes Instrument bei der Untersuchung der Galoisdarstellung

$$\rho(\pi) : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to GL\big(X(\pi_f)\big)$$

besteht in der auf Oda zurückgehenden Beobachtung, daß man mit Hilfe des Cup-Produktes auf der Kohomologie eine quadratische Form auf $X(\pi_f)$ erhält, und daß man dann eine Reduktion der Operation der Galoisgruppe auf eine Gruppe von Ähnlichkeiten erhält. Auf diese Gruppe von Ähnlichkeiten lassen sich dann die Methoden von Ribet [28] und Serre [29] anwenden.

4.2. Um die oben genannte quadratische Form zu konstruieren, erinnern wir uns zunächst an die Konstruktion der l-adische Garben $\mathcal{V}$ auf $\bar{S}_K$. Wir gehen von einer über $\mathbf{Q}$ definierten rationalen Darstellung

$$\mu : G/\mathbf{Q} \to GL(\mathcal{V}_\mu)$$

aus. Auf $G/\mathbf{Q} = R_{F/\mathbf{Q}}\big(GL(F)\big)$ betrachten wir die eindimensionale Darstellung

$$\mathcal{D}(n) : G/\mathbf{Q} \to G_m/\mathbf{Q},$$

die auf den $\mathbf{Q}$-rationalen Punkten durch

$$x \to N_{F/\mathbf{Q}}\big(\det(x)\big)^n$$

gegeben ist. Dann gibt es bekanntlich eine nichtentartete Paarung

$$\mathcal{V}_\mu \times \mathcal{V}_\mu \to \mathcal{D}(n)$$

zwischen unseren Darstellungsmoduln. Diese Paarung liefert uns natürlich eine Paarung zwischen den l-adischen Garben auf $\bar{S}_K/\mathbf{Q}$

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{D}(n).$$

Dabei sind $\mathcal{V}$ und $\mathcal{D}(n)$ wieder die in 1.8 zitierten intermediären Erweiterungen der auf $S_K/\mathbf{Q}$ konstruierten Garben. Dann liefert uns das Cup-Produkt eine nichtentartete symmetrische Paarung

$$\mathbf{H}^2(\bar{S}_K \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V}) \times \mathbf{H}^2(\bar{S}_K \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V}) \to \mathbf{H}^4\big(\bar{S}_K \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{D}(n)\big).$$

(Bemerkung: Mit Hilfe der in 1.8 formulierten Resultate läßt sich diese Dualität auch leicht auf die Dualität

$$H^2(S_K \underset{\mathbf{Q}}{\times} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V}) \times H^2_c(S_K \underset{\mathbf{Q}}{\times} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V}) \to H^4_c\big(S_K \underset{\mathbf{Q}}{\times} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{D}(n)\big)$$

zurückführen.)

Wir zerlegen nun die Kohomologie in isotypische Komponenten bezüglich der Operation von $G(\mathbf{A}_f)$, und wir bekommen dann eine nichtentartete Paarung

$$H^2(\bar{S}_K \underset{\mathbf{Q}}{\times} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V})(\pi_f) \times \mathbf{H}^2(\bar{S}_K \underset{\mathbf{Q}}{\times} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{V})(\pi_f) \to \mathbf{H}^4\big(\bar{S}_K \underset{\mathbf{Q}}{\times} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{D}(n)\big)(\omega_{\pi_f} \circ \det).$$

Dabei ist natürlich ω_π der zentrale Charakter von π. Diese Behauptung ist eine ziemlich offensichtliche Konsequenz aus der Tatsache, daß $\mathbf{H}^4\big(\bar{S}_k \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{D}(n)\big)$ unter $G(\mathbf{A}_f)$ in eindimensionale isotypische Komponenten der Form $\lambda \circ \det$ zerfällt, der oben behaupteten Dualität zwischen den ganzen Moduln und der Formel $\tilde{\pi} = \pi \otimes \omega_\pi^{-1}$. Nun operiert die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ auf dem Modul $\mathbf{H}^4(\bar{S}_k \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{D}(n)\big)(\omega_{\pi_f} \circ \det)$. Diese Galoisgruppenoperation haben wir schon in 1.10 bestimmt; sie wird gegeben durch die Operation der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ auf den Komponenten von $S_K \underset{\mathbf{Q}}{\times} \bar{\mathbf{Q}}$, und diese Operation ist durch das folgende Diagramm bestimmt:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I}_{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}^\times & \longrightarrow & \mathbf{I}_F/F^\times \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})^{\mathrm{ab}} & & \pi_0(S_K \underset{\mathbf{Q}}{\times} \bar{\mathbf{Q}}). \end{array}$$

Dann sieht man also, weil $\mathcal{D}(n)$ auf den Komponenten die triviale Garbe ist, daß als Galoismodul

$$\mathbf{H}^4\big(\bar{S}_K \underset{\mathbf{Q}}{\times} \bar{\mathbf{Q}}, \mathcal{D}(n)\big)(\omega_{\pi_f} \circ \det) = \bar{\mathbf{Q}}_l(\chi_\pi \cdot \alpha^{-2})$$

ist, wobei $\chi_\pi = \omega_\pi | \mathbf{I}_{\mathbf{Q}}$, interpretiert als Charakter der Galoisgruppe. Man sollte noch bemerken, daß auf Grund der Definition der Zahl n die Einschränkung von ω_π auf die Einskomponente $Z(\mathbf{R})^0$ des Zentrums von $G(\mathbf{R})$ gleich der Einschränkung von α_F^{-n} ist, also ist $\omega_\pi = \alpha_F^{-n} \cdot \tilde{\omega}_\pi$ mit einem Dirichletcharakter $\tilde{\omega}_\pi$, und entsprechend ist also $\chi_\pi = \alpha_{\mathbf{Q}}^{-2n} \cdot \tilde{\chi}_\pi$. Somit bekommen wir eine galoisinvariante Paarung

$$q : X(\pi_f) \times X(\pi_f) \to \bar{\mathbf{Q}}_l(\alpha^{-2} \cdot \chi_\pi) = \bar{\mathbf{Q}}_l(\alpha^{-2-2n} \cdot \tilde{\chi}_\pi).$$

Es gilt also für $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}), x, y \in X(\pi_f)$

$$q\big(\rho(\pi)(\sigma)x, \rho(\pi)(\sigma)y\big) = \chi_\pi \alpha^{-2}(\sigma) q(x,y),$$

d.h. has Bild der Galoisgruppe unter $\rho(\pi)$ liegt in der algebraischen Untergruppe

$$GO(q) \subset GL_4$$

der Ähnlichkeiten. Dieser Gruppe wollen wir im nächsten Abschnitt ein wenig Aufmerksamkeit zuwenden.

4.3. Es sei im folgenden k ein algebraisch abgeschlossener Körper (der Charakteristik 0). Es sei E ein 4-dimensionaler Vektorraum mit einer nichtentarteten symmetrischen bilinearen Form $q : E \times E \to k$. Dann ist die Gruppe $GO(E,q)$ die Gruppe der Ähnlichkeiten

$$GO(E,q) = \{g \in GL(E) | q(gx, gy) = \lambda(g) q(x,y)\}.$$

Die Gruppe $GO(E,q)$ ist eine algebraische Gruppe, und $\lambda : GO(E,q) \to \mathbf{G}_m$ ist ein Character auf $GO(E,q)$; man nennt ihn den Multiplikator. Wir wollen die Gruppe $GO(E,q)$ auf eine ganz bestimmte Weise realisieren. Wir wählen einen zweidimensionalen Raum Y/k, und darauf wählen wir eine Determinantenform

$$\det : Y \times Y \to k.$$

Diese Form benutzen wir, um wie üblich zu identifizieren

$$Y \tilde{\to} \check{Y} = \mathrm{Hom}(Y,k),\ y \to l_y : x \to \det(x,y)$$

und

$$Y \otimes Y \tilde{\to} Y \otimes \check{Y} = \mathrm{End}\,(Y),$$

$$x \otimes y \to x \otimes l_y \to \{z \to l_y(z) \cdot x = \det(z,y) \cdot x\}.$$

Mit $\phi \to {}^T\phi$ bezeichnen wir die Transpositionsabbildung auf $\mathrm{End}(Y)$ bezüglich der Determinantenform. Es ist also $\phi^T\phi = {}^T\phi\phi = \det(\phi)$. Es gilt dann, daß diese Transposition auf $Y \otimes Y$ die Abbildung $x \otimes y \to -y \otimes x$ induziert. Wir setzen jetzt $E = \mathrm{End}(Y)$ und wählen darauf die symmetrische Form

$$q(\phi, \psi) = \mathrm{Spur}(\phi^T \psi)$$

und betrachten dies als konkrete Realisierung unserer eingangs vorgegebenen Daten.

Die Gruppe $GO(E,q)$ hat zwei Zusammenhangskomponenten, es sei $SGO(E,q)$ die Einskomponente. Wir haben einen Morphismus $\tilde{d} : GO(E,q) \to \mu_2$, der durch $g \to \det(g)/\lambda(g)^2$ gegeben ist. Dann ist $SGO(E,q) = \operatorname{Ker}(\tilde{d})$.

Wir haben nun den bekannten Morphismus

$$\Pi : GL(Y) \times GL(Y) \to SGO(E,q),\ \Pi : (\alpha,\beta) \to \{\phi \to \alpha \cdot \phi \cdot {}^T\beta\},$$

und dies liefert uns ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} SGO(E,q) \arrow[r, "\lambda"] & \mathbf{G}_m \\ GL(Y) \times GL(Y) \arrow[u, "\Pi"] \arrow[ur, "\det\times\det"'] & \end{tikzcd} \tag{4.3.1}$$

Der Kern von Π ist $\mathbf{G}_m$, wobei $\mathbf{G}_m$ durch $x \to (x, x^{-1})$ in $GL(Y) \times GL(Y)$ eingebettet ist, und die Abbildung Π ist surjektiv (in welchem Sinn man es auch immer verstehen möchte). Als Vertreter von $GO(E,q)/SGO(E,q)$ wählen wir das Element

$$\Theta : \phi \to -{}^T\phi.$$

4.4. Wir wollen jetzt wieder $k = \bar{\mathbf{Q}}_l$ wählen, und $X(\pi_f)$ zusammen mit der Form q sei mit $E = \operatorname{End}(Y)$ und $\mathrm{Spur}(\phi \cdot {}^T\psi)$ identifiziert.

Wir haben die Abbildung $\tilde{d} \circ \rho(\pi)$ von $\operatorname{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ nach μ_2. Den Morphismus $\tilde{d}$ haben wir als $\det \cdot \lambda^{-2}$ beschrieben. Wir sehen dann auf Grund unserer Formeln für $\rho(\pi)(\Phi_p^{-1})$ in §2, Satz 2.4, daß $\tilde{d} \circ \rho(\pi)$ gerade die Abbildung

$$\operatorname{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \operatorname{Gal}(F/\mathbf{Q}) = \mu_2$$

ist.

Es gilt nun

4.4.1 Lemma. *Es gibt eine Liftung von $\rho(\pi)|\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$ nach $GL(Y) \times GL(Y)$, d.h. es gibt ein Diagramm*

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}) \arrow[rr, "\sim"] & & \mu_2 \\
\rho(\pi) : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \arrow[u] \arrow[rr] & & GO(E,q) \arrow[u, "\tilde{d}"'] \\
\rho(\pi)_F : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F) \arrow[u, hook] \arrow[rr] \arrow[drr, "\rho_1(\pi)\times\rho_2(\pi)"'] & & SGO(E,q) \arrow[u, hook] \\
& & GL(Y) \times GL(Y), \arrow[u, "\Pi"']
\end{tikzcd}
$$

wobei wir die zusätzliche Forderung stellen können, daß

$$\det\rho_1(\pi)(\sigma) = \alpha^{-n-1}(\sigma)\eta(\sigma),$$
$$\det\rho_2(\pi)(\sigma) = \alpha^{-n-1}(\sigma)\eta'(\sigma)$$

mit Galoischarakteren η, η' von endlicher Ordnung.

Beweis. Wir können die Galoisoperation auf dem Raum E mit α^{n+1} twisten. Dann bekommen wir eine getwistete Form

$$\tilde{q} : \tilde{E} \times \tilde{E} \to \bar{\mathbf{Q}}_l(\tilde{\chi}_\pi),$$

wobei $\tilde{\chi}_\pi$ der oben eingeführte Galoischarakter endlicher Ordnung ist. Wenn wir die Operation $\rho(\pi)$ nun auf eine offene Untergruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/K)$ einschränken, dann landet das Bild in einer offenen Umgebung der 1 in der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(\tilde{E}, \tilde{q})$. Nun ist aber

$$\Pi : SL(\tilde{Y}) \times SL(\tilde{Y}) \to SO(\tilde{E}, \tilde{q})$$

lokal ein Isomorphismus. Das heißt also, daß wir die Einschränkung von $\rho(\pi)$ auf $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/K)$ liften können. Dann folgt die Behauptung für die Operation auf $\tilde{E}$ aus dem Satz von Tate über die Trivialität des Schurschen Multiplikators der Galoisgruppe (siehe [30], §6). Wenn wir wieder mit α^{-n-1} zurücktwisten, bekommen wir die Behauptung des Lemmas.

Es gibt einige formale Informationen über die Darstellungen $\rho_1(\pi), \rho_2(\pi)$, die wir hier zusammenstellen wollen.

4.4.2. a) Die Darstellungen $\rho_1(\pi)$ und $\rho_2(\pi)$ sind zunächst durch die an sie gestellen Bedingungen nicht eindeutig bestimmt. Wir können beide mit einem Paar zueinander inverser Charaktere endlicher Ordnung twisten, d.h.

$$\rho_1(\pi) \to \rho_1(\pi) \otimes \nu = \rho_1'(\pi),$$

$$\rho_2(\pi) \to \rho_2(\pi) \otimes \nu^{-1} = \rho_2'(\pi)$$

und bekommen ein zweites Diagramm wie in 4.4.1. Das ist aber auch die einzig mögliche Modifikation.

b) Der Multiplikator ist gleich $\lambda \circ \rho(\pi) = \tilde{\chi}_\pi \circ \alpha^{-2n-2}$, wobei $\tilde{\chi}_\pi \circ \alpha^{-2n} = \omega_\pi | \mathbf{I}_{\mathbf{Q}}$. Daraus folgt, daß für $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$:

$$\tilde{\chi}_\pi(\sigma) \cdot \alpha^{-2n-2}(\sigma) = \alpha^{-1} \circ \omega_\pi \circ N_{F/\mathbf{Q}}(\sigma) = \det \rho_1(\pi)(\sigma) \cdot \det \rho_2(\pi)(\sigma).$$

Dabei ist $\omega_\pi \circ N_{F/\mathbf{Q}}$ der durch die Norm $\mathbf{I}_F \overset{N_{F/\mathbf{Q}}}{\longrightarrow} \mathbf{I}_{\mathbf{Q}}$ und den Reziprozitätsisomorphismus induzierte l-adische Charakter auf $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$, d.h. $\omega_\pi \circ N_{F/\mathbf{Q}}(\sigma) = \omega_\pi(\sigma \cdot \theta\sigma\theta^{-1})$, wenn $\theta \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}), \theta|F \neq 1$.

4.4.3. Wir schreiben für $g \in SGO(E, q)$

$$g \sim g_1 \times g_2,$$

falls $\Pi(g_1 \times g_2) = g$. Dann folgt durch einfache Rechnungen, daß für unser Element θ

$$\rho(\pi)(\theta) = (1 \times A) \cdot \Theta,$$

wobei Θ der oben gewählte Vertreter ist (nach Konjugation). Dann ist

$$\rho(\pi)(\theta^2) \sim (A \times A) \sim \big(\rho_1(\pi)(\theta^2) \times \rho_2(\pi)(\theta^2)\big).$$

Dann ist also

$$A = \zeta \rho_1(\pi)(\theta^2) = \zeta^{-1} \rho_2(\pi)(\theta^2).$$

Dadurch ist ζ aber nur bis auf ein Vorzeichen festgelegt. Eine leichte Rechnung, die auch die Wahl des Vorzeichens in der Definition von Θ erklärt, zeigt

$$\mathrm{Spur}\, \rho(\pi)(\theta) = \mathrm{Spur}\,(A) = \zeta\, \mathrm{Spur}\, \rho_1(\pi)(\theta^2).$$

4.4.4. Die Gleichung

$$\rho(\pi)(\theta\sigma\theta^{-1}) = \rho(\pi)(\sigma^\theta) = \rho(\pi)(\theta)\rho(\pi)(\sigma)\rho(\pi)(\theta)^{-1}$$

liefert uns für $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$ die Gleichung

$$\rho_1(\pi)(\sigma^\theta) \times \rho_2(\pi)(\sigma^\theta) \sim \rho_2(\pi)(\sigma) \times A\rho_1(\pi)(\sigma)A^{-1}.$$

Es gibt also einen Galoischarakter ν auf $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$ von endlicher Ordnung mit

$$\begin{aligned}\rho_2(\pi)(\sigma) &= \rho_1(\pi)(\sigma^\theta) \cdot \nu(\sigma),\\ \rho_1(\pi)(\sigma) &= A^{-1}\rho_2(\pi)(\sigma^\theta)A \cdot \nu(\sigma)^{-1}.\end{aligned}$$

Wenn wir in diese Gleichung $\sigma = \theta^2$ einsetzen, bekommen wir

$$\rho_2(\pi)(\theta^2) = \rho_1(\pi)(\theta^2) \cdot \nu(\theta)^2$$

und damit

$$A = \pm\nu(\theta)\rho_1(\pi)(\theta^2) = \pm\nu(\theta)^{-1}\rho_2(\pi)(\theta^2).$$

Außerdem können wir noch die eine Gleichung in die andere einsetzen und erhalten eine Bedingung an ν, nämlich

$$\nu(\sigma^\theta) = \nu(\sigma).$$

Wenn wir dies über den Reziprozitätsisomorphismus auf der Ideleklassengruppe interpretieren und ausnutzen, daß die Elemente der Form x/x^θ gerade die Elemente der Norm 1 sind, so folgt, daß wir schreiben können

$$\nu = \eta \cdot \eta^\theta,$$

und wenn $\rho'_1 = \rho_1 \otimes \eta, \rho'_2 = \rho_1 \otimes \eta^{-1}$, dann bekommen wir

$$\rho_1(\pi)(\sigma) \times \rho_2(\pi)(\sigma) \sim \rho'_1(\pi)(\sigma) \times \rho'_2(\pi)(\sigma)$$

und

$$\rho'_2(\pi)(\sigma) = \rho'_1(\pi)(\sigma^\theta).$$

4.4.5. Wir wollen jetzt umgekehrt von einer Darstellung

$$\rho_1 : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F) \to GL(Y)$$

ausgehen und setzen

$$\rho_2(\sigma) = \rho_1(\sigma^\theta).$$

Dann bekommen wir mit dem Ansatz

$$\rho(\rho_1, A)(\sigma) = \Pi \cdot \big(\rho_1(\sigma) \times \rho_2(\sigma)\big)$$

und

$$\rho(\rho_1, A)(\theta) = (1 \times A) \cdot \Theta$$

eine Darstellung $\rho(\rho_1, A)$ von $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ in $GO(E, q)$, so daß wir ein Diagramm wie in 4.4.1 erhalten. Dabei können wir $A = \pm\rho_1(\theta^2)$ wählen, d.h. wir haben zwei Möglichkeiten, die Fortsetzung ρ zu konstruieren. Nun haben wir zwei Fälle:

1. Es ist für jede Wahl von θ

$$\mathrm{Spur}\,\big(\rho_1(\theta^2)\big) = 0.$$

Dann liefern beide Fortsetzungen äquivalente Darstellungen.

2. Es gibt ein θ mit $\mathrm{Spur}\,\big(\rho_1(\theta^2)\big) \neq 0$, dann haben wir eine privilegierte Fortsetzung nämlich diejenige mit

$$\mathrm{Spur}\,\rho\big((\rho_1, A)(\theta)\big) = \mathrm{Spur}\,(A) = \mathrm{Spur}\,\rho_1(\theta^2).$$

Dann gilt in beiden Fällen

$$\mathrm{Spur}\,\rho\big((\rho_1, A)(\theta)\big) = \mathrm{Spur}\,(A) = \mathrm{Spur}\,\rho_1(\theta^2).$$

4.5. Wir kommen nun zu den weniger formalen Aspekten der vorliegenden Situation. Es ist eine allgemein akzeptierte Vermutung, daß es zu einer beliebigen cuspidalen Form $\pi \in \mathrm{Coh}_0(\mu)$ eine λ-adische Darstellung

$$\tau(\pi) : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F) \to GL_2(\bar{\mathbf{Q}}_l)$$

gibt, so daß für fast alle Primstellen von F gilt

$$L_v\big(s, \tau(\pi)\big) = L_v\left(s - \frac{1}{2}, \pi\right),$$

wobei rechts die gewöhnliche L-Funktion zu der automorphen Form π steht (d.h. die zur natürlichen Darstellung der L-Gruppe $GL_2(\mathbf{C})$ von GL_2/F gehörige L-Funktion). Es scheint ein sehr schwieriges und wichtiges Problem zu sein, die Existenz von $\tau(\pi)$ nachzuweisen. Natürlich zielt die in 4.4 durchgeführte Konstruktion in diese Richtung, aber sie ist viel zu formal, um einen entscheidenden Schritt darzustellen. Wir erwarten durchaus, daß $\tau(\pi)$ bis auf einen Twist gleich einer der beiden

Darstellungen $\rho_1(\pi)$ oder $\rho_2(\pi)$ ist. Die Existenz von $\tau(\pi)$ würde den ganzen vorliegenden Abschnitt wesentlich vereinfachen.

4.5.1. Wir können die Darstellung von $GO(E,q)$ auf der zweiten äußeren Potenz $\Lambda^2 E$ von E betrachten. Dann zerfällt bekanntlich $\Lambda^2 E$ in zwei dreidimensionale Vektorräume

$$\Lambda^2 E = Y' \oplus Y',$$

und wir erhalten ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
SGO(E,q) \arrow[r, "\Lambda^2"] & GL(Y') \times GL(Y') \\
GL(Y) \times GL(Y). \arrow[u, "\Pi"] \arrow[ur, "\Psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Dabei ist Ψ die folgende Darstellung. Wir betrachten wieder die natürliche dreidimensionale Darstellung

$$r_2 : GL(Y) \to GL_3(\bar{\mathbf{Q}}_l)$$

auf dem Raum der symmetrischen 2-Tensoren, Dann kann Y' mit diesem Raum der symmetrischen 2-Tensoren identifiziert werden, und es ist für $(g_1, g_2) \in GL(Y) \times GL(Y)$

$$\Psi(g_1, g_2) = \big(r_2(g_1)\det(g_2), r_2(g_2)\det(g_1)\big).$$

Wir setzen

$$\Psi \circ \big(\rho_1(\pi) \times \rho_2(\pi)\big) = \tilde{\rho}_1(\pi) \times \tilde{\rho}_2(\pi) = \Lambda^2 \rho(\pi).$$

Wie in §3 können wir die Darstellung r_2 auch als Darstellung der L-Gruppe

$$GL_2(\mathbf{C}) \times \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$$

von GL_2/F interpretieren und die dieser Darstellung r_2 zugehörige L-Funktion $L(s, \pi, r_2)$ studieren. Dies ist die gleiche L-Funktion wie die in der Einleitung zu [12], wenn man dort einen geeigneten Charakter χ wählt. Jetzt gilt

4.5.2 Hilfssatz. *Es sei* $\pi \in \mathrm{Coh}_0(\mu)$ *und* $\pi' = \pi^\theta$ *die konjugierte Form. Dann ist für fast alle Stellen* v *von* F

$$L_v(s-2,\pi,r_2\cdot\omega_{\pi'})\cdot L_v(s-2,\pi',r_2\cdot\omega_\pi) = L_v\big(s,\tilde\rho_1(\pi)\big)\cdot L_v\big(s,\tilde\rho_2(\pi)\big).$$

Beweis. Wenn $u \in SGO(E,q)$ ein halbeinfaches Element ist, so liegt u in einem maximalen Torus T, der durch eine Basis e_1,e_2,f_1,f_2 von E definiert ist, wobei

$$q(e_1,f_1) = q(e_2,f_2) = 1$$

und alle anderen Skalarprodukte verschwinden. Dann ist

$$ue_i = \xi_i e_i,\ uf_i = \eta_i f_i,$$

wobei $\xi_1\eta_1 = \xi_2\eta_2 = \lambda(u)$ und λ der Multiplikator ist. Dann sind die beiden Eigenwerttripel von $\Lambda^2(u)$ auf $\Lambda^2 E$

$$(\xi_1\eta_2,\xi_1\eta_1,\xi_2\eta_1)\text{ und }(\xi_1\xi_2,\xi_1\eta_1,\eta_1\eta_2).$$

(Das Produkt der äußeren Eigenwerte muß das Quadrat des mittleren sein.)

Ist nun v eine Stelle von F, an der F,π und $\bar\rho_1(\pi),\bar\rho_2(\pi)$ unverzweigt sind, dann ist der halbeinfache Anteil von $\rho(\pi)(\Phi_v^{-1})$ in 2.4 beschrieben. Falls $v = \mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p}\mathfrak{p}' = p\mathcal{O}$, dann ist dieser halbeinfache Anteil

$$\rho(\pi)(\Phi_{\mathfrak{p}}^{-1}) \sim p\cdot\begin{pmatrix}\alpha_{\mathfrak{p}}\alpha_{\mathfrak{p}'} & & & 0\\ & \beta_{\mathfrak{p}}\alpha_{\mathfrak{p}'} & & \\ & & \alpha_{\mathfrak{p}}\beta_{\mathfrak{p}'} & \\ 0 & & & \beta_{\mathfrak{p}}\beta_{\mathfrak{p}'}\end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\lambda\big(\rho(\pi)(\Phi_{\mathfrak{p}}^{-1})\big) = p^2\cdot\omega_\pi(\varpi_{\mathfrak{p}})\cdot\omega_\pi(\varpi_{\mathfrak{p}}) = \omega\circ N_{F/\mathbf{Q}}(\varpi_{\mathfrak{p}}) = p^2\cdot\alpha_{\mathfrak{p}}\beta_{\mathfrak{p}}\alpha_{\mathfrak{p}'}\beta_{\mathfrak{p}'}$$

und denn folgt: die Eigenwerte in den beiden GL_3-Faktoren sind

$$p^2\cdot(\alpha_{\mathfrak{p}}^2\alpha_{\mathfrak{p}'}\beta_{\mathfrak{p}'},\alpha_{\mathfrak{p}}\beta_{\mathfrak{p}}\alpha_{\mathfrak{p}'}\beta_{\mathfrak{p}'},\beta_{\mathfrak{p}}^2\alpha_{\mathfrak{p}'}\beta_{\mathfrak{p}'})$$

und

$$p^2\cdot(\alpha_{\mathfrak{p}'}^2\alpha_{\mathfrak{p}}\beta_{\mathfrak{p}},\alpha_{\mathfrak{p}}\beta_{\mathfrak{p}}\alpha_{\mathfrak{p}'}\beta_{\mathfrak{p}'},\beta_{\mathfrak{p}'}^2\alpha_{\mathfrak{p}}\beta_{\mathfrak{p}}).$$

Das beweist den Hilfssatz für zerfallende Primstellen. Für die trägen Primstellen $\mathfrak{P}$ kann man ganz entsprechend argumentieren, wobei man berücksichtigen muß, daß $\Phi_p^2 = \Phi_{\mathfrak{P}}$.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Bemerkung. Wir wissen nicht, ob $\tilde{\rho}_1(\pi)$ und $\tilde{\rho}_2(\pi)$ kompatible l-adische Systeme sind.

Wir wollen den Hifssatz 4.5.2 noch ein wenig modifizieren. Wenn wir die Darstellungen $\tilde{\rho}_1(\pi)$ und $\tilde{\rho}_2(\pi)$ mit dem Galoischarakter

$$\alpha^2 \cdot (\omega_\pi \circ N_{F/\mathbf{Q}})^{-1}$$

twisten, dann erhalten wir zwei Darstellungen $\rho_1^*(\pi), \rho_2^*(\pi)$, die wir auch aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} GL(Y) \arrow[rr] \arrow[dr] & & GL_3(\bar{\mathbf{Q}}_l) \\ & PGL(Y) \arrow[ur, "\mathrm{Ad}"'] & \end{tikzcd}$$

gewinnen. Die Eigenwerttripel sind dann

$$(\alpha_\mathfrak{p}/\beta_\mathfrak{p}, 1, \beta_\mathfrak{p}/\alpha_\mathfrak{p}) \text{ und } (\alpha_{\mathfrak{p}'}/\beta_{\mathfrak{p}'}, 1, \beta_{\mathfrak{p}'}/\alpha_{\mathfrak{p}'}).$$

Auf der linken Seite von 4.5.2 können wir dieselbe Konstruktion mit der L-Gruppe ausführen, wir erhalten

$$\begin{tikzcd} GL_2(\mathbf{C}) \arrow[rr, "\overline{r_2}"] \arrow[dr] & & GL_3(\mathbf{C}) \\ & PGL_2(\mathbf{C}), \arrow[ur, "\mathrm{Ad}"'] & \end{tikzcd}$$

und dann wird 4.5.2 äquivalent zu

$$L_v(s, \pi, \bar{r}_2) \cdot L_v(s, \pi', \bar{r}_2) = L_v\big(s, \rho_1^*(\pi)\big) \cdot L_v\big(s, \rho_2^*(\pi)\big). \tag{4.5.2$'$}$$

An dieser Stelle möchten wir bemerken, daß

$$L_v(s, \pi, \bar{r}_2) = L_2(s, \sigma, 1)$$

in der Notation von [12], Einleitung. Der dort auftretende Charakter χ ist hier also 1.

4.5.3. Die folgenden Betrachtungen dienen dazu, das Reduzibilitätsverhalten der Darstellungen $\rho_1(\pi)$ und $\rho_2(\pi)$ zu verstehen und auch die Fälle aufzulisten, in denen wir zeigen können, daß $\tau(\pi)$ existiert.

Wir werden es mit zwei verschiedenen Fällen zu tun haben. Wir sagen, daß eine Kohomologieklasse $\pi \in \mathrm{Coh}_0(\mu)$ vom CM-Typ ist, falls es einen Galoischarakter $\eta : \mathbf{I}_F/F^\times \to \bar{\mathbf{Q}}_l^\times$ gibt, mit

$\eta \neq 1$ und $\pi \sim \pi \otimes \eta$. Nach [21] ist dann $\eta^2 = 1$ und zu η gehört eine quadratische Erweiterung L/F, und es gibt einen Heckecharakter

$$\Omega : \mathbf{I}_L/L^\times \to \bar{\mathbf{Q}}_l^\times ,$$

so daß $\pi = \pi(\Omega)$ ist. Die Darstellung π liegt in der diskreten Serie; das impliziert, daß L/F eine total imaginäre quadratische Erweiterung des quadratischen Körpers $F/\mathbf{Q}$ ist. Wenn wir über den beiden Einbettungen von F nach $\mathbf{R}$ jeweils eine Einbettung $\tau, \tau' : L \to \mathbf{C}$ fixieren, so wird für die beiden komplexen Stellen, die durch τ, τ' induziert sind, der Typ von Ω durch

$$\Omega : (z, z', 1) \to \tau(z)^{-n+m}\overline{\tau(z)}^{-n} \cdot \tau'(z')^{-n+m} \cdot \overline{\tau'(z')}^{-n}$$

gegeben, wobei $m = (dim\, \mathcal{V}_\mu)^{\frac{1}{2}}$ und n unsere früher definierte Zahl n ist. (Siehe 2.4). Nach diesen Vorbereitungen formulieren wir

4.5.4 Satz. a) *Für $\pi \in \mathrm{Coh}_0(\mu)$ sind die Darstellungen $\rho_1(\pi)$ und $\rho_2(\pi)$ stets irreduzibel.*

b) *Wenn $\pi \in \mathrm{Coh}_0(\mu)$ nicht vom CM-Typ ist, dann bleiben $\rho_1(\pi)$ und $\rho_2(\pi)$ irreduzibel, wenn man sie auf eine beliebig kleine offene Untergruppe $U = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/M) \subset \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$ einschränkt.*

Beweis. Wir übertragen die Methoden von Serre [29] und Ribet [28] auf unsere Situation. Wenn $\rho_1(\pi)$ (und somit auch $\rho_2(\pi)$) reduzibel ist, dann faktorisiert $\rho_1(\pi)$ über eine Boreluntergruppe in $GL(Y)$, d.h.

$$\rho_1(\pi)(\sigma) = \begin{pmatrix} \chi_1(\sigma) & * \\ 0 & \chi_2(\sigma) \end{pmatrix}$$

mit zwei λ-adischen Charakteren χ_1, χ_2. Nach [29], III, 3.1 gibt es Heckecharaktere $\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2$ auf $\mathbf{I}_F/F^\times$, die auf den endlichen Idelen $\mathbf{I}_{F,f}$ mit χ_1 und χ_2 übereinstimmen. Da F total reell ist, gilt weiter

$$\chi_i = \alpha_F^{\nu_i} \mu_i$$

mit einem Charakter endlicher Ordnung μ_i. Nun ist nach 4.4.1 stets

$$\chi_1\chi_2(\sigma) = \alpha^{-n-1}(\sigma) \cdot \eta(\sigma),$$

und aus der Weilvermutung folgt sofort $\nu_1 = \nu_2$. Es ist also $\nu_1 = \nu_2 = \frac{-n-1}{2}$ und das heißt, daß schon mal $n+1$ gerade sein muß. Wenn wir die entsprechenden Charaktere für $\rho_2(\pi)$ mit χ_1', χ_2' bezeichnen, so liefert (4.5.2′)

$$L(s, \pi, \bar{r}_2) \cdot L(s, \pi', \bar{r}_2) \sim L(s, \chi_1/\chi_2) \cdot L(s, 1) \cdot L(s, \chi_2/\chi_1) \cdot L(s, \chi_1'/\chi_2') \cdot L(s, 1) \cdot L(s, \chi_2'/\chi_1').$$

Die Funktion rechts hat bei $s = 1$ einen Pol mindestens zweiter Ordnung, weil die übrigen auftretenden Charaktere endliche Ordnung haben. Die Funktion auf der linken Seite hat gar keine Pole, wenn π nicht vom CM-Typ ist (Theorem 9.3 in [12]). Wenn π vom CM-Typ ist, dann ist die Funktion auf der linken Seite bei $s = 1$ holomorph, das folgt aus den obigen Bemerkungen und der Bemerkung 9.9 in [12]. (Das dortige $\Omega\Omega'^{-1}$ ist kein Dirichletcharakter.)

Wir kommen zum Beweis von b). Sei also $\pi \in \mathrm{Coh}_0(\mu)$ und $\rho_1(\pi)$ und $\rho_2(\phi)$ seien auf einer genügend kleinen offenen Untergruppe $U \subset \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$ reduzibel. Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. Die Operation $\rho_1(\pi)|U$ wird skalar, when U genügend klein ist.

2. Die operation $\rho_1(\pi)$ ist auf genügend kleinen offenen Untergroppe U eine directe Summe zweier verschiedener Charaktere.

(Wenn sie nicht zerfiele, erhalten wir einen Widerspruch zu a).)

Im ersten Fall sind $\rho_1^*(\pi)$ und $\rho_2^*(\pi)$ endliche Galoisdarstellungen. Wir können jetzt genau die gleichen Argumente bringen wie in [28], §4. Den beiden Galoisdarstellungen $\rho_1^*(\pi), \rho_2^*(\pi)$ werden Artinsche L-Functionen zugeordnet und das Product dieser Artinschen L-Functionen ist dann bis auf eine endliche Menge von Eulerfaktoren gleich

$$L(s, \pi, \bar{r}_2) \cdot L(s, \pi', \bar{r}_2).$$

Die Eulerfaktoren an den unendlichen Stellen stimmen dann gerade nicht überein. Wendet man nun auf beide Produkte von L-Funktionen die Funktionalgleichung an und benutzt man 4.5.2′, dann erhält man eine endliche Relation zwischen Eulerfaktoren, von der man durch Betrachtung der Pole zeigt, daß sie nicht gelten kann. Da dieses Argument wenig überzeugend ist, wenn man nicht alles genau durchrechnet, wollen wir das hier auch noch tun.

Wir schauen uns zunächst noch mal $\rho_1(\pi)$ und $\rho_2(\pi)$ an. Wenn wir auf eine genügend kleine offene Untergruppe $U = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/M) \subset \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$ einschränken, dann wird für $\sigma \in U$

$$\rho_1(\pi)(\sigma) = \begin{pmatrix} \chi(\sigma) & 0 \\ 0 & \chi(\sigma) \end{pmatrix}$$

mit einem Galoischarakter χ. Nun ist

$$\det \rho_1(\pi)(\sigma) = \alpha^{-n-1}(\sigma)$$

für $\sigma \in U$ (siehe 4.4.1). Wir wissen, daß für jede Stelle $\mathfrak{p}$ von F vom Grad 1 gilt

$$\rho_1(\pi)(\Phi_{\mathfrak{p}}^{-1}) = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathfrak{p}} & 0 \\ 0 & \beta_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix} \mu_{\mathfrak{p}} \text{ oder } \begin{pmatrix} \alpha_{\mathfrak{p}'} & 0 \\ 0 & \beta_{\mathfrak{p}'} \end{pmatrix} \mu_p$$

mit einer Einheitswurzel $\mu_{\mathfrak{p}}$. Dann ist also für genügend großes N

$$\rho_1(\pi)(\Phi_{\mathfrak{p}}^{-N}) = \begin{pmatrix} \chi(\Phi_{\mathfrak{p}}^{-N}) & 0 \\ 0 & \chi(\Phi_{\mathfrak{p}}^{-N}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathfrak{p}}^N & 0 \\ 0 & \beta_{\mathfrak{p}}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{\frac{N(n+1)}{2}} & 0 \\ 0 & p^{\frac{N\cdot(n+1)}{2}} \end{pmatrix}.$$

Es gilt also, daß

$$\alpha_{\mathfrak{p}} = p^{\frac{n+1}{2}}\zeta_{\mathfrak{p},1}, \quad \beta_{\mathfrak{p}} = p^{\frac{n+1}{2}}\zeta_{\mathfrak{p},2}$$

mit Einheitswurzeln $\zeta_{\mathfrak{p},1}, \zeta_{\mathfrak{p},2}$. Nun sind die Spuren $\alpha_{\mathfrak{p}} + \beta_{\mathfrak{p}}$ in einem festen durch die automorphe Form $\pi \in \mathrm{Coh}_0(\mu)$ bestimmten Zahlkörper enthalten. Die Grade der Einheitswurzeln sind, wie man leicht sieht, beschränkt, also sind alle Zahlen $p^{\frac{n+1}{2}}$ in diesem festen Zahlkörper. Hier durchläuft p alle Zahlen, die in F zerfallen; das ist nur möglich, wenn $n+1$ gerade ist.

Wir benötigen noch eine kleine Information über n, die bislang noch keine Rolle gespielt hat. Unsere rationale Darstellung

$$\mu : R_{F/\mathbf{Q}}(GL_2/F) \to GL(\mathcal{V}_\mu)$$

wird nach Erweiterung der Konstanten ein Tensorprodukt von zwei zueinander isomorphen rationalen Darstellungen von GL_2. Ist m die Dimension dieser Darstellungen, d.h. $M^2 = dim\,\mathcal{V}_\mu$, dann ist $n \equiv m+1$ mod 2.

Wenn wir F in $\mathbf{R}$ einbetten, $F \xrightarrow{i} \mathbf{R}$, so erhalten wir $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) \to \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$; ist c die komplexe Konjugation in $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$, dann folgt

$$\rho_1^*(\pi)(c) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus den Überlegungen in 4.4.2 folgt, daß $\rho_1(\pi)(c) \sim \rho_2(\pi)(c)$. Dann ist der Eulerfaktor der Artinschen L-Reihen an der der Einbettung i entsprechenden Stelle (bis auf Potenzen von π)

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = \Gamma(s) \cdot \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$$

im ersten Fall und

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^3$$

im zweiten Fall.

Nach Gelbart-Jacquet ([12], 6.5.11, e) ist der Eulerfaktor für die L-Funktion zu π und $\bar{r}_2$ an einer unendlichen Stelle gleich

$$\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \cdot \Gamma(s+m),$$

wobei m die oben erwähnte Dimension ist. Schreibt man beide Produkte von je zwei L-Funktionen in der Form

$$L(s,\pi,\bar r_2)\cdot L(s,\pi',\bar r_2) = L_\infty(s,\pi)\cdot L_f(s,\pi),$$
$$L\big(s,\rho_1^*(\pi)\big)\cdot L\big(s,\rho_2^*(\pi)\big) = L'_\infty(s,\pi)\cdot L_f\big(s,\rho^*(\pi)\big),$$

so stimmen nach 4.5.2 fast alle Eulerfaktoren in den endlichen Anteilen überein. Dann liefern die Funktionalgleichungen

$$\frac{L_\infty(s,\pi)}{L_\infty(1-s,\tilde\pi)}\cdot\frac{L'_\infty(1-s,\tilde\pi)}{L'_\infty(s,\pi)} = C\cdot A^s\cdot \begin{array}{l}\text{endliches Produkt von Eulerfaktoren}\\ \text{an endlichen Stellen.}\end{array}$$

Man muß nun die möglichen Fälle durchgehen, sieht aber sehr leicht, daß man auf der linken Seite eine unendliche Serie von Polen mit beliebig kleinem (geradzahligen) Realteil hat, wenn ein Faktor $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ auftaucht. Das kann rechts nicht passieren. Der einzig interessante Fall ist also, daß alle Eulerfaktoren oben von der Form $\Gamma(s)\cdot\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ sind. Dann steht auf der linken Seite

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^2\cdot\Gamma(s+m)^2}{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)^2\cdot\Gamma(m+1-s)^2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)^2\cdot\Gamma(1-s)^2}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^2\cdot\Gamma(s)^2} = \frac{\Gamma(s+m)^2\cdot\Gamma(1-s)^2}{\Gamma(m+1-s)^2\cdot\Gamma(s)^2}.$$

Dieser Ausdruck hat Nullstellen bei

$$s = -m+1,\dots,0$$

und Pole bei

$$s = 1,\dots,m.$$

Auf der rechten Seite steht ein endliches Produkt von Faktoren der Form

$$(1-\gamma N\mathfrak{p}^{-s})^{-1} \text{ oder } (1-\gamma\cdot N\mathfrak{p}^{s-1})^{-1}.$$

Es ist unmöglich, daß ein solches Produkt der linken Seite, die nicht konstant ist, gleicht.

Damit ist der Fall erledigt, daß $\rho_1(\pi)$ auf einer kleinen offenen Untergruppe von $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$ skalar operiert. Er kommt nicht vor.

Wenn nun $\rho_1(\pi)$ auf einer offenen Untergruppe U, die wir uns als normale Untergruppe vorstellen können, zerfällt, d.h.

$$\rho_1(\pi)|v = \begin{pmatrix}\chi_1 & 0\\ 0 & \chi_2\end{pmatrix}\quad \chi_1\neq\chi_2,$$

dann folgt sofort, daß die Eigenräume unter einer Untergruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/M)$ mit einer quadratischen Erweiterung M/F invariant sind, die Charaktere setzen sich also fort. Wir nennen die fortgesetzten Charaktere wieder χ_1,χ_2 und bekommen

$$\rho_1(\pi) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/M)}^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)}\chi_1.$$

Wir benutzen jetzt Henniart's Verallgemeinerung des Satzes von Serre ([15]) und interpretieren χ_1, χ_2 als Größencharaktere vom Typ A_0 auf $\mathbf{I}_M/M^\times$. Dann ist

$$\rho_1^*(\pi) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/M)}^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)} \chi_1/\chi_2 \oplus \bar{\mathbf{Q}}_l \cdot \eta_M,$$

wobei η_M der zu M/F gehörige quadratische Charakter ist. Also bekommen wir aus 4.5.2′, daß bis auf uninteressante Faktoren

$$L(s,\pi,\bar{r}_2) \cdot L(s,\pi',\bar{r}_2) \sim L_M(s,\chi_1/\chi_2) \cdot L_F(s,\eta_M) \cdot L_{M'}(s,\chi_1'/\chi_2') \cdot L_F(s,\eta_{M'}).$$

Dabei sind $M'/F, \chi_1', \chi_2'$ die zu $\rho_2^*(\pi)$ gehörigen entsprechenden Daten. Wir bemerken nun, daß wir die Form π und π' nach M liften können und daß wir entsprechend $\rho_1(\pi)$ und $\rho_2(\pi)$ auf $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/M)$ einschränken können. Dann bleibt die obige Relation zwischen den gelifteten L-Funktionen erhalten. Die rechte Seite bekommt aber einen Pol bei $s = 1$. Also ist die linke Seite nicht holomorph bei $s = 1$. Das ist nach [12], Theorem 9.3 und Remark 9.9 nur möglich, wenn eine der beiden Liftungen nicht cuspidal ist. Also ist eine der beiden Liftungen nach M eine Eisensteinreihe und es folgt aus [24], S. 21, daß π und π' vom CM-Typ sind. Damit ist Satz 4.5.4 beweisen.

4.5.5 Korollar. *Die Darstellung $\rho(\pi)$ ist halbeinfach.*

Beweis. Wäre $\rho(\pi)$ nicht halbeinfach, dann müßte der Zariskiabschluß von $\rho(\pi)\big(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)\big)$ in einer parabolischen Untergruppe enthalten sein. Das wäre dann auch für die Bilder von $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$ unter $\rho_1(\pi)$ und $\rho_2(\pi)$ der Fall. Dann wären $\rho_1(\pi)$ und $\rho_2(\pi)$ aber reduzibel.

4.5.6 Satz. *Wenn die Darstellung $\tau(\pi)$ existiert, dann ist die Darstellung $\rho(\pi)$ zu der aus $\tau(\pi)$ gewonnenen Darstellung $\rho\big(\tau(\pi), A\big)$ mit $A = \tau(\pi)(\theta^2)$ (siehe 4.4.5) äquivalent. D.h. mit anderen Worten, wir können $\rho_1(\pi) = \tau(\pi)$ wählen.*

Beweis. Wir schließen wie im Beweis von 4.5.4, daß $\tau(\pi)$ irreduzibel ist, wobei sich das Argument vereinfacht, weil jetzt die L-Funktion von $\tau(\pi)$ direkt mit der L-Funktion von π zusammenhängt ([28], Theorem 2.3). Daraus folgt, daß die Darstellung $\rho\big(\tau(\pi), A\big)$ halbeinfach ist. Dann haben nach 4.4.5 und Satz 2.4 $\rho(\pi)$ und $\rho\big(\tau(\pi), A\big)$ für jeden Frobenius die gleiche Spur, denn für träge p ist $\Phi_p^2 = \Phi_{\mathfrak{P}}$. Nach [29], 2.2 folgt die Behauptung.

4.5.7 Satz. *Ist $\pi \in \mathrm{Coh}_0(\mu)$, so existiert $\tau(\pi)$ in der folgenden Fällen:*

a) π ist eine Liftung einer Form $\pi^0_{\mathbf{Q}}$,

b) π ist vom CM-Typ.

Ferner gilt: Wenn $\tau(\pi)$ existiert und wenn $\nu' : \mathbf{I}_F/F^\times \to \bar{\mathbf{Q}}_l$ ein Charakter von der Form $\alpha^k\tilde{\nu}$ mit einem Charakter $\tilde{\nu}$ endlicher Ordnung ist, dann existiert $\tau(\pi \otimes \nu')$.

Beweis. Das ist eigentlich alles ziemlich klar. Im Fall a) weiß man, daß $\pi^0_{\mathbf{Q}}$ in der diskreten Serie liegen muß. Also existiert $\tau(\pi^0_{\mathbf{Q}})$ nach der klassischen Eichler-Shimura Theorie (siehe z.B. [22]). Dann ist $\tau(\pi)$ einfach die Einschränkung von $\tau(\pi^0_{\mathbf{Q}})$ auf $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$.

b) Wenn π vom CM-Typ ist, dann haben wir die Darstellung π in 4.5.3 beschrieben. Sie ist von der Form $\pi(\Omega)$, wobei $\Omega : \mathbf{I}_M/M^\times \to \bar{\mathbf{Q}}_l^\times$ ein Größencharakter vom Typ A_0 auf der Ideleklassengruppe der total imaginären quadratischen Erweiterung M/F ist. Dem Größencharakter entspricht ein λ-adischer Charakter $\Omega : \mathrm{Gal}(\bar{Q}/M) \to \bar{\mathbf{Q}}_l^\times$, und wir wählen

$$\tau(\pi) = \tau\big(\pi(\Omega)\big) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/M)}^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)} \Omega.$$

Der Zusatz ist ganz trivial.

Wir gehen nun zum Angriff auf den Satz 4.1 über. Wir beschränken uns auf den Fall $\omega = 1$. Zunächst überlegen wir uns

4.5.8 Hilfssatz. *Es ist $\mathfrak{t}(\pi) = \mathfrak{t}(\pi, 1) = 0$ oder 1. Wenn $\mathfrak{t}(\pi) = 1$, dann gibt es einen Charakter endlicher Ordnung ν' auf $\mathbf{I}_F/F^\times$ und eine cuspidale Form $\pi^0_{\mathbf{Q}}$ auf $GL_2(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$, so daß*

$$\pi \sim (\pi^0_{\mathbf{Q}} \times F) \otimes \nu'^{-1},$$

und so daß

$$\omega_\pi = \alpha^{-n}\tilde{\omega}_\pi = \alpha^{-n} \cdot \nu' \cdot (\nu'^\theta)^{-1}.$$

Beweis. Wir gehen von der in 4.4 beschriebenen Realisierung der Darstellung $\rho(\pi)$ aus. Wenn $\mathfrak{t}(\pi) \neq 0$, dann gibt es ein $0 \neq \phi \in \mathrm{End}(Y)$, so daß für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$ gilt

$$\rho_1(\pi)(\sigma)\phi^T\rho_1(\pi)(\sigma^\theta) = \alpha^{-n-1}(\sigma)\phi. \tag{4.5.8.1}$$

Es ist klar, daß der Kern des Endomorphismus ϕ unter der Operation von $\rho_1(\pi)$ invariant sein muß, also ist ϕ invertierbar. Dann folgt (siehe 4.3)

$$\phi^{-1}\rho_1(\pi)(\sigma)\phi = \rho_1(\pi)(\sigma^\theta)\det\rho_1(\pi)(\sigma^\theta)^{-1} \cdot \alpha^{-n-1}(\sigma). \tag{4.5.8.2}$$

Die Irreduzibilität von $\rho_1(\pi)$ impliziert sofort, daß $\mathfrak{t}(\pi) = 1$ sein muß.

Nun ist $q(\phi,\phi) = \text{ Spur }(\phi^T\phi) = 2\det(\phi) \neq 0$, und es gilt für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}})/\mathbf{Q})$

$$\alpha^{-2n-2}(\sigma)q(\phi,\phi) = q(\rho(\pi)(\sigma)\phi, \rho(\pi)(\sigma)\phi) = \lambda\big(\pi(\sigma)\big)q(\phi,\phi).$$

Das liefert uns nach 4.2, daß die Einschränkung von ω_π auf $\mathbf{I_Q}$ gleich α^{-2n} ist.

Wenn wir also $\omega_\pi = \alpha^{-n} \cdot \tilde{\omega}_\pi$ setzen, dann ist

$$\tilde{\omega}_\pi | \mathbf{I_Q} = 1. \tag{4.5.8.3}$$

Wir wollen zeigen, daß

$$\pi^0 = \pi' \sim \pi \otimes \tilde{\omega}_\pi^{-1}. \tag{4.5.8.4}$$

Um dies zu sehen, wenden wir den starken Satz von der Multiplizität 1 an und zeigen, daß für fast alle Stellen v von F gilt

$$\pi_v^\theta = \pi_v' \sim \pi_v \otimes \tilde{\omega}_{\pi_v}^{-1}.$$

Wir schränken uns auf diejenigen Stellen ein, an denen π_v, π_v' und $F/\mathbf{Q}$ unverzweigt sind. Ist $v = \mathfrak{P}$ eine träge Stelle, so ist die Behauptung ganz trivial. Es ist $\pi_v' \sim \pi_v$ und $\tilde{\omega}_{\pi_v}(p) = 1$ nach (4.5.8.3). An einer zerfallenden Stelle $v = \mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p}\mathfrak{p}' = (p)$ sei $\pi_\mathfrak{p} \sim \pi(\alpha_\mathfrak{p}, \beta_\mathfrak{p})$ und $\pi_{\mathfrak{p}'} = \pi(\alpha_{\mathfrak{p}'}, \beta_{\mathfrak{p}'})$. Dann ist nach 2.4

$$\rho(\pi)(\Phi_\mathfrak{p}^{-1}) \sim p.\begin{pmatrix} \alpha_\mathfrak{p}\alpha_{\mathfrak{p}'} & & & 0 \\ & \alpha_\mathfrak{p}\beta_{\mathfrak{p}'} & & \\ & & \beta_\mathfrak{p}\alpha_{\mathfrak{p}'} & \\ 0 & & & \beta_\mathfrak{p}\beta_{\mathfrak{p}'} \end{pmatrix}.$$

Weil $\mathfrak{t}(\pi) = 1$ ist, muß einer der Eigenwerte gleich p^{n+1} sein, also etwa $\alpha_\mathfrak{p}\alpha_{\mathfrak{p}'} = p^n$. Sind $\varpi_\mathfrak{p}, \varpi_{\mathfrak{p}'}$ lokale Parameter bei $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$, dann ist $\alpha_\mathfrak{p}\beta_\mathfrak{p} = \omega_\pi(\varpi_\mathfrak{p}), \alpha_{\mathfrak{p}'}\beta_{\mathfrak{p}'} = \omega_\pi(\varpi_{\mathfrak{p}'})$ und daher ist, nochmals wegen (4.5.8.3),

$$\alpha_\mathfrak{p}\beta_\mathfrak{p}\alpha_{\mathfrak{p}'}\beta_{\mathfrak{p}'} = \omega_\pi(\varpi_\mathfrak{p}) \cdot \omega_\pi(\varpi_{\mathfrak{p}'}) = \omega_\pi(p) = p^{2n}.$$

Dann ist also auch $\beta_\mathfrak{p}\beta_{\mathfrak{p}'} = p^n$. Also

$$\begin{aligned} \pi_{\mathfrak{p}'} = \pi(\alpha_{\mathfrak{p}'}, \beta_{\mathfrak{p}'}) &\sim \pi(p^n\alpha_\mathfrak{p}^{-1}, p^n\beta_\mathfrak{p}^{-1}) \\ &\sim \pi\big(\beta_\mathfrak{p} p^n \omega_\pi(\varpi_\mathfrak{p})^{-1}, \alpha_\mathfrak{p} p^n \omega_\pi(\varpi_\mathfrak{p})^{-1}\big) \sim \pi(\beta_\mathfrak{p}, \alpha_\mathfrak{p}) \otimes \tilde{\omega}_\pi^{-1}. \end{aligned}$$

Damit ist (4.5.8.4) bewiesen.

Wir argumentieren nun wie in Abschnitt 3. Weil $\tilde{\omega}_\pi | \mathbf{I}_{\mathbf{Q}} = 1$, können wir einen Galoischarakter $\nu' : \mathbf{I}_F / F^\times \to \bar{\mathbf{Q}}_l$ finden mit

$$\tilde{\omega}_\pi^{-1} = \nu' \cdot (\nu'^\theta)^{-1},$$

und dann ist

$$(\pi \otimes \nu')^\theta \sim \pi \otimes \nu'$$

und somit

$$\pi \sim (\pi^0_{\mathbf{Q}} \times F) \otimes \nu'^{-1}.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Ist nun $\pi \in \mathrm{Coh}_0(\mu)$ von der Form

$$\pi \sim (\pi^0_{\mathbf{Q}} \times F) \otimes \nu'^{-1}.$$

dann gilt $\omega_\pi = \omega_{\pi^0_{\mathbf{Q}}} \circ N_{F/\mathbf{Q}} \cdot \nu'^{-2}$. Man kann dann leicht zeigen, daß die Relation

$$(*) \qquad \omega_\pi^{-1} = \nu' \cdot (\nu'^\theta)^{-1}$$

genau dann gilt, wenn, mit ν gleich der Restriktion von ν' auf $\mathbf{I}_{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}^\times$, gilt

$$(**) \qquad \omega_{\pi^0_{\mathbf{Q}}} = \alpha^{-n} \cdot \nu \cdot \eta \ \text{ mit } \ \eta = 1 \ \text{ oder } \ \varepsilon.$$

Um den Beweis von Satz 4.1 zu vollenden, müssen wir zeigen, daß für eine Form $\pi \in \mathrm{Coh}_0(\mu)$ von der Gestalt $\pi \sim (\pi^0_{\mathbf{Q}} \times F) \otimes \nu'^{-1}$, für die auch noch $(*)$ (oder $(**)$) erfüllt ist, gilt

$$\mathfrak{t}(\pi) = 1 \Leftrightarrow \eta = \varepsilon$$

(siehe Definition 2.7).

Wir können nach 4.5.7 und 4.5.6 ansetzen

$$\tau(\pi) = \tau(\pi^0_{\mathbf{Q}})_F \cdot \nu'^{-1},$$

wobei $\tau(\pi^0_{\mathbf{Q}})_F$ die Einschränkung von $\tau(\pi^0_{\mathbf{Q}})$ auf $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$ ist. Wir schreiben im folgenden $\tau_0(\pi) = \tau(\pi^0_{\mathbf{Q}})$. Dann ist für $\phi \in \mathrm{End}(Y)$ und $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$

$$\rho(\pi)(\sigma)\phi = \nu'^{-1}(\sigma)\nu'^{-1}(\sigma^\theta) \cdot \tau_0(\pi)(\sigma) \cdot \phi \cdot {}^T\tau_0(\pi)(\sigma^\theta).$$

Ist also $\rho(\pi)(\sigma)\phi = \alpha^{-n-1}(\sigma)\phi$ für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, so gilt insbesondere für $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$

$$\alpha^{-n-1}(\sigma) \cdot \phi = \nu'^{-1}(\sigma)\nu'^{-1}(\sigma^\theta)\tau_0(\pi)(\sigma) \cdot \phi \cdot {}^T\tau_0(\pi)(\sigma^\theta)$$

oder

$$\phi \cdot \tau_0(\pi)(\sigma^\theta) = \alpha^{n+1}(\sigma)\nu'^{-1}(\sigma)\nu'^{-1}(\sigma^\theta) \cdot \det \tau_0(\pi)(\sigma^\theta) \cdot \tau_0(\pi)(\sigma) \cdot \phi.$$

Nun ist $\det \tau_0(\pi)(\sigma^\theta) = \det \tau_0(\pi)(\sigma)$ (weil $\tau_0(\pi)$ auf $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ definiert ist) und daher

$$\det\tau_0(\pi)(\sigma^\theta) = \alpha^{-1}(\sigma) \cdot \omega_{\pi^0_{\mathbf{Q}}}(\sigma).$$

Die Relation $(**)$ impliziert also, daß

$$\alpha^{n+1}(\sigma)\big(\nu'(\sigma) \cdot \nu'(\sigma^\theta)\big)^{-1} \cdot \det \tau_0(\pi)(\sigma^\theta) = 1$$

für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$. Also ist die Bedingung $\rho(\pi)(\sigma)\phi = \alpha^{-n-1}(\sigma)\phi$ für $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$ mit

$$\tau_0(\pi)(\sigma^\theta) = \tau_0(\pi)(\theta) \cdot \tau_0(\pi)(\sigma) \cdot \tau_0(\pi)(\theta)^{-1} = \phi^{-1} \cdot \tau_0(\pi)(\sigma) \cdot \phi$$

äquivalent. Da $\tau(\pi)$ irreduzibel ist, folgt daraus, daß bis auf einen von Null verschiedenen Faktor gilt

$$\tau_0(\pi)(\theta)^{-1} = \phi.$$

Wenn wir umgekehrt $\phi = \tau_0(\pi)(\theta)^{-1}$ wählen, dann gilt für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$, daß $\rho(\pi)(\sigma)\phi = \alpha^{-n-1}(\sigma)\phi$. Dann ist aber auch klar, daß

$$\rho(\pi)(\theta)\phi = \pm\alpha^{-n-1}(\theta) \cdot \phi.$$

Wir müsen zeigen, daß genau dann das positive Vorzeichen vorliegt, wenn $\eta = \varepsilon$ ist. Es ist nach 4.5.6

$$\begin{aligned}
\rho(\pi)(\theta)\big(\tau_0(\pi)(\theta)^{-1}\big) &= -{}^T\big(\tau_0(\pi)(\theta)^{-1}\big) \cdot {}^T\tau_0(\pi)(\theta^2) \cdot \nu'(\theta^2)^{-1} \\
&= -{}^T\big(\tau_0(\pi)(\theta^2) \cdot \tau_0(\pi)(\theta)^{-1}\big) \cdot \nu'(\theta^2)^{-1} \\
&= -\tau_0(\pi)(\theta^{-1}) \cdot \det \tau_0(\pi)(\theta) \cdot \nu'(\theta^2)^{-1}.
\end{aligned}$$

Nun ist $\theta^2 \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$ und in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{I}_F/F^\times \arrow[d] & \mathbf{I}_{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}^\times \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}/F)^{\mathrm{ab}} & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})^{\mathrm{ab}} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

ist die Klasse von θ^2 in $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)^{\mathrm{ab}}$ gerade das Bild der Klasse $\theta \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})^{\mathrm{ab}}$. Wenn wir also die Restriktion ν von ν' auf $\mathbf{I}_{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}^\times$ als Galoischarakter lesen, dann ist $\nu'(\theta^2) = \nu(\theta)$. Damit ist dann gezeigt, daß $\mathfrak{t}(\pi) = 1$ genau dann, wenn in $(**)$ der Faktor $\eta = \varepsilon$ ist.

Jetzt haben wir den Satz 4.1 bewiesen und damit den Beweis der entscheidenden Aussagen von §2, die die $\pi \in \mathrm{Coh}_0(\mu)$ betrafen, auf den Beweis von Satz 2.4 zurückgeführt.

4.6. Wir haben noch 2.10 und 2.11 zu diskutieren. Wegen Lemma 3.7 läuft das darauf hinaus, 2.10 zu beweisen.

Wir betrachten eine Komponente von S_K, die dann über einer abelschen Erweiterung von $\mathbf{Q}$ definiert ist und die als komplexe Mannigfaltigkeit von der Form

$$\Gamma\backslash\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$$

ist. Darauf können wir holomorphe Modulformen $f(z_1, z_2)$ des Gewichtes (k_1, k_2) betrachten

$$f\left(\frac{az_1 + b}{cz_1 + d}, \frac{a'z_2 + b'}{c'z_2 + d'}\right) = f(z_1, z_2) \cdot (cz_1 + d)^{k_1} \cdot (c'z_2 + d')^{k_2}.$$

Diese Modulformen können als Schnitte in einem holomorphen Linienbündel

$$L(k_1, k_2) = L_1^{k_1} \otimes L_2^{k_2}$$

auf $\Gamma\backslash\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ betrachtet werden. Diese Linienbündel sind aber auch algebraische Bündel, weil man bekanntlich mit Hilfe der obigen Modulformen die algebraische Struktur definiert. Es ist dann ferner klar, daß die Chernklassen von L_1 und L_2 durch die invarianten Formen

$$\omega_1 = \frac{dz_1 d\bar{z}_1}{y_1^2}, \quad \omega_2 = \frac{dz_2 d\bar{z}_2}{y_2^2}$$

repräsentiert werden und damit folgt, daß über $\mathbf{C}$ alle Klassen $\pi \in \mathrm{Coh}_e(1)$ Zyklen entsprechen. Der Rest ist dann ganz trivial.

4.7. Zum Schluß dieses Abschnittes wollen wir noch kurz das Erreichte bewerten und insbesondere einige Probleme diskutieren, die wir offen gelassen haben. Dabei wollen wir 2.4 als schon bewiesen ansehen. Wir haben gesehen, daß für $\pi \in \mathrm{Coh}_0(1)$ alle Tateklassen über einer abelschen Erweiterung durch Zykeln gegeben sind, und zwar durch die Hirzebruch-Zagier-Zykeln.

Wenn nun $\pi \in \mathrm{Coh}_0(1)$, dann können wir uns fragen, ob diese Klasse über nichtabelschen Erweiterungen Zyklen zuläßt. D. h. wir zerlegen wie in §2

$$\mathbf{H}^2(\bar{S}_K \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}})(\pi_f) = W(\pi_f) = X^{(2)}(\pi_f)$$

und fragen, ob es eine endliche Erweiterung $L/\mathbf{Q}$ gibt, so daß

$$\mathfrak{t}(\pi, L) = dim \left\{ \xi \in X^{(2)}(\pi_f) \;\middle|\; \begin{array}{l} \rho(\pi)(\sigma)\xi = \alpha^{-1}(\sigma)\xi \\ \text{für alle } \ \sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/L \end{array} \right\} > 0.$$

Aus 4.5.4 folgt nun, daß für $\pi \in \mathrm{Coh}_0(1)$, die nicht vom CM-Typ sind, dann höchstens (für beliebig große L) gelten kann

$$\mathfrak{t}(\pi, L) = 1,$$

und dann ist klar, daß diese Tateklassen schon über einer abelschen Erweiterung von $\mathbf{Q}$ existieren. In diesem Fall ist unsere Antwort also vollständig.

Nun sei $\pi \in \mathrm{Coh}_0(1)$ vom CM-Typ. Wir haben schon gesehen (siehe 4.5.3), daß es dann eine imaginär quadratische Erweiterung L/F gibt, so daß $\pi = \pi(\Omega)$ mit einem Größencharakter Ω vom Typ A_0 auf $\mathbf{I}_L/L^\times$. Wir wollen die Situation noch etwas genauer beschreiben:

Wir haben zwei Einbettungen $i, i' : F \to \mathbf{R}$, wir fixieren $\tau, \tau' : L \to \mathbf{C}$ mit $\tau|F = i$ und $\tau'|F = i'$. Da $\pi \in \mathrm{Coh}_0(1)$ ist, ist die Darstellung in beiden Komponenten die erste Darstellung der diskreten Reihe, und dann folgt für die Komponente Ω_∞ auf $\mathbf{I}_{L,\infty} = L_\tau \times L_{\tau'}$, daß ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$\Omega_\infty(z, z') = zz'.$$

Jetzt wissen wir aus 4.5.7 und 4.5.6, daß wir

$$\rho_1(\pi) = \tau(\pi) = \pi\bigl(\pi(\Omega)\bigr) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/L)}^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)} \Omega$$

wählen können, wobei jetzt Ω als λ-adischer Größencharakter auf $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/L)$ interpretiert wird.

Wir wählen wieder einen Automorphismus $\theta \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, der auf $F/\mathbf{Q}$ nicht die Identität ist. Dieser Automorphismus konjugiert den Körper L in eine quadratische Erweiterung L^0/F. Wir haben damit

$$\begin{tikzcd}
L^\theta \arrow[r, "\theta^{-1}"] & L \arrow[r, shift left, "\tau"] \arrow[r, shift right, "\tau'"'] & \mathbf{C} \\
F \arrow[u] \arrow[r, "\theta^{-1}"] & F \arrow[u] \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "i'"'] & \mathbf{R} \\
\mathbf{Q} \arrow[u] \arrow[r, "\sim"] & \mathbf{Q} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

wieder zwei Einbettungen $\tau \circ \theta^{-1} = \tau^\theta$ und τ'^θ. Wir können jetzt natürlich den Größencharakter Ω^θ auf $\mathbf{I}_{L^\theta}/(L^\theta)^\times$ als $\Omega \circ \theta^{-1}$ definieren und haben dann

$$\pi\big(\Omega^\theta\big) = \pi^\theta = \pi'$$

in der früheren Notation, und es ist

$$\tau\big(\pi(\Omega)\big)(\sigma^\theta) = \tau\big(\pi(\Omega^\theta)\big)(\sigma).$$

Es ist klar, daß die Darstellung $\rho(\pi)$ nach Einschränkung auf $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/L \cdot L^\theta)$ eine Summe von 4 Größencharakteren vom Typ A_0 auf $L \cdot L^\theta$ wird. Diese Charaktere sind die Produkte der Einschränkungen

$$\Omega\Omega^\theta,\ \Omega\bar{\Omega}^\theta,\ \bar{\Omega}\Omega^\theta,\ \bar{\Omega}\bar{\Omega}^\theta;$$

dabei notieren wir mit $^-$ die komplexen Konjugationen auf L und L^θ. Man sieht nun sehr leicht, daß keiner dieser vier Größencharaktere auf LL^θ im Unendlichen vom Typ α^{-1} sein kann, wenn $L \neq L^\theta$. In diesem Fall bekommen wir also keine Tateklassen über irgendeiner Erweiterung von $\mathbf{Q}$. Für unsere Zwecke ist also nur der Fall $L = L^\theta$ von Interesse.

Nun gibt es zwei mögliche Fälle. Entweder ist $L/\mathbf{Q}$ zyklisch vom Grad 4 oder $L/\mathbf{Q}$ ist biquadratisch. Eine einfache Analyse der Typen der Charaktere zeigt, daß im zyklischen Fall keiner der vier oben aufgelisteten Charaktere vom Typ α^{-1} ist, also haben wir auch in diesem Fall keine Tateklassen.

Es bleibt also der Fall, daß $L/\mathbf{Q}$ biquadratisch ist. Dann haben wir ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & L & \\
L_0 \arrow[ur] & L_1 \arrow[u, dash] & F, \arrow[ul] \\
 & \mathbf{Q} \arrow[ul] \arrow[u, dash] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

wobei L_0, L_1 imaginär quadratisch über $\mathbf{Q}$ sind und wobei $\theta|L_0 = \mathrm{Id}$ sei. Wir nehmen eine weitere Normalisierung vor, indem wir eine Einbettung $\tau_0 : L_0 \to \mathbf{C}$ fixieren und annehmen, daß τ und τ' die durch $i, i' : F \to \mathbf{R}$ induzierten Erweiterungen von τ_0 auf L sind. Dann sind die Größencharaktere $\Omega\bar{\Omega}^\theta$ und $\bar{\Omega}\Omega^\theta$ aus den obigen vier Charakteren diejenigen vom Typ α^{-1}. Wie schon oben gesagt wurde, zerfällt $\rho(\pi)$ über L in 4 eindimensionale Darstellungen, und die beiden Eigenräume zu $\Omega\bar{\Omega}^\theta$ und $\bar{\Omega}\Omega^\theta$ spannen einen zweidimensionalen unter $\rho(\pi)$ invarianten Teilraum $X_t(\pi_f)$ von $X(\pi_f)$ auf.

Es ist klar, daß als Galoismodul

$$X_t(\pi_f)\mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/L_1)}^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})}\alpha^{-1}\chi,$$

wobei χ ein Charakter endlicher Ordnung auf $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/L_1)$ ist. Über der χ entsprechenden Erweiterung $L_1(\chi)$ von L_1 besteht $X_t(\pi_f)$ aus Tateklassen. Diese Erweiterung ist genau dann abelsch über $\mathbf{Q}$, wenn $\chi = \chi^\theta$, denn θ induziert auch den nichttrivialen Automorphismus von $L_1/\mathbf{Q}$.

Man kann nun leicht ein Beispiel konstruieren, bei dem $\chi \neq \chi^\theta$ ist; dafür genügt schon, daß

$$\Omega\bar{\Omega}^\theta \neq \bar{\Omega}\Omega^\theta \text{auf } \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/L)$$

ist. Wenn man nun auf $L_0/\mathbf{Q}$ einen Größencharakter Ω_0 vom Typ z wählt, dann ist der allgemeine Charakter Ω von der Form

$$\Omega = \Omega_0 \circ N_{F/L_0} \cdot \mu$$

mit einem Dirichletcharakter μ, und dann haben wir μ so zu wählen, daß

$$\mu\bar{\mu}^\theta \neq \bar{\mu}\mu^\theta.$$

Daß es solche Charaktere μ geben muß, sieht man leicht, wenn man sich die Operation von $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ auf der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/L)^{\mathrm{ab}}$ ansieht.

Damit haben wir gesehen, daß es auf einer Hilbertschen Modulfläche in der l-adischen Kohomologie Tateklassen geben kann, die nicht durch unsere Konstruktion von Zykeln erfaßt werden, die also nicht von Hirzebruch-Zagier-Zykeln herkommen.

In seiner Arbeit [26] zeigt Oda, daß man die Existenz dieser Zykeln unter gewissen Bedingungen aus der Gültigkeit der Hodge-Vermutung ableiten kann. Er zeigt dies, indem er Relationen zwischen speziellen Werten von L-Funktionen benutzt, um Relationen zwischen transzendenten Periodenintegralen herzustellen, die dann für gewisse Klassen in $H^{1,1}$ die Rationalität implizieren. Es ist anzunehmen, daß dieser Ansatz allgemein funktioniert, und wir hoffen, diesen Punkt bei einer späteren Gelegenheit zu behandeln.

Es sei an dieser Stelle eine vergleichende Bemerkung zu der Arbeit von Oda [26] erlaubt, der ja die gleiche Fragestellung behandelt. Man kann sagen, daß Oda die Hodge-Realisierung des zu Grunde liegenden Motivs studiert, während wir die l-adische Realisierung betrachten. Er ist erfolgreicher in der Konstruktion von Zykeln, weil ein Hodge-Zykel algebraisch ist und daher zunächst für eine Kohomologieklasse Hodge-Klasse zu sein mehr aussagt, als Tate-Klasse zu sein. Wir sind erfolgreicher, wenn es darum geht, die Existenz von Zykeln auszuschließen, weil es für Oda schwer ist, nachzuweisen, daß eine Klasse nicht rational ist.

4.8. Wir wollen noch einige Bemerkungen zur Tate-Vermutung und Picardzahl für Hilbertsche Modulflächen zur vollen Hilbertschen Modulgruppe machen. Diese Frage wird auch schon von Oda in seinem Buch am Ende diskutiert und zum Teil beantwortet ([26], §18, Theorem C und Korollar).

In der Gruppe $GL_2\big(\mathbf{A}_f(F)\big)$ der endlichen Adele betrachten wir die maximal kompakte Untergruppe

$$K_0 = \prod_p GL_2(\hat{\mathcal{O}}_p)$$

und studieren die Modulfläche $S_{K_0}/\mathbf{Q}$ für die

$$S_{K_0}(\mathbf{C}) = GL_2(F)\backslash GL_2\big(\mathbf{A}(F)\big)/K_\infty K_0.$$

Diese Fläche hat mehrere Komponenten, die den Elementen der Idealklassengruppe im engeren Sinne entsprechen und die alle über $\mathbf{Q}$ definiert sind. Die einzelnen Komponenten sind von der Form

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}\backslash\mathfrak{H}\times\mathfrak{H},$$

wobei $\mathfrak{a}$ ein gebrochenes Ideal in F ist und

$$\Gamma_{\mathfrak{a}} = \left\{\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_F) | c \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{a}^{-1}\right\}.$$

Wir fragen uns nun, unter welchen Umständen es in der l-adischen Kohomologie Tate-Klassen in $\mathbf{H}^2(S_{K_0}\times\bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_l)$ geben kann, die nicht durch Hirzebruch-Zagier-Zykeln oder universelle Chern-Klassen gegeben sind. Ist die Antwort negativ, so wissen wir, daß die erste Aussage der Tate-Vermutung richtig ist und daß die zweite über auflösbaren Erweiterungen gilt. Dann können wir auch die Picardzahl bestimmen, weil die automorphen Formen, die zu den Tate-Klassen beitragen, ausgezeichnet sind, und diese können wir dann leicht abzählen.

Wir wissen, daß Tate-Klassen, die nicht über einer abelschen Erweiterung definiert sind, zu automorphen Formen vom CM-Typ gehören. Wir wollen sie daher diedrale CM-Klassen nennen. (Es gibt auch abelsche CM-Klassen.) Wann können solche diedralen Klassen auf S_{K_0} existieren?

Notwendig dafür ist, daß wir ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& L = \mathbf{Q}(\sqrt{-d_1}, \sqrt{d}) & \\
\mathbf{Q}(\sqrt{-d_1}) \arrow[ur] & \mathbf{Q}(\sqrt{-dd_1}) \arrow[u, dash] & \mathbf{Q}(\sqrt{d}) = F \arrow[ul] \\
& \mathbf{Q} \arrow[ul] \arrow[u, dash] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

und einen Größencharakter

$$\Omega : \mathbf{I}_L / L^\times \to \bar{\mathbf{Q}}_l^\times$$

vom Typ $z \cdot z'$ haben. Damit $\pi(\Omega)$ unverzweigt ist, d.h. überall in der unverzweigten Hauptserie liegt, muss gelten ([19], Theorem 4.6), daß L/F und der Charakter Ω unverzweigt sind. Das stellt schon zwei beträchtliche Hindernisse dar. Wir wählen d, d_1 wie üblich ganz und quadratfrei; dann ist L/F genau dann unverzweigt, wenn $d_1 | d$ und $-\frac{d}{d_1} \equiv 1 \bmod 4$. Das impliziert

4.8.1. Wenn $d = p$ eine Primzahl mit $p \equiv 1 \pmod 4$ ist, dann gibt es keine diedralen CM-Tate-Klassen.

Es ist ferner klar, daß es Probleme mit der Konstruktion von Ω gibt. Mit unseren früheren Notationen gibt es genau dann einen unverzweigten Größencharakter Ω, wenn für jede Einheit $\eta \in \mathcal{O}_L^\times$ gilt

$$\tau(\eta) \cdot \tau'(\eta) = \eta \cdot \eta^\theta = 1$$

(siehe 4.7). Es ist also klar, daß eine weitere notwendige Bedingung durch die Forderung gegeben ist, daß die Norm der Grundeinheit in F gleich 1 ist.

Nun wird die Situation etwas amüsanter, denn der Körper L kann mehr Einheiten enthalten als der Körper F. Zum anderen haben wir θ so fixiert, daß $\theta | L_0 = Id$, und damit war der Typ – nämlich die Auswahl von τ und τ' – bis auf Konjugation festgelegt. Wir haben aber zwei Möglichkeiten, L_0 zu wählen, und das gibt zwei unter der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ inäquivalente Möglichkeiten für den Typ von Ω. Es zeigt sich, daß dann auch die Frage nach der Existenz unverzweigter Charaktere Ω unterschiedlich ausfällt. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel:

4.8.2. Sei $p \equiv 3$ mod 4 eine Primzahl. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Q} = (\sqrt{-p}, \sqrt{p}) = L & \\
L_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{-p}) \arrow[ur] & \mathbf{Q}(\sqrt{-1}) \arrow[u, dash] & \mathbf{Q}(\sqrt{p}) = F. \arrow[ul] \\
 & \mathbf{Q} \arrow[ul] \arrow[u, dash] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

In diesem Fall ist die Norm der Grundeinheit ε von F positiv, aber L enthält auch noch $\eta = i\varepsilon$. Nun ist aber θ auf $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ $nicht$ trivial, also ist

$$\eta \cdot \eta^\theta = i\varepsilon \cdot (-i)\varepsilon' = 1,$$

d.h. es gibt einen unverzweigten Charakter des vorgegebenen Typs. (Dies wäre nicht der Fall, wenn wir die beiden imaginär quadratischen Erweiterungen vertauschen würden.)

Nun taucht aber noch ein weiteres Probelm auf. Kann man zusätzlich den Charakter Ω so wählen, daß die Darstellung von $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ auf dem Modul $X_t(\pi_f)$ nicht abelsch wird? Dafür ist hinreichend, daß $\Omega\bar{\Omega}^\theta \neq \bar{\Omega}\Omega^\theta$ auf $\mathbf{I}_L/L^\times$, aber es ist etwas mühsam festzustellen, ob man das Ω so wählen kann. Zum andern ist es auch nicht klar, daß diese Wahl notwendig ist, wenn man eine diedrale Klasse konstruieren will, weil man die Charaktere noch von $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/L)$ auf $\mathrm{Gal}\big(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(\sqrt{-1})\big)$ fortsetzen muß. Wir lassen also die Frage offen, ob es für $F = \mathbf{Q}(\sqrt{p})$ mit $p \equiv 3 \pmod 4$ diedrale Klassen geben kann. Sie sollte aber leicht zu entscheiden sein.

4.8.3. Nach Durchsicht der Tabellen scheint das einfachste Beispiel für das Auftreten von diedralen Tateklassen in folgendem Fall vorzuliegen:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Q}(\sqrt{161}, \sqrt{-7}) = L & \\
L_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{-7}) \arrow[ur] & L_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{-23}) \arrow[u, dash] & \mathbf{Q}(\sqrt{161}) = F. \arrow[ul] \\
 & \mathbf{Q} \arrow[ul] \arrow[u, dash] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Der Körper L wird dadurch erhalten, daß wir aus der negativen Grundeinheit $-\varepsilon$ die Wurzel $\eta = \sqrt{-\varepsilon}$ ziehen, d.h. $L = \mathbf{Q}(\sqrt{161}, \sqrt{-\varepsilon})$. Dann ist $\mathbf{Q}(\sqrt{-7})$ der von $\eta + \frac{1}{\eta}$ erzeugte Körper, d.h. $\eta \cdot \eta^\theta = 1$. Die 23 zerfällt in $\mathbf{Q}(\sqrt{-7})$, also

$$23 \cdot \mathbf{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right] = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'.$$

Wir können nun einen Größencharakter Ω_0 vom Typ z auf $\mathbf{I}_{\mathbf{Q}(\sqrt{-7})}$ konstruieren, der überall unverzweigt ist, bis auf die Stelle $\mathfrak{p}$, dort aber auf den Quadraten der Einheiten verschwindet. Dann ist $\Omega' = \Omega_0 \circ N_{L/L_0}$ ein unverzweigter Größencharakter vom Typ $z \cdot z'$ auf L, weil L an den Stellen $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ verzweigt ist und nur die Quadrate der Einheiten Normen sind.

Nun hat $\mathbf{Q}(\sqrt{-23})$ die Klassenzahl 3, und seine Idealklassengruppe wird injektiv in die Idealklassengruppe von L abgebildet. Ist μ ein unverzweigter Dirichletcharakter auf der Idealklassengruppe von L, der auf dem Bild der Idealklassengruppe von $\mathbf{Q}(\sqrt{-23})$ nicht trivial ist, dann liefert die automorphe Form $\pi(\Omega'\mu)$ diedrale Klassen vom CM-Typ. Die Zyklen sind frühestens über dem Hilbertschen Klassenkörper von $\mathbf{Q}(\sqrt{-23})$ definiert.

Der Körper $F = \mathbf{Q}(\sqrt{161})$ hat die Klassenzahl 1, aber die Klassenzahl im engeren Sinne ist 2. Deswegen ist unter den vorliegenden Umständen

$$S_{K_0}(\mathbf{C}) = GL_2(F)\backslash GL_2\big(\mathbf{A}(F)\big)/K_\infty K_0 \cong SL_2(\mathcal{O})\backslash\mathfrak{H}\times\mathfrak{H} \cup SL_2(\mathcal{O})\backslash\mathfrak{H}^-\times\mathfrak{H},$$

wobei $\mathfrak{H}^-$ eine untere Halbebene ist.

Wir haben es hier mit einem Phänomen des Signaturdefekts zu tun: die beiden Komponenten sind homöomorph, aber die Signaturen der Spitzenbeiträge sind unterschiedlich (siehe [16], Corollary 3.3). Es scheint so zu sein, daß die diedralen CM-Klassen auf der Komponente $SL_2(\mathcal{O})\backslash\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ konzentriert sind, weil wir einen Überschuß an (1, 1)-Formen haben. Wenn man zu einer symmetrischen Modulfläche übergeht, wird es anscheinend sehr viel schwieriger, diedrale CM-Tateklassen zu konstruieren.

§5. BEGINN DES BEWEISES VON SATZ 2.4: KOHOMOLOGISCHE BETRACHTUNGEN[1]

[1] Wir ändern die Notation jetzt ein wenig, weil wir nur noch die geometrischen Objekte betrachten. Wir schreiben statt $S \times_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}$ einfach S usw. D.h. von nun an ist

$$H^{\cdot}(S,\mathcal{V}) \overset{\mathrm{Def}}{=} H^{\cdot}(S\times_{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{Q}},\mathcal{V}) \text{ usw.}$$

Die Schnittkohomologiegruppen sind die Hyperkohomologiegruppen des in geeigneter Weise kanonisch abgeschnittenen vollen direkten Bildes $j_{!*}\mathcal{V}$ in der derivierten Kategorie ([7], 2.2).

5.1 Lemma. *Es sei $j : S \to \tilde{S}$ die offene Einbettung. Dann ist*

$$j_{!*}\mathcal{V} = j_*\mathcal{V}.$$

(Gleichheit in der entsprechenden derivierten Kategorie.)

Es sei $\tilde{S}'$ das Komplement der Doppelpunkte in S^∞. Wir faktorisieren j.

$$S \underset{j'}{\hookrightarrow} \tilde{S}' \underset{j''}{\hookrightarrow} \tilde{S}.$$

Das intermediäre direkte Bild $j_{!*}\mathcal{V}$ entsteht durch kanonisches Abschneiden von $Rj''_*(j'_*\mathcal{V})$ ([7], loc. cit.). Die Behauptung von 5.1 lautet also

5.1′ Lemma. $R^1 j''_*(j'_*\mathcal{V}) = 0.$

Als Gruppe über $\bar{\mathbf{Q}}$ ist G ein Produkt $GL(2) \times GL(2)$, und die Darstellung μ ist das Tensorprodukt von zwei irreduziblen Darstellungen von $GL(2)$. Wir bezeichnen die gemeinsame Dimension dieser Darstellungen mit m.

5.2 Hilfsatz. *a) Falls y ein glatter Punkt des Divisors S^∞ ist, so ist*

$$\begin{aligned} dim\, j_*\mathcal{V}_y = dim\, R^1 j_*\mathcal{V} &= m, \\ R^i j_*\mathcal{V}_y &= 0 \text{ für } i \geqq 2. \end{aligned}$$

b) Falls y ein singulärer Punkt des Divisors S^∞ ist, so ist

$$\begin{aligned} &dim\, j_*\mathcal{V}_y = 1, \quad dim\, R^1 j_*\mathcal{V}_y = 2,\ dim\, R^2 j_*\mathcal{V}_y = 1, \\ &R^i j_*\mathcal{V}_y = 0 \text{ für } i \geq 3. \end{aligned}$$

Bevor wir den Beweis von 5.1 und 5.2 angehen, machen wir eine Bemerkung über die Spezialisierung von Kohomologiegruppen. Ganz allgemein betrachten wir ein Diagramm folgender Art:

$$\begin{tikzcd} X = \tilde{X}\backslash Y \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \tilde{X} \arrow[d, "\tilde{f}"] & Y \arrow[l, hook'] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Dabei ist $\tilde{f}$ ein eigentlicher und glatter Morphismus und Y ein relativer Divisor mit normalen Schnitten, von dem wir der Einfachheit halber annehmen, daß er die Vereinigung von glatten Divisoren ist: $Y = \bigcup\limits_i Y_i$. Wir bezeichnen mit Y_J bzw. Y_J^* die abgeschlossenen bzw. offenen Strata

$$Y_J = \bigcap_{i\in J} Y_i,\ Y_j^* = Y_J \backslash \bigcup_{\substack{J'\supset J\\ \neq}} Y_{J'}.$$

Es sei $\mathcal{V}$ eine lokal konstante $\mathbf{Q}_l$-Garbe auf X (l invertierbar auf S), die zahm verzweigt entlang Y ist. Die letzte Voraussetzung ist automatisch erfüllt, wenn die allgemeinen Punkte von S in der Charakteristik 0 liegen. Dann gilt:

(I) Für alle i ist $R^i j_*\mathcal{V}$ lokal konstant auf Y_J^* und zahm verzweigt entlang $Y_J\backslash Y_J^*$.

(II) Folglich ist $\tilde{f}$ lokal azyklisch bezüglich $R^i j_*\mathcal{V}$.

(III) Die Bildung von $R^i j_*\mathcal{V}$ und $R^i f_*\mathcal{V}$ und $R^i f_!\mathcal{V}$ ist kompatibel mit Baiswechsel. Die letztern beiden Garben sind lokal konstant auf S.

(Die Behauptungen (I) und (III) sind in SGA 4 1/2, App. au Th. finitude, 1.3.3 und 2.4 enthalten; die Behauptung (II), die wie loc. cit. 1.3.3 bewiesen wird, wurde uns von Deligne mitgeteilt.)

Diese Bemerkung hat die erste Behauptung von 2.4′ zur Folge. Weiterhin erlaubt sie es uns, die Aussagen 5.1′ und 5.2 nur über dem allgemeinen Punkt von $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_{(p)})$ zu betrachten und dann topologisch zu beweisen, wie wir der Anschaulichkeit halber vorziehen. Wir werden die auftretenden Kohomologiegruppen als Gruppenkohomologie deuten. Es möge y über der Spitze s liegen und zwar in dem zu dem Kegel σ aus $\Sigma(s)$ gehörigen Teil (vgl. 1.6). Wir bezeichnen wieder mit x_λ, x_μ die Koordinaten (obgleich wir mit dem Symbol μ bereits die Darstellung von G bezeichnet hatten). Wenn y ein glatter Punkt von S^∞ ist, ist genau eine der beiden Koordinaten Null, sagen wir x_λ. Wenn y ein singulärer Punkt von S^∞ ist, so sind beide Koordinaten Null. Es gibt ein $g \in G(\mathbf{A}_f)$, so daß eine Umgebung von y in $S(\mathbf{C})$ von einer offenen Menge in

$$\mathfrak{H}\times\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\times\mathfrak{H}\times g = G(\mathbf{R})/K_\infty \times g$$

überlagert ist.

Falls y ein singulärer Punkt von S^∞ ist, so gibt es ein kofinales System von Umgebungen, so daß das Überlagerungsgebiet U in $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ folgende Eigenschaften hat:

(i) U ist invariant bezüglich der Translationen $(z_1, z_2) \to (z_1 + u_1, z_2 + u_2), u_1, u_2 \in \mathbf{R}$.

(ii) Es gibt eine Einbettung $\alpha : n \to \big(\alpha_1(n), \alpha_2(n)\big)$ von $N(s) \subset \mathbf{R}\oplus\mathbf{R}$, so daß die Überlagerungsgruppe aus den Transformationen $(z_1, z_2) \to \big(z_1 + \alpha_1(n), z_2 + \alpha_2(n)\big)$ besteht.

(iii) Es sei $\alpha(\lambda) = (a_1, a_2)$ und $\alpha(\mu) = (b_1, b_2)$. Es seien x_λ, x_μ definiert durch:

$$e^{2\pi i z_j} = x_\lambda^{aj} x_\mu^{b_j}.$$

Dann wird (z_1, z_2) auf den Punkt mit den Koordinaten x_λ, x_μ abgebildet.

(iv) Es gilt $a_j > 0, b_j > 0$, und es gibt eine Zahl $\varepsilon > 0$, so daß (z_1, z_2) dann und nur dann in U liegt, falls

$$|e^{2\pi i z_j}| = u_\lambda^{a_j} u_\mu^{b_j}, \quad j = 1, 2$$

mit $0 < u_\lambda, u_\mu < \varepsilon$.

Wenn y glatt ist, ist U nur bezüglich der Translation

$$(z_1, z_2) \to (z_1 + iua_1, z_2 + iua_2), \quad u \in \mathbf{R},$$

invariant. Die Überlagerungsgruppe ist nicht mehr $N(s)$, sondern $N_\lambda(s) = \mathbf{Z}\lambda$, und die Bedingung (iv) ersetzt durch

$$|e^{2\pi i z_j}| = u_\lambda^{a_j} \cdot u_\mu^{b_j},$$

$$0 < |x_\lambda| < \varepsilon, \quad \frac{u_\mu}{|x_\mu(y)|} < \varepsilon.$$

Das Gebiet U ist einfach-zusammenhängend. Das lokale System $\mathcal{V}$ erhält man durch die mittels Einschränkung der Darstellung μ auf

$$N(s) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2(n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ bzw. } N_\lambda(s)$$

entstehende Darstellung der Überlagerungsgruppe.

Beweis von 5.2 a) $N_\lambda(s) \cong \mathbf{Z}$ ist schräg eingebettet in $GL(2) \times GL(2)$. Die Behauptung ergibt sich als leichte Folge der Clebsch-Gordan'schen Regel.

b) Wir benutzen die Hochschild-Serre-Spektralsequenz, die zu der folgenden exakten Sequenz gehört:

$$0 \to N_\lambda(s) \to N(s) \to N_\mu(s) \to 0.$$

Wir bezeichnen mit V die Darstellung μ von G. Zunächst ist wegen der Irreduzibilität von V

$$dim\, H^0(N_\mu(s), H^0\big(N_\lambda(s), V)\big) = dim\, H^1\big(N_\mu(s), H^1(N_\lambda(s), V)\big) = 1.$$

Weil Invarianten und Koinvarianten die gleiche Dimension haben, sind die extremen Glieder der folgenden exakten Sequenz eindimensional:

$$0 \to H^1\big(N_\mu(s), H^0(N_\lambda(s), V)\big) \to H^1\big(N(s), V\big) \to H^0\big(N_\mu(s), H^1\big(N_\lambda(s), V)\big) \to 0.$$

Damit ist b) bewiesen. q.e.d.

Beweis von 5.1′. Wegen 5.2 kennen wir den Limes der Leray-Spektralsequenz

$$R^p j''_* R^q j'_* \mathcal{V} \Rightarrow R^{p+q} j_* \mathcal{V}.$$

Dei Spektralsequenz liefert die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow R^1 j''_*(j'_*\mathcal{V}) \longrightarrow R^1 j_*\mathcal{V} \xrightarrow{\alpha} j''_* R^1 j'_* \mathcal{V}.$$

Wir zeigen, daß α ein Isomorphismus ist und infolgedessen einen tivialen Kern hat. Zu diesem Zweck bedienen wir uns eines Diagramms, dessen Kommutativität aus [10], 1.7.9 folgt.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1\big(N_\mu(s), H^0\big(N_\lambda(s), V\big)\big) & \longrightarrow & R^1 j_* \mathcal{V}_\gamma & \longrightarrow & H^0\big(N_\mu(s), H^1\big(N\lambda(s), V\big)\big) & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow \alpha & & \big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^0\big(N_\lambda(s), H^1\big(N_\mu(s), V\big)\big) & \longrightarrow & j''_* R^1 j'_* \mathcal{V}_\gamma & \longrightarrow & H^0\big(N_\mu(s), H^1\big(N_\lambda(s), V\big)\big) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Dabei ist der Pfeil links induziert von der identischen Abbildung von V. Falls wir berücksichtigen, daß $N(s)$ kommutativ ist, sehen wir sofort ein, daß der Pfeil links ein Isomorphismus ist. q.e.d.

Unser nächstes Ziel ist es, die Schnittkohomologiegruppen durch die Kohomologie der Erweiterung $j_{!*}\mathcal{V} = j_*\mathcal{V}$ auf $\tilde{S}$ auszudrücken. Wir bezeichnen diese Erweiterung wider einfach mit $\mathcal{V}$.

5.3 Proposition. *(I) Für $0 \leqq i \leqq 4, i \neq 2$, gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\mathbf{H}^i(\bar{S}, \mathcal{V}) \cong H^i(\tilde{S}, \mathcal{V}).$$

(II) Es gibt eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathbf{H}^2(\bar{S}, \mathcal{V}) \to H^2(\tilde{S}, \mathcal{V}) \to H^2(S^\infty, \mathcal{V}) \to 0.$$

Diese exakte Sequenz ist $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$*-äquivariant und besitzt eine* $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$*-äquivariante Zerfällung durch*

$$
\begin{tikzcd}
H^2_{S_\infty}(\tilde S, \mathcal{V}) \arrow[d, hook] \arrow[drr, dashed, "\sim"] & & \\
H^2(\tilde S, \mathcal{V}) \arrow[rr] & & H^2(S^\infty, \mathcal{V}) \to 0.
\end{tikzcd}
$$

Beweis. (I) Für $i = 0$ ist offenbar

$$H^0(\tilde S, j_* \mathcal{V}) \xrightarrow{\sim} H^0(S, \mathcal{V}) = \mathbf{H}^0(\bar S, \mathcal{V}).$$

Die Leray-Spektralsequenz für j liefert eine exakte Sequenz

$$0 \to H^1(\tilde S, j_* \mathcal{V}) \to H^1(S, \mathcal{V}).$$

Wegen 1.9 ist $H^1(S, \mathcal{V}) = \mathbf{H}^1(S, \mathcal{V}) = 0$. Daraus folgt die Behauptung für $i = 1$. Sie besagt

$$\mathbf{H}^1(S, \mathcal{V}) = 0 = H^1(\tilde S, \mathcal{V}).$$

Die Behauptungen bezüglich $i = 3, 4$ folgen jetzt aus der Poincarédualität.

(II) Wir benutzen den in 1.8 gegebenen Ausdruck für $\mathbf{H}^2(\bar S, \mathcal{V})$. Wegen (I) erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \to H^1(S^\infty, \mathcal{V}) \to H^2_c(S, \mathcal{V}) \to H^2(\tilde S, \mathcal{V}) \to H^2(S^\infty, \mathcal{V}) \to 0.$$

Wir arbeiten wieder topologisch und benutzen das folgende Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten.

(5.3.1)

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & & \\
 & & H^2(S^\infty,\mathcal{V}) \arrow[u] \arrow[r, "\alpha_2"] & H^2(\partial S,\mathcal{V}) \arrow[u] & & \\
0 \arrow[r] & H^2_{S^\infty}(\tilde S,\mathcal{V}) \arrow[r] \arrow[ur, "\beta"] & H^2(\tilde S,\mathcal{V}) \arrow[u] \arrow[r] & H^2(S,\mathcal{V}) \arrow[u] \arrow[r] & H^2_{S^\infty}(\tilde S,\mathcal{V}) \arrow[r] & 0 \\
 & & H^2_c(S,\mathcal{V}) \arrow[u] \arrow[r, phantom, "="] & H^2_c(S,\mathcal{V}) \arrow[u] & & \\
 & & H^1(S^\infty,\mathcal{V}) \arrow[u] \arrow[r, "\alpha_1"] & H^1(\partial S,\mathcal{V}) \arrow[u] & & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

Hier ist ∂S der Rand einer zweckmäßig gewählen Umgebung von $S^\infty(\mathbf{C})$ in $\tilde{S}(\mathbf{C})$, und α_1, α_2 sind Teil der langen exakten Kohomologiesequenz

$$(5.3.2)\qquad \begin{aligned} &0 = H^1_{S^\infty}(\tilde{S}, \mathcal{V}) \longrightarrow H^1(S^\infty, \mathcal{V}) \xrightarrow{\alpha_1} H^1(\partial S, \mathcal{V}) \longrightarrow H^2_{S^\infty}(\tilde{S}, \mathcal{V}) \\ &\longrightarrow H^2(S^\infty, \mathcal{V}) \xrightarrow{\alpha_2} H^2(\partial S, \mathcal{V}) \longrightarrow H^3_{S^\infty}(\tilde{S}, \mathcal{V}) \longrightarrow H^3(S^\infty, \mathcal{V}) = 0. \end{aligned}$$

Die zweite Null erscheint aus Dimensionsgründen, die erste wegen des Verschwindens von $H^1(\tilde{S}, \mathcal{V})$.

Die Behauptung (II) folgt offenbar aus den folgenden beiden Aussagen:

(a) Der Restriktionshomomorphismus $H^2(\tilde{S}, \mathcal{V}) \to H^2(S, \mathcal{V})$ induziert einen Isomorphismus

$$\mathrm{Im}\big(H^2_c(S, \mathcal{V}) \to H^2(\tilde{S}, \mathcal{V})\big) \to \mathrm{Im}\big(H^2_c(S, \mathcal{V}) \to H^2(S, \mathcal{V})\big).$$

(b) Der Homomorphismus β ist ein Isomorphismus.

Es genügt zu zeigen, daß α_1 surjektiv ist und α_2 Null. Wir dürfen dabei S^∞ durch eine seiner Zusammenhangskomponenten $S^\infty(s)$ ersetzen. Der Einfachheit halber unterdrücken wir das s.

Wie bei dem Beweis von 5.2 ist eine tubulare Umgebung von $S^\infty(\mathbf{C})$ in $S(\mathbf{C})$ von einem Gebiet in $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ überlagert. Die Überlagerungsgruppe ist ein Quotient von $B(s)$, das in $GL(2, \mathbf{R}) \times GL(2, \mathbf{R})$ eingebettet wird.

$$b \to \begin{pmatrix} \beta_1(b) & \alpha_2(b) \\ 0 & \gamma_1(b) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_2(b) & \alpha_2(b) \\ 0 & \gamma_2(b) \end{pmatrix},$$

wobei $\beta_1(b), \beta_2(b)$ und $\gamma_1(b), \gamma_2(b)$ konjugierte Einheiten aus $\mathcal{O}_F$ sind. Den Rand ∂S erhält man, indem man $\varepsilon \gg 0$ fixiert und den Quotienten der Mannigfaltigkeit

$$\{(z_1, z_2) | \mathrm{Im}\, z_1 \cdot z_2 = \varepsilon\}$$

nach $B(s)$ bildet. Da man erst durch $N(s)$ und danach durch $M(s)$ teilen kann, sieht man leicht ein, daß ∂S ein Torusbündel mit zwei-dimensionalen Fasern über dem Kreisrand ist.

$$T \to \partial S \to C.$$

Kein Vektor aus $H^1(T, \mathcal{V})$ ist von der Fundamentalgruppe von C fixiert [14]. Infolgedessen ist

$$H^0\big(C, H^1(T, \mathcal{V})\big) = H^1\big(C, H^1(T, \mathcal{V})\big) = 0,$$

und die Leray-Spektralsequenz ergibt

$$H^1(\partial S, \mathcal{V}) = H^1\big(C, H^0(T, \mathcal{V})\big) \text{ und } H^2(\partial S, \mathcal{V}) = H^0\big(C, H^2(T, \mathcal{V})\big),$$

also

$$dim\, H^1(\partial S, \mathcal{V}) = dim\, H^2(\partial S, \mathcal{V}) = 1.$$

Nach (5.3.2) genügt es zu zeigen:

(c) $dim\, H^1(S^\infty, \mathcal{V}) \neq 0$,

(d) $dim\, H^3_{S^\infty}(S, \mathcal{V}) \neq 0$.

Der topologische Raum $S^\infty(\mathbf{C})$ ist die Vereinigung einer Kette von Kugeln. Zwei benachbarte Kugeln schneiden sich in einem Punkt. Es sei $S^{\infty'}(\mathbf{C})$ das Komplement dieser singulären Punkte und j'' die Einbettung von $S^{\infty'}(\mathbf{C})$ in $S^\infty(\mathbf{C})$. Nach 5.2 und seinem Beweis besitzt die Garbe $\mathcal{V}$ auf $S^\infty(\mathbf{C})$ eine Filtrierung

$$0 \subseteqq \mathcal{V}_0 \subseteqq \mathcal{V}_1 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathcal{V}_{m^2} = \mathcal{V},$$

wobei $\mathcal{V}_0$ die 1-dimensionale konstante Garbe ist und $\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1}, i > 0$, das Bild einer lokal konstanten 1-dimensionalen Garbe auf $S'^\infty(\mathbf{C})$ unter $j''_!$. Wir folgen unschwer, daß $H^0(S^\infty, \mathcal{V}/\mathcal{V}_0) = 0$, und daß

$$0 \to H^1(S^\infty, \mathcal{V}_0) \to H^1(S^\infty, \mathcal{V})$$

exakt ist. Damit ist (c) bewiesen. Da das Verdier-Duale zu $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\mu$ bis auf Verschiebung und Twistung gleich $\mathcal{V}_{\tilde{\mu}}$ ist, wobei $\tilde{\mu}$ die zu μ kontragrediente Darstellung bezeichnet, folgt (d) aus (c) mittels der Poincarédualität.

5.4 Bemerkung. Die Behauptung (II) von 5.3 wurde für den Spezialfall der konstanten Garbe als Lemma 2.3 formuliert. Für diesem Spezialfall gibt es einen einfacheren Beweis. Der gestrichelte Pfeil ist die direkte Summe von Abbildungen, die durch die Spitzen parametrisiert werden und die wir als Isomorphismus nachweisen müssen,

$$H^2_{S^\infty(s)}(\tilde{S}) \to H^2\big(S^\infty(s)\big).$$

Man überzeugt sich leicht, daß Start und Ziel dieses Pfeils eine direkte Summe von Kopien von $\mathbf{Q}_l(-1)$ sind, die von den irreduziblen Komponenten der exzeptionellen Kurve $S^\infty(s)$ indiziert werden und daß die Abbildung durch die Schnittmatrix vermittelt wird. Die Behauptung folgt, weil die Schnittmatrix, die durch die Auflösung der Spitze s der normalen Fläche $\bar{S}_K$ entsteht, negativ definit ist.

Wir benötigen noch die folgende Aussage:

5.5 Proposition. *Es sei S_i^∞ eine irreduzible Komponente von $S^\infty(s)$. Dann gilt:*

(i) $H^0(S_i^\infty, \mathcal{V})$ *ist ein-dimensional,* (ii) $H^1(S_i^\infty, \mathcal{V}) = 0$.

Beweis. Die erste Aussage ist bereits klar. Für die zweite Behauptung benutzen wir die exakte Sequenz

$$0 \to H^0\big(S_i^\infty(\mathbf{C}), \mathcal{V}\big) \to H^0(Q, \mathcal{V}) \to H_c^1\big(S_i^{\infty\prime}(\mathbf{C}), \mathcal{V}\big) \to H^1\big(S_i^\infty(\mathbf{C}), \mathcal{V}\big) \to 0,$$

wobei $Q = S_i^\infty(\mathbf{C}) - S_i^{\infty\prime}(\mathbf{C})$ aus zwei Punkten besteht. Der erste Raum ist eindimensional und der zweite zwei-dimensional. Der dritte ist ein-dimensional, weil die Einschränkung von $\mathcal{V}$ auf $S_i^{\infty\prime}$ durch eine Darstellung der Fundamentalgruppe definiert ist, und die Räume der Invarianten und Koinvarianten der Darstellung beide die Dimension 1 haben. q.e.d.

§6. ENDE DES BEWEIS VON SATZ 2.4: ANWENDUNG DER LEFSCHETZ'SCHEN FIXPUNKTFORMEL

Um die Lefschetz'sche Fixpunktformel aus SGA 5, III anwenden zu können, müssen wir die Heckekorrespondenzen auf $\tilde{S}_K$ einführen.

Es seien ganz allgemein X_1 und X_2 zwei Schemata (separiert, von endlichem Typ) über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Es sei $X = X_1 \times X_2$. Wir betrachten ein Cartesisches Diagramm, in dem alle Morphismen eigentlich sind.

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & D \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle d} \\ C & \underset{c}{\longrightarrow} & X \end{array}$$

Wir bezeichnen mit einem Index die Verkettungen dieser Morphismen mit den Projektionen p_1 und p_2 von X auf X_1 und X_2, z.B. $c_1 = p_1 \circ c$. Schließlich fixieren wir $L_i \in D_{\mathrm{ctf}}(X_i, \mathbf{Q}_l)$, der triangulierten Kategorie der Komplexe von $\mathbf{Q}_l$-Garben mit konstruierbarer Kohomologie.

Die Fixpunktformel bezieht sich auf zwei kohomologische Korrespondenzen, eine kohomologische Korrespondenz mit Trägern in C von L_1 nach L_2

$$u \in \mathrm{Hom}(c_i^* L_1, Rc_2^! L_2)$$

und eine kohomologische Korrespondenz mit Trägern in D von L_2 nach L_1

$$v \in \mathrm{Hom}(d_2^* L_2, Rd_1^! L_1).$$

Diese definieren Homomorphismen in der Kohomologie

$$u_* : H_c^*(X_1, L_1) \to H^*(X_2, L_2),$$
$$v_* : H_c^*(X_2, L_2) \to H^*(X_1, L_1),$$

die sich in natürlicher Weise über $H_c(X_2, L_2)$ bzw. $H_c(X_1, L_1)$ faktorisieren, wenn c_1 bzw. d_2 eigentlich ist.

Es sei c_2 endlich und von endlicher Tor-Dimension (z.B. flach). Dann definiert ein Element $\phi \in \mathrm{Hom}(c_1^* L_1, c_2^* L_2)$ eine kohomologische Korrespondenz mittels Verkettung mit dem durch Adjunktion aus dem Spurhomomorphismus $c_{2!} c_2^* L_2 \to L_2$ erhaltenen Homomorphismus $c_2^* L_2 \to c_2^! L_2$. Eine auf solchem Wege definierte Korrespondenz nennen wir eine *Korrespondenz erster Art*. Wir benötigen die folgende Aussage. Es sei X_i' ein abgeschlossenes Unterschema von $X_i, i = 1, 2$, und es seien $C' = C \times_X (X_1' \times X_2'), C_i' = C \times_{X_i} X_i'$. Wir setzen voraus, daß $C_2' = C'$. Offenbar ist $c' : C' \to X_1' \times X_2'$ definiert.

Wenn L_i' die Einschränkung von L_i auf X_i' ist, so definiert ϕ ein Element $\phi' \in \mathrm{Hom}$ $(c_1'{}^* L_1'{}^*, c_2'{}^* L_2')$, und somit, weil c_2' wieder von endlicher Tor-Dimension ist, eine kohomologische Korrespondenz u' von L_1' nach L_2'. Wegen der Verträglichkeit des Spurhomomorphismus mit Basiswechsel (GSA 4, XVII, 6.2.3) gilt:

6.1 Lemma. *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} H_c^*(X_1, L_1) & \xrightarrow{u_*} & H^*(X_2, L_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_c^*(X_1', L_1') & \underset{u_*'}{\longrightarrow} & H^*(X_2', L_2') \end{array}$$

ist kommutativ.

Wir nehmen als nächstes an, daß X_1 und X_2 glatte Schemata derselben Dimension sind und daß die Morphismen $d_i : D \to X_i$ birational sind. Es sei $U \subset D$ ein dichtes offenes Unterschema, das sich unter d_i isomorph auf sein Bild projiziert. Wir haben also ein Diagramm folgender Art:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, hook', "j_1"'] \arrow[dr, hook, "j_2"] \arrow[dd, hook, "j"] & \\ X_1 & & X_2 \\ & D \arrow[ul, "d_1"] \arrow[ur, "d_2"'] & \end{tikzcd}$$

Wir nehmen an, daß L_1 und L_2 quasiisomorph zu den intermediären Erweiterungen ein und derselben lokal konstanten Garbe L auf U sind, und daß folgende intermediäre direkte Bilder mit den gewöhnlichen direkten Bilden übereinstimmen:

$$j_{1!*}DL,\ j_{!*}L,\ j_{!*}DL,\ j_{2!*}L.$$

Hier ist DL das Duale von L i.S. der Poincarédualität (Verdier-Duales). Wir definieren eine kohomologische Korrespondenz v von L_2 nach L_1 als Verkettung von zwei Homomorphismen:

$$d_2^* L_2 = d_2^* j_{2*} L \to j_* L \to R d_1^! L_1 = R d_1^! j_{1!*} L.$$

Hier ist der erste Homomorphismus der offensichtliche, während der zweite durch Dualisieren aus dem folgenden Homomorphismus entsteht:

$$DRd_1^! j_{1!*} L = d_1^* D j_{1!*} L = d_1^* j_{1!*} DL = d_1^* j_{1*} DL \to j_* DL = j_{!*} DL = D j_{!*} L.$$

Eine solche Korrespondenz nennen wir *Korrespondenz zweiter Art.* Im Fall, daß L_1 und L_2 die konstante Garbe $\mathbf{Q}_l$ sind und daß D durch Aufblasen von X_1 in einem glatten Unterschema entsteht, sieht der Homomorphismus v_* folgendermaßen aus (Y_1' bezeichnet den exzeptionellen Divisor):

$$H^*(X_2) \xrightarrow{d_2^*} H^*(D) \cong H^*(X_1) \otimes H^{*-2}(Y_1')(-1) \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} H^*(X_1).$$

Wir erwähnen ohne Beweis die folgende Aussage. Sei ein kommutatives Diagramm gegeben:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, hook', "j"'] \arrow[dr, hook, "j'"] & \\ D' \arrow[rr, "m"'] & & D. \end{tikzcd}$$

wobei m ein birationaler Morphismus ist. Falls wir annehmen, daß $j'_{!*}L = j'_*L$ und $j'_{!*}DL = j'_*DL$, so können wir eine kohomologische Korrespondenz zweiter Art v' einführen. Für die induzierten Homomorphismen auf der Kohomologie gilt:

6.2 Lemma. $v'_* = v_*$. *Genauer ist das Bild auf D der kohomologischen Korrespondenz v' mit Trägern in D' (SGA 5, III, 3.2) gleich v:*

$$m_*(v') = v.$$

Wenn D gleich X_1 und d_1 die Identität ist, so braucht man Glattheit nicht mehr vorauszusetzen, und die Korrespondenz zweiter Art ist auch erster Art (allerdings in umgekehrter Richtung) und entspricht dem Homomorphismus $\psi : d_2^* L_2 \to L_1 = j_* L$. Wenn eine Korrespondenz erster Art (C', ϕ') von (X_3, L_3) nach (X_2, L_2) gegeben ist, so können wir deren Verkettung (C'', ϕ'') bilden. Dabei ist $\phi'' = \psi \circ \phi'$ und C'' durch das Cartesische Diagramm definiert (SGA 5, III, 5.2):

$$\begin{array}{ccc} C'' & \longrightarrow & C' \times D \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_3 \times \Delta \times X_1 & \longrightarrow & X_3 \times X_2 \times X_2 \times X_1. \end{array}$$

Falls d_2 eigentlich ist, so gilt $u''_* = v_* \circ u'_*$.

Wir kehren jetzt zu der uns interessierenden Situation zurück und fixieren ein $g \in G(\mathbf{A}_f^p)$. Wir werden ein Paar kohomologischer Korrespondenzen konstruieren. Dabei ist X_1 gleich $\tilde{S}_{K,\Sigma_1}$ und X_2 gleich $\tilde{S}_{K,\Sigma_2}$, wobei Σ_1 wie im §1 eine gegebene K-zulässige Zerlegung ist, während Σ_2 noch zu wählen ist.

Es sei s eine Spitze (vgl. 1.2). Die Transformierte von s unter g ist die Spitze $s \cdot g$, die man erhält, indem man den Homomorphismus $\phi(s)$ nach $\mathbf{A}_f(F)^2$ durch $g^{-1} \cdot \phi(s)$ ersetzt. Die Zerlegung $\Sigma_1(s)$ liefert somit eine Zerlegung für $s \cdot g$ die aber vielleicht nicht zulässig ist, weil die "Glattheitsbedingungen" c) und d) in der Definition 1.4 verletzt sein können, die wir aber in eine zulässige Zerlegung $\Sigma_2(sg)$ verfeinern können. Wir können sogar annehmen, daß die Vereinigung $\Sigma_2 = \{\Sigma_2(s)\}$ K-zulässig ist.

Es sei $K' = K \cap gKg^{-1}$. Jede K'-Spitze s' bestimmt zwei K-Spitzen $s = s'$ une $s' \cdot g$. Aus der Zerlegung $\Sigma_2(s'g)$ erhalten wir eine Zerlegung $\Sigma'(s')$ für s'. In der Tat ändern sich beim Übergang von s' zu $s'g$ der Vektorraum $H(s')$ und seine Positivität nicht. Weil aber im allgemeinen $N(s'g) \neq N(s')$, ist $\Sigma'(s')$ vielleicht nicht zulässig. Trotzdem können wir das Schema $C = \tilde{S}_{K',\Sigma'}$ bilden [27], das aber nicht mehr glatt zu sein braucht. Wegen der Inklusionen $N(s') \subset N(s), N(s') \subset N(s'g)$ und weil Σ' eine Verfeinerung von Σ_1 bzw. Σ_2 ist, erhalten wir Morphismen

$$c_1 = R(1) : C \to X_1, \; c_2 = R(g) : C \to X_2.$$

Dabei ist c_2 endlich und flach.

Über dem "endlichen Teil" $S_{K'}$ wird der Homomorphismus

$$\phi(g) : R(1)^*\mathcal{V} \longrightarrow R(g)^*\mathcal{V}$$

wie in [22] oder [8] definiert. Wir bezeichnen mit demselben Symbol $\mathcal{V}'$ das lokale System auf $S_{K'}$, und seine intermediäre, d.h. nach 5.1 gewöhnliche, Erweiterung auf $\tilde{S}_{K',\Sigma'}$. (Obgleich $\tilde{S}_{K',\Sigma'}$ nicht notwendig glatt ist, sind die Singularitäten doch so mild (Quotientensingularitäten), daß sich die Ergebnisse des §5 anwenden lassen.) Wir erweitern den Homomorphismus $\phi(g)$ auf ganz $\tilde{S}_{K',\Sigma'}$, indem wir ihn als Verkettung schreiben:

$$R(1)^*\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}' \longrightarrow R(g)^*\mathcal{V}.$$

Der erste Homomorphismus entsteht wie bei der Definition einer kohomologischen Korrespondenz zweiter Art. Seine Einschränkung auf $S_{K'}$ ist die Identität. Für die Definition des zweiten Homomorphismus beachtet man, daß, weil $R(g)$ endlich und flach ist,

$$j'_* R(g)^*\mathcal{V} \xrightarrow{\sim} R(g)^* j_*\mathcal{V},$$

und somit der Funktor des direkten Bildes den über dem endlichen Teil gegebenen Homomorphismus $\phi(g)$ erweitert. Insgesamt haben wir eine kohomologische Korrespondenz erster Art u erhalten.

Es sei Σ eine gemeinsame K-zulässige Verfeinerung von Σ_1 und Σ_2. Wir setzen

$$D = \tilde{S}_{K,\Sigma}, \quad D \to \tilde{S}_{K,\Sigma_1} \times \tilde{S}_{K,\Sigma_2}.$$

Wegen 5.1 können wir eine kohomologische Korrespondenz zweiter Art v mit Trägern in D definieren. Wir erhalten einen Endomorphismus von $H^*(\tilde{S}_{K,\Sigma_1}, \mathcal{V})$:

$$H^*(\tilde{S}_{K,\Sigma_1}, \mathcal{V}) \xrightarrow{u_*} H^*(\tilde{S}_{K,\Sigma_2}, \mathcal{V}) \xrightarrow{v_*} H^*(\tilde{S}_{K,\Sigma_1}, \mathcal{V}).$$

Der *Untermodul* $\mathbf{H}^*(\tilde{S}_K, \mathcal{V})$ von $H^*(\tilde{S}_{k,\Sigma_1}, \mathcal{V})$ (vgl. 5.3) wird dabei in sich überführt, und der so erhaltene Endomorphismus stimmt mit dem von Brylinski und Labesse [8] definierten überein: es ist der Heckeoperator $T(g^{-1})$. Wir erhalten einen Endomorphismus auf dem Quotienten (vgl. 5.3)

$$H^2(S^{\infty}_{K,\Sigma_1}, \mathcal{V}) = H^2(\tilde{S}_{K,\Sigma_1}, \mathcal{V}) / \mathbf{H}^2(\tilde{S}_K, \mathcal{V}).$$

Wir behaupten nicht, daß wir auf $H(\tilde{S}_{K,\Sigma_1}, \mathcal{V})$ eine Aktion der Heckealgebra definiert haben und behalten uns das Recht vor, Σ_1 von g abhängig zu machen und sogar während des Beweises abzuändern. Die Wirkung auf $\mathbf{H}^*(\tilde{S}_K, \mathcal{V})$ ist von Σ_1 unabhängig.

Wir haben bisher nicht den Grundkörper explizit genannt. Die auftretenden Schemata sind alle über $\mathbf{Z}_{(p)}$ definiert. Wegen der Bemerkungen über Basiswechsel nach der Formulierung von 5.2 können wir zur speziellen Faser übergehen. Obgleich es auf die allgemeine Faser ankommt, ist der Vorteil der, daß die Aktion einer negativen Potenz der Frobeniussubstitution auf der Kohomologie von der Wirkung einer positiven Potenz Φ^n des Frobeniusmorphismus herkommt. Man baut das Φ^n leicht in die Definition der kohomologischen Korrespondenz u ein, indem man $R(g)$ durch $R(g)\Phi^n$ ersetzt und den Homomorphismus $\phi(g)$ entsprechend abändert. Ab jetzt ist der Grundkörper ein algebraischer Abschluß von $\mathbf{F}_p$.

Wir wollen die Lefschetz'sche Fixpunktformel anwenden. Es sei K_E der dualisierende Komplex auf E (vgl. SGA 5, III, 1.3). Man kann das Cupprodukt

$$\langle u, v\rangle_E \in H^0(E, K_E)$$

zweier kohomologischer Korrespondenzen definieren (loc. cit 4.2). Hier ist $E = C \times_X D$. Falls $q : E \to \operatorname{Spec} k$ eigentlich ist, so definiert der Adjunktionshomomorphismus $q : K_E \to \mathbf{Q}_l$ den Spurhomomorphismus

$$\int_E : H^0(E, K_E) \to \mathbf{Q}_l.$$

6.3 Satz. *Es seien X_1 und X_2 eigentlich über* Spec *k, so daß die Homomorphismen u_* und v_* auf der gesamten Kohomologie definiert sind, und insbesondere*

$$v_*u_* : H^*(X_1, L_1) \to H^*(X_1, L_1).$$

Für $\langle u_*, v_*\rangle$, die alternierende Summe der Spuren von v_*u_*, gilt:

$$\langle u_*, v_*\rangle = \int_E \langle u, v\rangle_E.$$

Falls E die disjunkte Vereinigung von E' und E'' ist, so ist

$$\int_E \langle u, v\rangle_E = \int_{E'} \langle u, v\rangle_{E'} + \int_{E''} \langle u, v\rangle_{E''}.$$

Das Cupprodukt läßt sich lokal in der Etaltopologie berechnen (loc. cit., 4.2). In dem uns interessierenden Fall ist die Fixpunktmenge E des Paares u, v eine Vereinigung von zwei Mengen: einer endlichen Menge von Punkten, deren Bild in $S_K \times S_K$ liegt und einem Bestandteil E^∞, dessen zugrundeliegende Menge in $S^\infty_{K,\Sigma_1} \times S^\infty_{K,\Sigma_2}$ liegt. Wir betrachten nur den Beitrag von E^∞ zur Lefschetz'schen Fixpunktformel, d.h. den Spitzenbeitrag. Für den anderen Teil vgl. [8] oder [23] (wo aber keine Heckeoperatoren auftauchen). Unser Ziel ist es, den Beweis des folgenden Satzes zu skizzieren, der im wesentlichen besagt, daß der Spitzenbeitrag zur Lefschetz'schen Fixpunktformel für die Schnittkohomologie verschwindet.

6.4 Satz. $\int_{E^\infty} \langle u,v\rangle_{E^\infty}$ *ist gleich der Spur von* $T(g^{-1})\cdot\Phi^n$ *auf* $H^2(S^\infty_{K,\Sigma_1},\mathcal{V})$.

Aus diesem Satz folgt 2.4′: Falls man die linke Seite der behaupteten Identität mit der Lefschetz'schen Fixpunktformel und die rechte Seite mit der Selberg'schen Spurformel entwickelt, so hebt sich der Beitrag der Fixpunkte im Endlichen links gegen die zentralen und elliptischen Beiträge rechts auf. Weil der parabolische Beitrag rechts verschwindet, folgt 2.4′ aus 6.4 (für Einzelheiten vgl. [8]).

Das Schema E^∞ ist eine disjunkte Vereinigung $\coprod E(s')$ und dementsprechend

$$\int_{E^\infty}\langle u,v\rangle_{E^\infty} = \sum\int_{E(s')}\langle u,v\rangle_{E(s')}. \tag{6.4.1}$$

Die Summe erstreckt sich über alle *Fixspitzen*, d.h. diejenigen Spitzen s', für die s' und $\Phi^n\cdot s'\cdot g$ äquivalente K-Spitzen sind. Wir wollen die Form der Korrespondenzen in der Nähe einer Fixspitze beschreiben.

Falls s' dem Modul $H(s')$ und dem Homomorphismus $\phi(s')$ entspricht, so entspricht die Spitze $\Phi^n\cdot s'\cdot g$ dem Modul $H(s')$ und dem Homomorphismus

$$g^{-1}\cdot\phi(s')\cdot\psi,$$

vobei (vgl. 1.3)

$$\psi : h'\oplus h'' \to p^{-n}\cdot h'\oplus h''.$$

Weil s' eine Fixspitze ist, gibt es einen Endomorphismus γ von

$$0\to H'(s')\to H(s')\to H''(s')\to 0,$$

der die Positivität erhält und ein $k\in K$, so daß

$$k^{-1}\cdot g^{-1}\cdot\phi(s')\cdot\psi\cdot\gamma = \phi(s'). \tag{6.4.2}$$

Es seien a und d die Eigenwerte von γ auf $H'(s')$ und $H''(s')$, und $\mu(\gamma)=\frac{a}{d}$. Dann ist $\mu^{-1}(\gamma)\cdot N(s'g) = N(s)$ und $\mu^{-1}(\gamma)\cdot N(s')\subset N(s)$. Es sei $\Sigma_2'(s)=\mu(\gamma)^{-1}\cdot\Sigma_2(s'g)$. Hier bezeichnet s die zu s' gehörige K-Spitze. Die zwei Zerlegungen $\Sigma_1(s)$ und $\Sigma_2'(s)$ definieren wie in §1 toroidale Einbettungen $\tilde X_1,\tilde X_2$ des Torus mit dualer Charaktergruppe $N(s)$. Entsprechend definiert $\Sigma'(s')$ eine toroidale Einbettung $\tilde C$ des zu $N(s')$ gehörigen Torus und die Inklusionen $N(s')\to N(s), \mu^{-1}(\gamma): N(s')\to N(s)$ definieren einen Morphismus

$$\tilde c : \tilde C\to \tilde X_1\times\tilde X_2.$$

Lokal für die Etaltopologie stimmen c und $\tilde{c}$ überein. Die Lokalisierung

$$\tilde{d} : \tilde{D} \to \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2$$

ist durch eine gemeinsame Verfeinerung der Zerlegungen $\Sigma_1(s)$ und $\Sigma_2'(s)$ gegeben: $\tilde{D}$, $\tilde{X}_1$ und $\tilde{X}_2$ sind toroidale Einbettungen ein und desselben Torus.

Man überzeugt sich unschwer, daß $E(s')$ leer ist, falls $\sigma \cap \mu^{-1}(\delta \cdot \gamma)\sigma = \emptyset$ für jeden Kegel σ aus $\Sigma_1(s)$ und jedes $\delta \in B(s)$. Für festes g und n treten modulo $\{u(\delta) | \delta \in B(s)\}$ nur eine endliche Anzahl von Zahlen $\mu(\gamma)$ auf. Folglich können wir Σ_1 von vornherein so wählen, daß gilt:

(6.4.3) Es seien $\sigma \in \Sigma_1(s)$ und $\delta \in M(s)$. Aus $\sigma \cap \mu^{-1}(\gamma\delta)\sigma \neq \emptyset$ folgt $\mu(\delta \cdot \gamma) \in \mathbf{Q}^*$.

Eine Spitze s', für die es solche σ und δ gibt, nennen wir *wesentlich*. Wir können die Summe (6.4.1) auf die wesentlichen Spitzen beschränken. Weil $p^n \cdot \frac{a}{d}$ dann eine rationale Zahl ist, die eine p-adische Einheit ist, folgt $|a| \neq |d|$.

Die Homomorphismen u_* und v_* operieren auf der Kohomologie mit Trägern, d.h. wenn $Y_1 \subset X_1$ ein abgeschlossenes Unterschema ist und die Einschränkung des Morphismus c auf das inverse Bild von Y_1 in C sich über $Y_1 \times Y_2 \subset X_1 \times X_2$ faktorisiert, so ist

$$u_*\big(H^*_{Y_{1c}}(X_1, L_1)\big) \subset H^*_{Y_2}(X_2, L_2).$$

Nach 5.3 können wir den *Quotienten* $H^2(S^\infty_{K,\Sigma_1}, \mathcal{V})$ als *Untermodul* $H^2_{S^\infty}(S_K, \mathcal{V})$ interpretieren. Falls s' eine Fixspitze über der K-Spitze s ist, so erhalten wir einen Endomorphismus von $H^2_{S^\infty(s)}(S_{K,\Sigma_1}, \mathcal{V})$, indem wir C durch eine hinreichend kleine Umgebung von $S^\infty(s') = S^\infty_{K',\Sigma'}(s')$ ersetzen. Wir bezeichnen seine Spur mit $\theta(s')$. Dann ist

(6.4.4) $$\operatorname{Spur}\big(T(g^{-1}) \cdot \Phi^n | H^2(S^\infty_{K,\Sigma_1}, \mathcal{V})\big) = \sum_s \sum_{s' \to s} \theta(s').$$

Die Summe erstreckt sich über alle Fixspitzen, die über einer gegebenen K-Spitze liegen.

6.5 Hilfssatz. $H^2_{S^\infty(s)}(\tilde{S}_{K,\Sigma}, \mathcal{V}) \xrightarrow{\sim} \oplus H^2_{S_i^\infty(S)}(\tilde{S}_{K,\Sigma}, \mathcal{V})$. *Dabei durchläuft* $S_i^\infty(s)$ *die irreduziblen Komponenten von* $S^\infty(s)$.

Das folgt mit der Mayer-Vietoris-Sequenz. Man benutzt, daß bis auf eine Verschiebung und Twistung das Duale $D\mathcal{V}_\mu$ gleich $\mathcal{V}_{\tilde{\mu}}$ ist. Aus diesem Hilfssatz folgt, daß $\theta(s') = 0$, falls s' nicht wesentlich ist. Der Satz 6.4 folgt somit aus folgender Aussage.

6.6 Satz. *Es sei s' wesentlich. Dann ist*

$$\theta(s') = \int_{E(s')} \langle u, v\rangle_{E(s')}$$

Wir betonen, daß die linke Seite nur von der strikten Lokalisierung um $S^{\infty}(s')$ und $S^{\infty}(s)$, genauer um $S^{\infty}_{K,\Sigma}(s')$, $S^{\infty}_{K,\Sigma_1}(s)$ und $S^{\infty}_{K,\Sigma_2}(s)$, abhängt. Die rechte Seite hängt nur von der strikten Lokalisierung der Korrespondenzen um die Bilder von $E(s')$ in C, D und X ab. Das Bild eines Punktes von E in X_1 nennen wir einen *Fixpunkt*, das Bild eines Punktes von $E(s')$ einen *Fixpunkt* von $E(s')$. Um den Beitrag eines Fixpunkts von $E(s')$ zur rechten Seite zu berechnen, können wir X_1, X_2 und die Korrespondenzen durch $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ und $\tilde{C}, \tilde{D}$ ersetzen.

Nach 6.2 und den darauffolgenden Bemerkungen dürfen wir dabei die Zerlegungen $\Sigma_1(s), \Sigma_2(s), \Sigma_2'(s), \Sigma(s)$ abändern. Weil s' wesentlich ist, können wir annehmen, daß für das in (6.4.2) auftretende γ die Zahl $\mu(\gamma)$ rational ist. Dann ist $\Sigma_2'(s) = \Sigma_2(s)$ und folglich dürfen wir alle Zerlegungen identisch wählen. Dann hat die Korrespondenz C die folgende Gestalt. Falls σ ein Kegel aus $\Sigma(s)$ ist und $x = x_\lambda, y = x_\mu$ die entsprechenden Koordinaten, so ist C gegeben durch:

(6.6.1) $$x_2 = x^{\delta}, \quad y_2 = y^{\delta}.$$

Dabei ist $\mu(\gamma) = \frac{\alpha}{\delta}$. Die Fixpunkte in $E(s')$ sind gegeben durch

$$x = 0,\ y^{\delta} = y^{\alpha} \text{ oder } y = 0, x^{\delta} = x^{\alpha}.$$

Sie sind isoliert.

Entsprechende Bemerkungen lassen sich auf die Berechnung von $\theta(s')$ anwenden. Wir können somit annehmen, daß D die Diagonale ist und beide Projektionen von C nach X_i endlich. Weil die duale Korrespondenz (im Sinne von SGA 5, III. 5.1) dieselben lokalen Beiträge zur Fixpunktformel liefert, dürfen wir weiterhin annehmen, daß $\alpha > \delta$.

Wir wenden das Lemma 6.1 an mit $X_i' = S^{\infty}(s)$. Das ist gerechtfertigt, weil $\alpha > \delta$ und die abgeschlossenen Unterschemata C', C_1', C_2' von C durch die folgenden Gleichungen definiert sind:

$$C' : x^{\alpha} \cdot y^{\alpha} = x^{\delta} \cdot y^{\delta} = 0,$$

$$C_1' : x^{\alpha} \cdot y^{\alpha} = 0,$$

$$C_2' : x^{\delta} \cdot y^{\delta} = 0.$$

Somit ist der von $\theta(s')$ auf $H^2(S^\infty(s), \mathcal{V})$ induzierte Endomorphismus identisch mit dem direkt durch die kohomologische Korrespondenz auf $S^\infty(s)$ definierten Endomorphismus. Wir ordnen jedem Kegel σ aus $\Sigma_1(s)$ die irreduzible Komponente $S^\infty(\sigma)$ von $S^\infty(s)$ zu, die durch $x_\mu = 0$ gegeben ist. Dann ist

$$H^2(S^\infty(s), \mathcal{V}) = \oplus H^2(S^\infty(\sigma), \mathcal{V}),$$

vobei sich die Summe über ein volles Repräsentantensystem von nicht-äquivalenten σ erstreckt. Der Endomorphismus erhält diese Zerlegung. Es sei $\theta(\sigma)$ seine Spur auf $H^2\big(S^\infty(\sigma), \mathcal{V}\big)$. Die alternierende Summe der Spuren des von der kohomologischen Korrespondenz auf der Kohomologie $H^*(S^\infty(\sigma), \mathcal{V})$ definierten Endomorphismus kann mit der Lefschetz'schen Fixpunktformel berechnet werden. Wir bezeichnen mit $\varepsilon(\sigma)$ die Summe der lokalen Beiträge zu

$$\int\limits_{E(s')} \langle u, v\rangle_{E(s')}$$

derjenigen Fixpunkte, die auf $S^\infty(\sigma)$ liegen, und für die $x_{\mu'} \neq 0$. Hier ist $x_{\mu'}$ die entsprechende Koordinate auf dem benachbarten Kegel σ'. Es sei $\theta(\sigma)$ die Summe der lokalen Beiträge zur Lefschetz'schen Fixpunktformel auf $S^\infty(\sigma)$ der Punkte mit $x_{\mu'} \neq 0$. Weil nach 5.5 $H^1\big(S^\infty(\sigma), \mathcal{V}\big) = 0$, genügt es folgende Aussagen zu beweisen:

$$\varepsilon(\sigma) = \theta(\sigma). \tag{6.6.2}$$

(6.6.3) Der Beitrag des Punkts $x_{\lambda'} = x_{\mu'} = 0$ zur Lefschetz'schen Fixpunktformel auf $S^\infty(\sigma)$ ist gleich der Spur auf $H^0\big(S^\infty(\sigma), \mathcal{V}\big)$.

Nach Erweiterung des Grundkörpers **Q** finden wir eine Filtration des Raumes V mit 1-dimensionalen Quotienten, die invariant under der Aktion von $N(s)$ und von $\mu(\gamma)$ ist. Auf diese Weise erhalten wir eine Filtration der Garbe $\mathcal{V}$ auf $\tilde{X}_1$

$$0 \subsetneqq \mathcal{V}_1 \subsetneqq \mathcal{V}_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathcal{V}_{m^2} = \mathcal{V}.$$

Der lokale Beitrag ist die Summe der lokalen Beiträge der graduierten Bestandteile (SGA 5, III, 4.13),

$$\varepsilon(\sigma) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i(\sigma),\ \theta(\sigma) = \sum_{i=1}^{m^2} \theta_i(\sigma).$$

Wir wollen zeigen, daß die lokalen Beiträge eines gegebenen Punktes zu $\varepsilon_i(\sigma)$ und $\theta_i(\sigma)$ übereinstimmen. Auf dem graduierten Bestandteil operiert $\mu(\gamma)$ als Skalar, den wir auf beiden Seiten fallenlassen. Da die Korrespondenz lokal ein Produkt ist, führt man die Berechnung auf Kurven zurück. Weil $\alpha > \delta$, erhalten wir in einem Fixpunkt mit Koordinanten (x_λ, x_μ):

(1) Es sei $\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1} \neq 0$ im Fixpunkt. Die beiden Beiträge sind δ, wenn $x_\mu = 0$, $x_\lambda \neq 0$, und δ^2, wenn $x_\lambda = x_\mu = 0$.

(2) Es sei $\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1} = 0$ im Fixpunkt. Die beiden Beiträge sind Null.

Insbesondere sind die Beiträge gleich. Daraus folgt (6.6.2). Für die Aussage (6.6.3) benutzt man noch zusätzlich die in 5.5 durchgeführte Berechnung von $H^0\big(S^\infty(\sigma), \mathcal{V}\big)$.

Literatur

[1] *T. Asai*, On certain Dirichlet series associated with Hilbert modular forms and Rankin's method, Math. Ann. **226** (1977), 81-94.

[2] *A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport. Y. Tai*, Smooth Compactification of Locally Symmetric Varieties, Brookline 1975.

[3] *A. Beilinson, I. Bernstein, P. Deligne*, Faisceaux pervers, Astérisque **100** (1982).

[4] *A. Borel*, Automorphic L-functions: in Proc. Symp. Pure Math., AMS **33**, 2 (1979), 27–62.

[5] *A. Borel*, Stable real cohomology of arithmetic groups, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. (4) **7** (1974), 235–278.

[6] *A. Borel, N. Wallach*, Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups, Ann. of Math. Studies **94**, Princeton 1980.

[7] *J.-L. Brylinski*, (Co-)homologie d'intersection et faisceaux pervers; exposé Bourbaki 585 (fevr. 1982), Astérisque **92/93** (1982).

[8] *J.-L. Brylinski, J.-P. Labesse*, Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. (4) **17** (1984), 361–412.

[9] *W. Casselman*, Introduction to the theory of admissible representations of reductive p-adic groups, preprint.

[10] *P. Deligne*, La conjecture de Weil, II, Publ. Math. IHES **52** (1980), 137-252.

[11] *P. Deligne*, Variétés de Shimura: interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques; in Proc. Symp. Pure Math., AMS **33**, 2 (1979), 313–346.

[12] *S. Gelbart, H. Jacquet*, A relation between automorphic forms on $GL(2)$ and $GL(3)$; Ann. scient. Ec. Norm. Sup. (4) **11** (1978), 471–542.

[13] *R. Godement*, Notes on Jacquet-Langlands' Theory, Princeton 1970.

[14] *G. Harder*, On the cohomology of discrete arithmetically defined groups; in: Proceedings of Int. Coll. on Discrete Subgroups of Lie groups and Applications to Moduli, Bombay 1973.

[15] *G. Henniart*, Représentations l-adiques abéliennes, Séminairé de Théorie des Nombres, Paris 1980-81, M. J. Bertin ed., Progress in Mathematics **22**, Boston 1982.

[16] *F. Hirzebruch, W. F. Hammond*, L-Series, Modular Imbeddings and Signatures, Math. Ann. **204** (1973), 263–270.

[17] *F. Hirzebruch, D. Zagier*, Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms of Nebentypus, Inv. Math. **36** (1976), 57–113.

[18] *H. Jacquet*, Automorphic Forms on $GL(2)$ II, Lecture Notes in Math. **278**, Berlin-Heidelberg-New York 1972.

[19] *H. Jacquet, R.P. Langlands*, Automorphic Forms on $GL(2)$, Lecture Notes in Math. **114**, Berlin-Heidelberg-New York 1970.

[20] *H. Jacquet, J. Shalika*, A Non-Vanishing Theorem for Zeta Functions of GL_n, Inv. Math. **38** (1976), 1–16.

[21] *J.-P. Labesse, R.P. Langlands*, L-indistinguishability for $SL(2)$, Can. J. Math. **31** (1979), 726–785.

[22] *R.P. Langlands*, Modular forms and l-adic representations; in: Modular Functions of One Variable. II, Lecture Notes in Math. **349**, Berlin-Heidelberg-New York 1973, 362–500.

[23] *R.P. Langlands*, On the zeta function of some simple Shimura varieties, Can. J. Math. **31** (1979), 1121–1216.

[24] *R.P. Langlands*, Base Change for $GL(2)$; Ann. of Math. Studies **96**, Princeton 1980.

[25] *R.P. Langlands*, Problems in the theory of automorphic forms; in Modern Analysis and its Applications, Lecture Notes in Math. **170**, Berlin-Heidelberg-New York 1970, 18–61.

[26] *T. Oda*, Periods on Hilbert Modular Surfaces, Progress in Mathematics **19**, Boston 1982.

[27] *M. Rapoport*, Compactifications de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal, Comp. Math. **36** (1978), 255–335.

[28] *K. Ribet*, Galois representations attached to eigenforms with Nebentypus; in: Modular Functions of One Variable, V, Lecture Notes in Math. **601**, Berlin-Heidelberg-New York 1977, 18–52.

[29] *J.-P. Serre*, Abelian l-adic representations, New York 1968.

[30] *J.-P. Serre*, Modular Forms of Weight one and Galois Representations; in: Algebraic Number Fields, ed. by A. Fröhlich, London-New York-San Francisco 1977.

[31] *F. Shahidi*, On certain L-functions, Am. J. Math. **103** (1981), 297–356.

[32] *J. Tate*, Algebraic Cycles and Poles of Zeta Functions; in: Arithmetic Algebraic Geometry, O.F.G. Schilling, ed., New York 1965.

Abkürzung :	SGA	4 *III*	Lecture Notes in Math. **305**,
	SGA	4 1/2	Lecture Notes in Math. **569**,
	SGA	5	Lecture Notes in Math. **589**.