Aspects combinatoires des équations de Bethe†

Robert Langlands* **et Yvan Saint-Aubin**

1. Introduction. Il y a plus de soixante ans Bethe ([B]) introduisait sa stratégie pour résoudre un problème de valeurs propres issu de la théorie des métaux. Cette méthode et tous ses raffinements se sont avérés par la suite d'une grande importance. Pourtant on n'a jamais cherché de lui donner une base rigoureuse. C'est le but du papier [BL] dont nous avons donné une esquisse dans [AG]. En même temps, à notre insu, le problème était considéré par V. Tarasov et A. Varchenko ([TV]). Ils ont traité la méthode dans un cadre bien plus large que nous et, ce qui est plus pertinent ici, leurs arguments sont nettement plus directs et plus faciles que les nôtres. La question se pose alors s'il vaut la peine de poursuivre le problème avec nos méthodes.

Avant d'y répondre nous décrivons brièvement les équations de Bethe et la méthode. Quoique nous n'ayons jamais essayé de traiter les cas généraux de l'*Ansatz* de Bethe, il nous faut malgré tout traiter des cas plus généraux que celui du papier de Bethe lui-même car il s'agit ici de questions de géométrie algébrique et il s'est avéré nécessaire de passer aux équations génériques plutôt que de rester avec les équations originales. Ces nouvelles équations sont aussi attachées aux problèmes spectraux que l'on peut déduire des travaux de l'école de Leningrad [TΦ].

Soit R une fonction rationelle

$$R(z) = \kappa \frac{\prod_{m=1}^{N}(z-\alpha_m)}{\prod_{m=1}^{N}(z-\beta_m)}, \tag{1.1}$$

où $\beta_m = 2\Delta - 1/\alpha_m$. Parfois on admet des cas dégénérés

$$R(z) = \kappa \frac{\prod_{m=1}^{N}(\gamma_m z-\alpha_m)}{\prod_{m=1}^{N}(\delta_m z-\beta_m)},$$

où $\beta_m\alpha_m = 2\Delta\alpha_m\delta_m - \gamma_m\delta_m$. En particulier le cas

$$R(z) = z^N,$$

qui est celui de Bethe, est admis. Dans cet exposé, nous ne considérons toutefois que (1.1). Soient $F(z,z') = zz' - 2\Delta z + 1$ et $Q(z,z') = -F(z,z')/F(z',z)$. Nous appellons équations de Bethe le système

$$R(z_i) = \prod_{j\neq i} Q(z_i, z_j), \quad i = 1, \dots, r, \tag{1.2}$$

pour les r inconnues z_i. Le cas générique de ces équations est le cas pour lequel Δ, κ, et $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ sont tous génériques. Pour le moment toutes les variables z_i sont censées être finies. Observons que la dépendance des fonctions R et Q en Δ et en les autres paramètres n'est qu'implicite dans la notation!

Une solution est dite *admissible* si les z_i sont tous différents et ne sont ni des zéros ni des pôles de R; sinon elle est *inadmissible*. A chaque solution de ces équations on attache un vecteur propre du problème spectral que nous ne décrivons pas explicitement. Ce vecteur est zéro si la solution est inadmissible, et les deux vecteurs issus à deux solutions admissibles dont l'une est une permutation de l'autre sont les mêmes à une constante près. Il s'agit de vérifier le théorème suivant.

---

† First appeared in Advances in Mathematical Sciences: CRM's 25 years, ed. Luc Vinet, CRM Proceedings and Lecture Notes, Amer. Math. Soc. (1997).

* Une partie importante du travail de cet auteur sur ce papier a été accomplie pendant un séjour de quelques mois au Max-Planck-Institut à Bonn et pendant des visites répétées au Centre de recherches mathématiques à Montréal. Il est reconnaissant aux directeurs de ces deux institutions, Friedrich Hirzebruch et Luc Vinet, pour un accueil d'une obligeance exceptionelle.

Théorème *Pour des valeurs génériques des paramètres, il y a $N(N-1)\dots(N-r+1)$ solutions admissibles et les vecteurs obtenus de celles-ci engendrent un espace de dimension $N!/(N-r)!r!$ et sont par conséquent tous les vecteurs propres du problème.*

Il s'avère que la partie difficile de cet énoncé est de montrer qu'il y a exactement $N(N-1)\dots(N-r+1)$ solutions admissibles des équations de Bethe.

La stratégie de [BL] est d'observer que les solutions des équations de Bethe sont les points fixes d'une correspondance algébrique et de les compter en utilisant la formule de Lefschetz. Un obstacle majeur à surmonter est qu'il n'est pas du tout évident que tous les points fixes sont de multiplicité un, et sans ce fait, la formule de Lefschetz est peu utile. Notre stratégie était de vérifier que la multiplicité est toujours un en examinant la correspondance autour de valeurs obtenues en faisant dégénérer les paramètres d'une façon convenable, ce qui est en soi assez raisonnable, mais notre choix de ces paramètres, $\Delta = 0$ mais κ et les α_k génériques, était à maints égards malencontreux. Il soulève plusieurs difficultés d'un ordre strictement mathématique qui n'apportent, en autant que nous sachions, rien à la compréhension des problèmes spectraux de départ. Par contre le choix qu'ont fait Tarasov et Varchenko, bien plus astucieux que le nôtre, permet, comme nous expliquons dans le second appendice, non seulement une démonstration facile que la multiplicité est un, mais une démonstration directe et élémentaire de l'énoncé lui-même sans aucun appareil technique.

En revanche l'étude de la correspondance autour de $\Delta = 0$ n'est pas sans intérêt d'un point de vue combinatoire ou géométrique. La trace qui apparaît en utilisant la formule de Lefschetz s'exprime à partir d'objets combinatoires, en particulier des graphes pondérés, et une partie importante de cette structure combinatoire est encore présente dans l'ensemble des points fixes de la correspondance autour de $\Delta = 0$. Le but de cet exposé – en grande partie plutôt informel – est de la révéler, même si les questions soulevées ne seront pas toutes complètement résolues.

La définition technique des correspondances est reléguée au premier appendice. Le lecteur est invité à consulter cet appendice pour les définitions et notations qu'il ne trouve pas dans le texte, mais, sauf s'il est spécialiste en géométrie algébrique, à ne pas trop s'en préoccuper. Notons toutefois que, pour compter non seulement les points fixes mais aussi les points fixes inadmissibles, il faut introduire, pour diverses raisons, des espaces $X^{A,B}$ où les coordonnées sont soumises à des conditions supplémentaires: certaines des coordonnées sont supposées soit égales entre elles soit égales à des zéros ou à des pôles de R. La correspondance est alors définies par deux applications $\varphi^{A,B}$ et $\psi^{A,B}$ d'une variété $C_\Delta^{A,B}$ dans $X^{A,B}$. Ceci est la notation du premier appendice, mais dans le corps du papier A et B sont fixés et par conséquent nous les supprimerons de la notation.

Il y a néanmoins une convention de notation qu'il faut remarquer explicitement. Les contraintes imposées par A et B exigent que quelques coordonnées soient égales. Nous pouvons en tenir compte soit en les comptant séparément soit en attachant à chaque coordonnée un poids ($|A_k|$, $|\mathbb{B}'_k|$, $|\mathbb{B}''_k|$). Dans la seconde partie nous employons la première de ces conventions. Mais ensuite dans les parties suivantes, lorsque il s'agit de résoudre les équations pertinentes, il est préférable d'utiliser les poids.

Notre première tâche est d'expliciter les définitions de l'appendice pour la fibre $\Delta = 0$. Ensuite nous trouvons les points fixes de la correspondance dégénérée sur cette fibre et calculons leur multiplicité. Il faudra ensuite, en poursuivant l'argument esquissé dans [AG], montrer qu'il y a au moins le nombre requis de déformations en série de Puiseux autour de ces points fixes. Les arguments algébriques et combinatoires menant à cette conclusion ne sont guère évidents et dans ce papier nous nous contentons d'exemples, assez nombreux nous croyons pour convaincre le lecteur que les arguments sont bien fondés. Puisque c'est à notre avis la richesse combinatoire de ces arguments qui justifie à présent l'emploi de la dégénérescence de la correspondance que nous avons choisie plutôt que celle implicite dans [TV], une introduction directe et concrète à ces arguments sera peut-être plus attrayante que la présentation formelle que de toute façon nous ne sommes pas encore en état de donner. En effet avant d'approfondir ces idées nous voulons réfléchir encore à leur utilité.

2. Etude d'une fibre spéciale ($\Delta = 0$). Quoique la fibre $\Delta = 0$ ne soit pas générique puisque le paramètre Δ y est soumis à une condition explicite, nous exigeons que les autres paramètres demeurent génériques. Explicitons d'emblée quelques conditions de cette généricité. On suppose qu'aucun α_k ou β_k n'est égal à $\pm\sqrt{-1}$ au point $\Delta = 0$.

Pour tout z nous posons $\tilde{z} = -1/z$. On a partout

$$R(z)R(\tilde{z}) = \kappa^2 \frac{\prod_1^N (z-\alpha_m) \prod_1^N (\tilde{z}-\alpha_m)}{\prod_1^N (z-\beta_m) \prod_1^N (\tilde{z}-\beta_m)}$$

mais à $\Delta = 0$, $\beta_m = \tilde{\alpha}_m$ de sorte que le quotient à droite est indépendant de z et on a

$$R(z)R(\tilde{z}) = \kappa^2 \prod_1^N (-\alpha_m^2) = \rho. \tag{2.1}$$

Le nombre ρ est supposé générique. Puisque $\tilde{z} = z$ si $z = \pm\sqrt{-1}$, les deux valeurs $R(\pm\sqrt{-1})$ sont $\sqrt{\rho}$ et par conséquent génériques. La constante ρ est aussi le produit de $\rho/\kappa = R(0)$ et de $\kappa = R(\infty)$. Puisque κ et ρ sont génériques et indépendants, nous pouvons supposer que $\kappa^m\rho^n$ avec m et n dans $\mathbb{Z}$ et $0 \leq m+n, n \leq 2N$ n'est pas 1 sauf si $m = n = 0$.

Ce n'est qu'en $\Delta = 0$ que les coordonées $p'_{i,k}$, $q'_{i,k}$, $p''_{i,k}$, $q''_{i,k}$ ne sont pas superflues. Nous commençons en réduisant leur nombre. Nous rappelons d'abord que ces coordonnées sont nécessaires seulement autour de $z_i = \alpha_k$ ou $z_i = \beta_k$. Par généricité $\alpha_k \neq \beta_k$. Autour de $z_i = \alpha_k$ les deux coordonnées $z_i - \beta_k$ et $z_i - \gamma_k$ ne sont pas nulles de sorte que les cordonnées $p'_{i,k}$, $q'_{i,k}$ et $\xi'_{i,k}$ sont superflues aussi bien que $p''_{i,l}$ $q''_{i,l}$, $\xi''_{i,l}$, $l \neq k$. Les trois coordonnées $p''_{i,k}$, $q''_{i,k}$ et $\xi''_{i,k}$ qui restent seront dénotées p_i, q_i et ξ_i. Donc

$$z_i - \alpha_k = \xi_i p_i, \quad \Delta = \xi_i q_i. \tag{2.2}$$

Si par contre nous étudions un voisinage de $z_i = \beta_k$, nous n'avons besoin que de $p'_{i,k}$, $q'_{i,k}$ et $\xi'_{i,k}$ qui pourraient être remplacées par p_i, q_i et ξ_i telles que

$$z_i - \beta_k = \xi_i p_i, \quad \Delta = \xi_i q_i.$$

Mais il s'avère plus utile de choisir autour de $z_i = \beta_k$ la coordonnée $\tilde{z}_i = -1/z_i$. On a

$$\tilde{z}_i - \tilde{\beta}_k = \frac{z_i - \beta_k}{z_i \beta_k}$$

de sorte que nous préférons introduire plutôt p_i, q_i et ξ_i comme suit

$$\tilde{z}_i - \tilde{\beta}_k = \xi_i p_i, \quad \Delta = \xi_i q_i. \tag{2.3}$$

Nous utiliserons désormais cette définition.

Nous avons convenu de supprimer les indices A et B. Puisqu'il s'agit toujours de la fibre $\Delta = 0$ nous supprimons parfois l'indice Δ aussi, de sorte que la fibre de la correspondance $\mathcal{C}^{A,B}$ à $\Delta = 0$, dénotée C_0 dans la premier appendice, devient C.

Disons qu'un point p sur C est *spécial* si $z_i = \pm\sqrt{-1}$, 0 ou ∞ pour une des coordonnées de $(z, w) = \pi_1(p)$. Dans le lemme suivant la fonction R est toujours supposée générique.

Lemme 2.1 *Il n'existe pas de point spécial p sur C tel que*

$$\varphi(p) = \psi(p). \tag{2.4}$$

Rappelons pour la dernière fois que l'équation est en effet $\varphi^{A,B}(p) = \psi^{A,B}(p)$. Soit $\pi_1(p) = (z, w)$ et supposons que l'équation (2.4) soit satisfaite. Fixons $\epsilon = \pm\sqrt{-1}$. Soit E l'ensemble des indices i tels que $z_i = \epsilon$. Le lemme 2.1 affirme en particulier que E est vide.

Observons qu'au point $\Delta = 0$, $F(z, z') = F(z', z) = zz' + 1$. Par conséquent si $z = \pm\sqrt{-1}$ et $z' \neq z$, le quotient $Q(z, z')$ est égal à -1 et cela, même si $z' = \infty$. Donc pour $i \in E$ et $j \notin E$ le quotient $Q(z_i, z_j) = -1$. Soit $(z', w') = \varphi(p)$ et $(z'', w'') = \psi(p)$. Les équations $w'_{i,j} = w''_{i,j}$ impliquent alors que $w_{i,j} = -1$ si $i \in E$ et

$j \notin E$. De plus, puisque $z''_i = z'_i$, $i \in E$, est égal à $R(\epsilon)$ et partant fini, le point p est dans la partie de l'éclatement définie par un élément de la décomposition polyédrique sur lequel on a $f_i \geq 0$, $i \in E$ et $e_{i,j} = 0$, $i \in E$, $j \notin E$. Sur cette partie le produit

$$\prod_{i \in E} \prod_{j \neq i} w_{i,j} \tag{2.5}$$

est défini, car il correspond au caractère

$$\sum_{i \in E} f_i \tag{2.6}$$

Il est égal à $\prod_{i \in E} z''_i$.

Puisque $e_{i,j} = -e_{j,i}$ la somme (2.6) est

$$\sum_{i \in E} \sum_{j \notin E} e_{i,j}.$$

Donc (2.5) n'est que

$$\prod_{i \in E} \prod_{j \notin E} w_{i,j} = \pm 1.$$

Des équations

$$z'_i = z''_i$$

on déduit que

$$R(\epsilon)^{|E|} = \pm 1. \tag{2.7}$$

Nous avons exclu cette possibilité par généricité.

Soit $(z, w) = (z(p), w(p))$ l'image d'un point p et tel qu'aucun z_i n'est égal à $\pm\sqrt{-1}$. (Lorsqu'il n'est question que des coordonnées du point p nous préférons employer simplement la notation (z, w) mais lorsque nous voulons traiter les coordonnées dans un voisinage de p nous écrivons $(z(p), w(p))$ pour que (z, w) puissent être des coordonnées variables.) Nous introduisons la partition $D_1, \ldots, D_m$ de $\{1, \ldots, r\}$ définie par l'équivalence $\sim$: $i \sim j$ si et seulement si $z_i = z_j$ ou $z_i = -1/z_j = \tilde{z}_j$. Cette équivalence est plus grossière que celle définie par les A_k, les B'_l, et les B''_l qui définissent (A, B). Donc chacun de ces ensembles est contenu dans une classe d'équivalence. Nous répartissons chaque D_k en deux ensembles E_k et F_k de façon que si $i \in E_k$ et $j \in F_k$ alors $z_i = \tilde{z}_j$, une équation dans laquelle les valeurs 0 et ∞ sont permises. Puisqu'aucun z_i n'est égal à $\pm\sqrt{-1}$, il n'arrive jamais que $E_k = F_k$, quoique la possibilité que E_k ou F_k soit vide n'est pas exclue.

Supposons que $i \in E_k$ mais que $j \notin F_k$ ou que $j \in F_k$ mais $i \notin E_k$. Alors pour $\Delta = 0$ (qui est la seule valeur de Δ qui nous intéresse à présent) $F(z_i, z_j) = F(z_j, z_i) = z_i z_j + 1 \neq 0$ de sorte que les coordonnées $u_{i,j}$ et $u_{j,i}$ sont superflues. Donc la structure de la variété $E = E_0^{A,B}$ est donnée par les coordonnées $(u_{i,j}, u_{j,i})$, $i \in E_k$, $j \in F_k$, et en sus toutes les coordonnées z_i et quelques-unes des p_i, q_i, ξ_i. De plus, sauf pour ces paires, la valeur de $w_{i,j}$ à un point fixe est -1.

Supposons que la valeur commune a de z_i, $i \in E_k$, n'est ni une racine ni un pôle de R_0. L'équation (2.4) implique alors une équation semblable à (2.7),

$$R(a)^{e_k} R(-1/a)^{f_k} = \pm 1, \tag{2.8}$$

si $e_k = |E_k|$ et $f_k = |F_k|$. Il résulte de cette équation et de l'hypothèse de généricité de R que a n'est ni 0 ni ∞. Donc l'équation (2.4) n'est satisfaite pour aucun point spécial.

A chacune de ces paires $\{E, F\}$ sont attachées les valeurs communes z_E et $z_F = \tilde{z}_E$ des coordonnées z_i, $i \in E$ et des z_j, $j \in F$. Nous dirons qu'une paire $\{E, F\}$ est *libre* si z_E et z_F ne sont pas des zéros ou des pôles de R. Par contre si z_E et z_F sont des zéros ou pôles de R la paire sera *liée*. Dans ce cas nous supposerons d'habitude que c'est z_E qui est le zéro de R.

Afin d'examiner de plus proche la correspondance autour de $\Delta = 0$ et en particulier autour des points fixes, nous remplaçons $(u_{i,j}, u_{j,i})$ par des coordonnées plus convenables $t_{i,j}$ et $v_{i,j}$. Puisque le point p n'est pas spécial, pour les paires (i,j), $i \in E_k$, $j \in F_k$, on a $z_i\tilde{z}_j + 1 = z_i^2 + 1 \neq 0$. Fixons k et ne considérons que les $i, i', \dots$ dans E_k et les $j, j', \dots$ dans F_k. Soit $t_{i,j} = u_{i,j} - u_{j,i}$ et $t_{j,i} = -t_{i,j}$. On a

$$\begin{aligned} F(z_i, z_j)t_{i,j} &= (F(z_i, z_j) - F(z_j, z_i))u_{i,j} \\ &= 2\Delta(z_j - z_i)u_{i,j}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Si par exemple on utilise la coordonnée $\tilde{z}_j$ plutôt que z_j, cette relation devient

$$F(z_i, \tilde{z}_j)t_{i,j} = -2\Delta(z_i\tilde{z}_j + 1)u_{i,j}. \tag{2.10}$$

Il y a une troisième possibilité et même une quatrième si on admet que z_i soit remplacé par $\tilde{z}_i$. Nous nous restreignons à l'équation (2.10) en laissant au lecteur le soin de s'assurer que les arguments sont aussi valables pour les trois autres cas. En effet nous nous occuperons surtout des points ou $z_i \neq 0$ et $z_j \neq 0$ de sorte que le choix entre z_i et $\tilde{z}_i$ importe peu.

La relation

$$F(z_i, \tilde{z}_j) = z_i - \tilde{z}_j + 2\Delta z_i\tilde{z}_j$$

s'écrit d'une façon moins formelle comme

$$z_i - \tilde{z}_j = F(z_i, \tilde{z}_j) - 2\Delta z_i\tilde{z}_j = F(z_i, \tilde{z}_j)\Big(1 - \frac{z_i\tilde{z}_j}{z_i\tilde{z}_j + 1}\frac{t_{i,j}}{u_{i,j}}\Big),$$

de sorte que si nous remplaçons la paire $t_{i,j}$ et $u_{i,j}$ par la paire $t_{i,j}$ et

$$v_{i,j} = -2(z_i\tilde{z}_j + 1)\big(u_{i,j} - \frac{z_i\tilde{z}_j}{z_i\tilde{z}_j + 1}t_{i,j}\big)$$

on a

$$\Delta v_{i,j} = (z_i - \tilde{z}_j)t_{i,j}. \tag{2.11}$$

Observons que

$$\begin{aligned} v_{i,j} &= -2(z_i\tilde{z}_j + 1)\Big(u_{i,j} - u_{j,i} + u_{j,i} + \frac{z_i\tilde{z}_j}{z_i\tilde{z}_j + 1}t_{j,i}\Big) \\ &= -z_i\tilde{z}_j\{2(z_j\tilde{z}_i + 1)\Big(u_{j,i} - \frac{1}{z_i\tilde{z}_j + 1}t_{j,i}\Big)\} \\ &= z_i\tilde{z}_j v_{j,i}. \end{aligned}$$

La coordonnée supplémentaire $\lambda_{i,j}$ définie par les équations

$$F(z_i, \tilde{z}_j) = \lambda_{i,j}u_{i,j}, \qquad F(\tilde{z}_j, z_i) = \lambda_{i,j}u_{j,i}$$

est remplacée par une coordonnée $\mu_{i,j}$ telle que

$$z_i - \tilde{z}_j = \mu_{i,j}v_{i,j}, \qquad \Delta = \mu_{i,j}t_{i,j}. \tag{2.12}$$

Par conséquent

$$\mu_{i,j} = -\frac{\lambda_{i,j}}{2(z_i\tilde{z}_j + 1)}.$$

Observons que

$$2(z_i\tilde{z}_j+1)u_{i,j} = v_{i,j} + 2z_i\tilde{z}_j t_{i,j}$$
$$2(z_i\tilde{z}_j+1)u_{j,i} = v_{i,j} - 2t_{i,j}.$$

Par conséquent

$$w''_{i,j} = -\frac{u_{i,j}}{u_{j,i}} = -\frac{v_{i,j}+2z_i\tilde{z}_j t_{i,j}}{v_{i,j}-2t_{i,j}}. \tag{2.13}$$

Autour d'un point p où $z_i(p) = \alpha = \alpha_k$ est un zéro de R et $z_j(p) = \beta = \tilde{\alpha}$ un pôle, il faudra en plus savoir comment exprimer $w''_{i,j}$ en fonction des coordonnées (p_i, q_i) et (p_j, q_j) de (2.3) et (2.4). Puisqu'il s'agit des coordonnées projectives on peut supposer qu'une des coordonnées p_i et q_i est 1. Puisqu'en plus nous nous intéressons aux points par lesquels passent des courbes qui s'étendent en dehors de $\Delta = 0$ où la coordonnée q_i n'est pas 0, nous supposons que $q_i = 1$ et de la même façon que $q_j = 1$. En revanche il faut accepter que p_i ou p_j puissent tendre vers ∞ lorsque $\Delta \to 0$. Il s'avèrera que ceci n'arrive pas!

Les deux fonctions $F(z_i, \tilde{z}_j)$ et $F(\tilde{z}_j, z_i)$ s'expriment à partir des coordonnées p_i et ξ_i. Observons que $\tilde{\beta} = \alpha$ à $\Delta = 0$ mais en général $\tilde{\beta} = \alpha/(1-2\Delta\alpha)$ de sorte que $-\tilde{\beta} + \alpha = -2\Delta\alpha\tilde{\beta}$. Ainsi

$$\begin{aligned} F(z_i, \tilde{z}_j) &= z_i - \alpha + \alpha + 2\Delta z_i\tilde{z}_j - \tilde{z}_j + \tilde{\beta} - \tilde{\beta} \\ &= \xi_i p_i - \xi_j p_j + 2\Delta z_i\tilde{z}_j - 2\Delta\alpha\tilde{\beta} \\ &= \xi_i p_i - \xi_j p_j + 2\Delta(\xi_i p_i\tilde{\beta} + \xi_j p_j\alpha + \xi_i\xi_j p_i p_j). \end{aligned}$$

De la même façon

$$\begin{aligned} F(\tilde{z}_j, z_i) &= z_i - 2\Delta - \tilde{z}_j \\ &= \xi_i p_i - \xi_j p_j - 2\Delta(1+\alpha\tilde{\beta}). \end{aligned}$$

Puisque $q_i = q_j = 1$ on a $\xi_i = \xi_j = \Delta$ et il en résulte que

$$w''_{i,j} = Q(z_i, \tilde{z}_j) = -\frac{p_i - p_j + 2\Delta(p_i\tilde{\beta} + p_j\alpha + \Delta p_i p_j)}{p_i - p_j - 2(1+\alpha\tilde{\beta})}. \tag{2.14}$$

La définition des coordonnées $u_{i,j}$ ainsi que la condition que (A.11) résulte de (A.10) impliquent que l'on peut remplacer toute relation du genre

$$\sum_{\{(i_1,j_1),(j_1,i_1)\}} \cdots \sum_{\{(i_M,j_M),(j_M,i_M)\}} g_{i'_1,j'_1,\ldots,i'_M,j'_M} H_{i'_1,j'_1}, \ldots, H_{i'_M,j'_M} = 0,$$

avec $H_{i'_l,j'_l}$ égal à $z_i - \tilde{z}_j$ ou à Δ, par une relation semblable où ces deux expressions possibles pour $H_{i'_l,j'_l}$ sont remplacées, l'une par $v_{i',j'}$, l'autre par $t_{i',j'}$. On se souvient que chaque somme porte sur deux éléments (i_l, j_l) et (j_l, i_l). Elle est homogène en toutes les coordonnées $v_{i,j}, t_{i,j}$. Par exemple, il résulte de la relation triviale

$$(z_i - \tilde{z}_j)\Delta^3 + (z_{i'} - \tilde{z}_{j'})\Delta^3 = (z_i - \tilde{z}_{j'})\Delta^3 + (z_{i'} - \tilde{z}_j)\Delta^3$$

que

$$v_{i,j}t_{i',j'}t_{i',j}t_{i,j'} + v_{i',j'}t_{i,j}t_{i',j}t_{i,j'} = v_{i,j'}t_{i,j}t_{i',j}t_{i',j'} + v_{i',j}t_{i,j}t_{i,j'}t_{i',j'} \tag{2.15}$$

Cette relation s'avère importante.

A un point p donné nous avons réparti l'ensemble des indices en des sous-ensembles $D_k = E_k \cup F_k$. Nous introduisons en plus une partition de chaque $D = D_k = E \cup F$. L'ensemble des indices (i, j) tels que $i \in E_k$ et $j \in F_k$ se répartit en deux sous-ensembles: l'ensemble où $t_{i,j} = t_{i,j}(p) \neq 0$ et l'ensemble où $t_{i,j} = t_{i,j}(p) = 0$. On observe que

$$F(z_i(p), \tilde{z}_j(p)) = F(\tilde{z}_j(p), z_i(p)) = 0 \tag{2.16}$$

si $\Delta = 0$ et (i, j) est une telle paire. Nous écrivons $i \leftrightarrow j$ si $t_{i,j} \neq 0$.

Lemme 2.2 *Si $i \leftrightarrow j$, $i \leftrightarrow j'$ et $i' \leftrightarrow j$ alors $i' \leftrightarrow j'$.*

Ce lemme nous permet de définir une relation d'équivalence sur D_k en posant $i \leftrightarrow i'$ s'il existe un j tel que $i \leftrightarrow j$ et $i' \leftrightarrow j$. On définit $j \leftrightarrow j'$ de la même façon. Cette relation d'équivalence sera dite *fine*.

Supposons que $t_{i',j'} = 0$. La relation (2.15) devient

$$v_{i',j'} t_{i,j} t_{i',j} t_{i,j'} = 0,$$

d'où il résulte que $v_{i',j'} = 0$. Puisque $v_{i',j'}$ et $t_{i',j'}$ ne peuvent pas être tous les deux nuls, le lemme est vérifié.

Si la valeur commune z_E de z_i, $i \in E$ est un zéro α et par conséquent z_F est le β correspondant, il y a en plus les coordonnées p_i, q_i et ξ_i et p_j, q_j et ξ_j. La relation homogène

$$(z_i - \tilde{z}_j + g\Delta)\Delta^2 = (z_i - \alpha)\Delta^2 - (\tilde{z}_j - \tilde{\beta})\Delta^2$$

avec $g = 2\alpha^2/(1 - 2\Delta\alpha)$ découle de

$$(z_i - \tilde{z}_j)\Delta^2 = z_i\Delta^2 - \tilde{z}_j\Delta^2$$

et

$$\alpha - \tilde{\beta} = \alpha - \frac{\alpha}{1 - 2\Delta\alpha} = -\frac{2\Delta\alpha^2}{1 - 2\Delta\alpha}.$$

Elle implique que

$$(v_{i,j} + g t_{i,j}) q_i q_j = p_i q_j t_{i,j} + p_j q_i t_{i,j}. \tag{2.17}$$

Il s'ensuit que si deux des trois coordonnées q_i, q_j et $t_{i,j}$ ne sont pas égales à zéro, alors la troisième ne l'est pas non plus. Toutefois cette relation est bien moins importante que (2.15).

Le but de ce chapitre est de trouver des formes convenables des équations de Bethe ou des points fixes de la correspondance autour d'un point fixe p dans C donné. Nous avons fixé $D = D_k$ car, au moins à $\Delta = 0$, nous pouvons isoler les coordonnées z_i, $\tilde{z}_j$, $w_{i,j}$, $i \in E$ et $j \in F$ des autres. Une paire (i, j) sera dite *pertinente* si $i \in E$ et $j \in F$. Si (i, j) n'est pas pertinente, alors $w''_{i,j} = -1$ et, en p même, la relation (2.11) fixe les variables $t_{i,j}$ et $v_{i,j}$ à 0 et 1. Pour ces paires qui ne sont pas pertinentes, nous supposons donc que, sur la fibre $\Delta = 0$ la coordonnée $t_{i,j} = 0$ et $v_{i,j} = 1$ dans un voisinage de p.

A ce point nous voulons introduire le premier argument informel en affirmant que le découplage évident à $\Delta = 0$ a pour conséquence qu'il suffit d'étudier le cas $D = \{1, \ldots, r\}$. Pour les paires qui ne sont pas pertinentes l'équation (2.11) nous permet de trouver, dans un voisinage de p, $t_{i,j}$ en fonction de z_i et $\tilde{z}_j$, de sorte que la coordonnée $t_{i,j}$ devient superflue. Il en résulte que les facteurs $w''_{i,j}$ attachés à ces indices, qui s'expriment selon (2.13) en fonction de $t_{i,j}$, peuvent être intégrés au côté gauche des équations de Bethe. Sans nous préoccuper davantage de ce découplage nous l'acceptons. Ainsi, sauf pour les arguments combinatoires, nous faisons semblant que $D = \{1, \ldots, r\}$.

Fixons D et ne considérons que des indices dans D. Pour $i \leftrightarrow j$ nous supposons que $t_{i,j} = 1$ de sorte que $v_{i,j}/t_{i,j} = v_{i,j}$. Selon les équations (2.12) on n'a besoin dans une classe d'équivalence fine que d'un seul z_i ou $\tilde{z}_j$. Les autres s'expriment à partir de cette coordonnée et de Δ et des $v_{i,j}$. En particulier $\mu_{i,j} = \Delta$. Si i, i', j, j' sont tous dans la même classe d'équivalence fine l'équation (2.15) devient

$$v_{i,j} + v_{i',j'} = v_{i,j'} + v_{i',j}. \tag{2.18}$$

Cette relation implique l'existence de nombres r_i et s_j tels que

$$v_{i,j} = r_i - s_j.$$

Ces nombres sont uniques à une constante additive près.

Pour $i \in E$ et $j \in F$ mais $i \not\leftrightarrow j$ on met $v_{i,j} = 1$ et on garde les coordonnées $t_{i,j}$ aussi bien que $z_i - \tilde{z}_j$. Au point p lui-même $t_{i,j} = 0$. Les relations entre les $t_{i,j}$ ne sont plus linéaires; elles sont plutôt quadratiques. Supposons que $i \leftrightarrow j$ et $i' \leftrightarrow j$ mais que $i \not\leftrightarrow j'$. Il résulte de (2.15) que

$$v_{i,j}t_{i',j'}t_{i,j'} + t_{i,j'} = t_{i',j'} + v_{i',j}t_{i,j'}t_{i',j'}. \tag{2.19}$$

Si par contre $i \leftrightarrow j$ et $i \leftrightarrow j'$ mais $i' \not\leftrightarrow j$, alors

$$v_{i,j}t_{i',j'}t_{i',j} + t_{i',j} = v_{i,j'}t_{i',j}t_{i',j'} + t_{i',j'}. \tag{2.20}$$

Si enfin $i \leftrightarrow j$ et $i' \leftrightarrow j'$ mais $i \not\leftrightarrow j'$, alors

$$v_{i,j}t_{i',j}t_{i,j'} + v_{i',j'}t_{i',j}t_{i,j'} = t_{i',j} + t_{i,j'}. \tag{2.21}$$

On obtient deux autres relations semblables en prenant d'abord $i \leftrightarrow j$ mais $i \not\leftrightarrow j'$ et $i' \not\leftrightarrow j$ et $i' \not\leftrightarrow j'$ et ensuite en supposant que les quatre indices sont tous indépendants. La première, la plus importante, est

$$v_{i,j}t_{i',j'}t_{i',j}t_{i,j'} + t_{i',j}t_{i,j'} = t_{i',j}t_{i',j'} + t_{i,j'}t_{i',j'} \tag{2.22}$$

alors que la seconde est cubique

$$t_{i',j'}t_{i',j}t_{i,j'} + t_{i,j}t_{i',j}t_{i,j'} = t_{i,j}t_{i',j}t_{i',j'} + t_{i,j}t_{i,j'}t_{i',j'}. \tag{2.23}$$

Si la paire (z_E, z_F) est liée, c'est-à-dire si $z_E = \alpha$ et $z_F = \beta$ où α est un zéro de R et $\beta = \tilde{\alpha}$ un pôle, il y a des coordonnées supplémentaires. Si $i \leftrightarrow j$ il y a deux possibilités: soit $q_i \neq 0$, $q_j \neq 0$ de sorte qu'on peut mettre $q_i = q_j = 1$ et la relation (2.17) devient

$$v_{i,j} + g = p_i + p_j; \tag{2.24}$$

soit $q_i = q_j = 0$ au point p de sorte qu'on peut mettre $p_i = p_j = 1$ et la relation (2.17) devient

$$(v_{i,j} + g)q_iq_j = q_i + q_j, \tag{2.25}$$

une relation quadratique. Rappelons enfin que les cas $q_i = p_j = 0$ ou $q_j = p_i = 0$ sont exclus si $i \leftrightarrow j$ par l'équation (2.17).

Si par contre $i \not\leftrightarrow j$ alors on met $v_{i,j} = 1$. Si $q_i = p_j = 1$ la relation (2.17) devient

$$(1 + gt_{i,j})q_j = p_iq_jt_{i,j} + t_{i,j}, \tag{2.26}$$

une relation qui lie q_j et $t_{i,j}$. Si $q_j = p_i = 1$ il y a une relation pareille

$$(1 + gt_{i,j})q_i = t_{i,j} + p_jq_it_{i,j}. \tag{2.27}$$

Si enfin $p_i = p_j = 1$ alors

$$(1 + gt_{i,j})q_iq_j = (q_i + q_j)t_{i,j}, \tag{2.28}$$

relation pour laquelle, contrairement aux deux relations précédentes, les termes de plus bas degré sont quadratiques.

Après ces préparatifs nous venons à l'équation $\varphi(q) = \psi(q)$ autour d'un point fixe $p \in C$ donné. Les coordonnées z_i et $w_{i,j}$ sont celles de q. Supposons aux fins de simplicité que $D = \{1, \dots, r\}$.

Soit $e = |E|$ le nombre d'éléments de E, $f = |F|$ celui de F. Les équations $\varphi(p) = \psi(p)$ qui s'écrivent

$$(2.29)\qquad \begin{aligned} R(z_i) &= \prod_{m\neq i} w''_{i,m}, \quad i \in E,\\ R(z_j)^{-1} &= \prod_{m\neq j} w''_{m,j} \quad j \in F, \end{aligned}$$

deviennent

$$(2.30)\qquad \begin{aligned} R(z_i) &= (-1)^{r-f-1} \prod_{j\in F} w''_{i,j}, \quad i \in E,\\ R(z_j)^{-1} &= (-1)^{r-e-1} \prod_{i\in E} w''_{i,j}. \quad j \in F. \end{aligned}$$

Si F est vide ces équations deviennent simplement

$$(2.31)\qquad R(z_i) = (-1)^{r-1}.$$

Dans le cas générique cette équation a N racines distinctes. Si E est vide on obtient une équation semblable pour $R(z_j)$. Donc si un des deux ensembles E et F est vide, nous pourrons traiter facilement les équations pour les coordonnées dans ces ensembles. Supposons, par exemple, que tous les F_k sont vides et que chaque E_k ne contient qu'un seul élément; nous obtenons $N(N-1)\dots(N-r+1)$ solutions qui se déforment facilement et qui donnent toutes les solutions admissibles, au moins si le théorème est valable. Même sans le théorème il est évident que génériquement les déformations de ces solutions donnent le nombre voulu de solutions des équations de Bethe et que les vecteurs attachés par Bethe à ces solutions sont linéairement indépendants. Donc par déformation, qui sur l'ordinateur se fait facilement, on résout vite par la méthode de Bethe le problème de départ, c'est-à-dire celui de trouver les vecteurs et les valeurs propres de l'application linéaire de [B].

Nous savons exprimer les équations (2.30) en termes des coordonnées de C. Les deux cas pour (E, F), le libre et le lié, sont foncièrement différents.

Supposons d'abord que (E, F) soit libre. La relation (2.1) donne

$$(2.32)\qquad R(z_j)^{-1} = R(\tilde z_j)/\rho,$$

et la seconde des équations (2.30) deviennent

$$(2.33)\qquad R(\tilde z_j)/\rho = (-1)^{r-e-1} \prod_{i\in E} w''_{i,j}.$$

En particulier, au point p, où tous les z_i sont égaux à z_E ainsi que tous les $\tilde z_j$, on obtient en prenant des produits de (2.30) et (2.33) que

$$(2.34)\qquad R(z_E)^f (-1)^{e(r-f-1)} = R(z_E)^e (-1)^{f(r-e-1)} \rho^f.$$

Puisqu'on peut supposer ρ générique, e et f sont distincts et la valeur de $R(z_E)$ est générique. Les cas $e = 0$ et $f = 0$ ayant été écartés, il résulte de l'inégalité $f \neq e$ qu'un de ces deux entiers est plus grand que 1. Par conséquent le point p n'est pas un point fixe admis! On verra qu'il n'admet pas de déformation en solution admissible.

Il faudra examiner les équations (2.30) et leurs solutions en $\Delta = 0$ et autour de $\Delta = 0$. L'analyse est quelque peu différente dans les deux cas. Commençons par $\Delta = 0$. Il résulte de la relation (2.13) que $w''_{i,j} = -1$ si $i \not\leftrightarrow j$ puisqu'alors $t_{i,j}(p) = 0$ et $v_{i,j} = 1$. Les équations (2.30) deviennent par conséquent un ensemble d'équations, une pour chaque classe ω d'équivalence fine dans D. Soit e_ω le nombre d'éléments dans l'intersection de ω et E, f_ω celui dans l'intersection de ω et F. En écrivant $v_{i,j} = r_i + s_j$ lorsque $i \leftrightarrow j$ et en posant

$$a = 2z_E^2 \neq -2, \quad b = -2, \quad c = (-1)^{r-1} R(z_E), \quad d = (-1)^{r-1} R(z_E)/\rho,$$

on obtient

$$(2.35)\qquad \begin{aligned} c &= \prod_{j\in\omega\cap F} \frac{r_i - s_j + a}{r_i - s_j + b}, &\qquad i \in \omega\cap E,\\ d &= \prod_{i\in\omega\cap E} \frac{r_i - s_j + a}{r_i - s_j + b}, &\qquad j \in \omega\cap F. \end{aligned}$$

Nous observons d'emblée que la généricité de ρ et par conséquent de z_E, de c, et de d ainsi que la relation

$$(2.36)\qquad c^{e_\omega} = d^{f_\omega}$$

impliquent l'existence d'entiers m_ω, m, e et f tels que $e_\omega/m_\omega = e/m$ et $f_\omega/m_\omega = f/m$. Observons que $\sum m_\omega = m$. De l'équation (2.36) résulte l'équation

$$(2.37)\qquad (-1)^{e_\omega(r-1)} R(z_E)^{f_\omega} = (-1)^{f_\omega(r-1)} R(z_E)^{e_\omega} \rho^{f_\omega}.$$

Nous revenons encore dans le chapitre suivant aux équations que satisfont c et d, n'observant ici que l'on peut trouver N valeurs z_E distinctes telles que $c = (-1)^{r-1} R(z_E)$ parce que c est générique.

Tournons-nous maintenant vers le cas où (E, F) est une paire liée. Ce sont alors les équations (2.14) qui sont pertinentes. On suppose que z_E est un zéro α de R et z_F le pôle β correspondant. Alors autour de $\Delta = 0$ on a $z_i - \alpha = \Delta p_i$ et

$$(2.38)\qquad \begin{aligned} R(z_i) &= A\Delta p_i + O(\Delta^2), &\qquad A = R'(z_E),\\ R(z_j)^{-1} &= B\Delta p_j + O(\Delta^2), &\qquad B = A/\rho. \end{aligned}$$

car $R(z)^{-1} = R(\tilde z)/\rho$. Nous soulignons que le quotient A/B est générique.

Dans cet exposé que nous avouons être informel nous n'étudions pas les équations précises qui résultent de (2.14) et de (2.37). Nous les simplifions. Soit

$$(2.39)\qquad S(p, q) = \frac{p - q}{p - q - a}, \qquad a = 2(1 + \alpha^2) \neq 0.$$

Les équations qui seront examinées sont

$$(2.40)\qquad \begin{aligned} A\Delta p_i &= (-1)^{r-1} \prod_{j\in F} S(p_i, p_j), &\quad i \in E,\\ B\Delta p_j &= (-1)^{r-1} \prod_{i\in E} S(p_i, p_j), &\quad j \in F. \end{aligned}$$

Observons que $p_i = p_{i'}$ si par exemple i et i' appartiennent au même A_k.

Notre étude de ces équations se divise en celle des équations (2.35) qui définissent une variété dans la fibre de C à $\Delta = 0$, ensuite celle des déformations des points sur ces variétés, autour de $\Delta = 0$, et celle des équations (2.40). Observons déjà qu'en $\Delta = 0$ les équations (2.40) ont des solutions triviales qui ne nous intéressent point, celles pour lesquelles à chaque i est attaché un j tel que $p_i + p_j = 0$. En effet l'ensemble de ces points fixes n'est plus de dimension 0 à $\Delta = 0$ quoique l'ensemble de points qui se déforment à $\Delta \neq 0$ l'est.

3. Des variétés spéciales. Ce chapitre est consacré à une étude préliminaire des paires libres (E, F). La fibre C de la correspondance à $\Delta = 0$ n'est plus irréductible. Pour les paires libres, z_E et z_F ne sont ni des zéros ni des pôles de R, et les composantes irréductibles pertinentes sont celles définies à partir des équations (2.11). Pour chaque paire (i, j), on a soit $z_i = \tilde z_j$ soit $t_{i,j} = 0$. Donc sur chaque composante il y a des égalités entre les coordonnées z_i ou $\tilde z_j$ qui sont forcément satisfaites. Aux intersections des composantes, les deux facteurs qui interviennent dans une des équations (2.11), donc $z_i - \tilde z_j$ et $t_{i,j}$, sont pour certaines paires (i, j) tous les deux nuls.

Pour qu'un point p appartienne à une composante donnée il faut évidemment que $z_i(p) = \tilde{z}_j(p)$ si cette relation est satisfaite partout sur la composante, mais il pourrait bien avoir des paires (i, j) telles que $z_i(p) = \tilde{z}_j(p)$ sans que $z_i = \tilde{z}_j$ partout sur la composante. Dans ce cas, $t_{i,j}$ est 0 partout sur la composante et en particulier au point p. Par conséquent p peut appartenir à plusieurs composantes irréductibles, celles où $z_i = z_j$ ou $z_i = \tilde{z}_j$ partout si i et j sont équivalents dans le sens fin par rapport à p.

Nous fixons désormais implicitement les ensembles de A et de B, donc les ensembles A_i, $1 \leq i \leq s$ et B_j, $1 \leq j \leq t$; et nous désignons par r le nombre total de ces ensembles, $r = s + t$. (Ce nombre est donc plus petit ou égal au nombre r introduit dans l'introduction. Il faut l'en distinguer.) Le poids de chacun de ces ensembles est le nombre de coordonnées qu'il contient. On peut attacher à chaque composante irréductible une décomposition de $\{1, \ldots, r\}$ en paires (E_k, F_k). L'ensemble E_k, ainsi que l'ensemble F_k, est un ensemble maximal dans lequel toutes les coordonnées z_i, $i \in E_k$ sont égales entre elles. Si $i \in E_k$ et $j \in F_k$ alors $z_j = \tilde{z}_i$. Dans ce chapitre nous étudions les équations des points fixes sur une composante donnée mais avec l'hypothèse supplémentaire que $E \cup F = D = \{1, \ldots, r\}$. Il s'agit surtout de trouver une borne supérieure de la multiplicité d'un tel point, qui s'avérera par la suite être la valeur exacte de cette multiplicité.

Soit $e = |E|$ et $f = |F|$ et $a \neq b$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$ quatre nombres complexes génériques. Soient μ_i, $1 \leq i \leq e$ et $\mu_{\underline{j}}$, $1 \leq \underline{j} \leq f$ des entiers positifs. Nous considérons les équations

$$c = \prod_{\underline{j}=1}^{f} \left(\frac{r_i - s_{\underline{j}} + a}{r_i - s_{\underline{j}} + b} \right)^{\mu_{\underline{j}}}, \qquad d = \prod_{i=1}^{e} \left(\frac{r_i - s_{\underline{j}} + a}{r_i - s_j + b} \right)^{\mu_i}, \tag{3.1}$$

dont les inconnues sont les r_i, $1 \leq i \leq e$ et les $s_{\underline{j}}$, $1 \leq \underline{j} \leq f$. Ces équations découlent des équations (2.35). Cependant, comme mentionné dans l'introduction nous tenons explicitement compte des conditions imposées par la partition A. (Puisqu'il est supposé que $D = \{1, \ldots, r\}$ l'ensemble B est vide.) Si i et i' appartiennent au même A_k et j et j' au même A_l alors $v_{i,j} = v_{i',j'}$ de sorte que $r_i = r_{i'}$ et $s_j = s_{j'}$. Les entiers μ_i sont les entiers $|A_i|$, $A_i \subset E$, et les entiers $\mu_{\underline{j}}$ les entiers $|A_{\underline{j}}|$, $A_{\underline{j}} \subset F$. Nous avons trouvé utile de distinguer entre les éléments de la partition contenus dans E et ceux contenus dans F en soulignant l'indice de ces derniers.

Soient $\mu(E) = \sum_i \mu_i$ et $\mu(F) = \sum_{\underline{j}} \mu_{\underline{j}}$. Observons qu'avec les conventions du chapitre précédent $\mu(E)$ serait e. L'entier e a acquis une signification nouvelle qu'il gardera par la suite. Pour que les équations (3.1) aient des solutions il faut que $c^{\mu(E)} = d^{\mu(F)}$. Une des $e + f$ équations est alors superflue. Quoique nous les avons déduites à partir des équations comme des équations de points fixes aux points de la composante irréductible où la coordonnée $t_{i,\underline{j}}/v_{i,\underline{j}}$ n'est nulle que si elle est identiquement nulle sur la composante. On pourrait donner les équations des points fixes pour lesquels cette condition n'est pas satisfaite, mais nous préférons dans ce chapitre introduire à partir des équations (3.1) des variétés projectives abstraites. Nous revenons aux correspondances dans le prochain chapitre.

Rappelons qu'il est entendu que les coordonnées r_i et $s_{\underline{j}}$ ne sont définies qu'à une constante additive près,

$$r_i \to r_i + t, \qquad s_{\underline{j}} \to s_{\underline{j}} + t.$$

Si on permet aux coordonnées r_i et $s_{\underline{j}}$ de tendre vers l'infini, ces équations définissent une variété algébrique projective V. Plus précisément il s'agit d'un schéma dans le sens de Grothendieck. Sinon la notion de multiplicité d'un point dans une variété de dimension zéro n'aurait pas de sens. Nous préférons utiliser une terminologie moins exacte mais qui, en revanche, décourage moins le lecteur inexperimenté.

Soit

$$X = \prod_{i=1}^{e} \mathbb{P}^1 \times \prod_{j=1}^{f} \mathbb{P}^1$$

avec des coordonnées x_i et $x_{\underline{j}}$ assujetties à l'équation

$$\prod_{i=1}^{e} x_i^{\mu_i/\eta} = \prod_{j=1}^{f} x_{\underline{j}}^{\mu_{\underline{j}}/\eta}.$$

où η est le plus grand diviseur commun de tous les μ_i et $\mu_{\underline{j}}$. Posons

$$\begin{aligned} x_i &= \prod_{\underline{j}=1}^{f} \left(\frac{r_i - s_{\underline{j}} + a}{r_i - s_{\underline{j}} + b} \right)^{\mu_{\underline{j}}}, \\ x_{\underline{j}} &= \prod_{i=1}^{e} \left(\frac{r_i - s_{\underline{j}} + a}{r_i - s_{\underline{j}} + b} \right)^{\mu_i}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Il n'est guère surprenant qu'il soit parfois convenable et même souvent nécessaire de remplacer (en revenant sur nos pas) les coordonnées r_i et $s_{\underline{j}}$ par des coordonnées $v_{i,\underline{j}}$, $1 \le i \le e$, $1 \le \underline{j} \le f$ en posant $r_i - s_{\underline{j}} = v_{i,\underline{j}}$. Les variables $v_{i,\underline{j}}$ sont assujetties aux relations

$$v_{i,\underline{j}} + v_{i',\underline{j}'} = v_{i,\underline{j}'} + v_{i',\underline{j}}. \tag{3.3}$$

Les équations (3.2) deviennent

$$\begin{aligned} x_i &= \prod_{\underline{j}=1}^{f} \left(\frac{v_{i,\underline{j}} + a}{v_{i,\underline{j}} + b} \right)^{\mu_{\underline{j}}}, \\ x_{\underline{j}} &= \prod_{i=1}^{e} \left(\frac{v_{i,\underline{j}} + a}{v_{i,\underline{j}} + b} \right)^{\mu_i}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

On écrit alors les équations (3.1) d'une façon simple

$$x_i = c, \quad x_{\underline{j}} = d. \tag{3.5}$$

En écrivant les équations de cette façon on obtient immédiatement la variété projective V. On remplace $v_{i,\underline{j}}$ par $v_{i,\underline{j}}/t_{i,\underline{j}}$ où $(t_{i,\underline{j}}, v_{i,\underline{j}})$ sont des coordonnées projectives. Lorsque quelqu'unes des coordonnées $t_{i,\underline{j}}$ deviennent 0 les équations se découplent de sorte qu'en fin de compte on revient aux équations (3.1). Donc au début nous ne considérons que des solutions telles que tous les $t_{i,\underline{j}}$ sont 1 et par conséquent tous les r_i et $s_{\underline{j}}$ finis.

On pourrait essayer de résoudre les équations (3.5) en admettant des valeurs $v_{i,j} = -a$ et $v_{i,j} = -b$ et en donnant des valeurs arbitraires aux produits (3.4) qui contiennent au moins un facteur 0 et au moins un facteur ∞. Cela est impossible. Appelons en effet une telle solution une solution *spectrale*. Le lemme suivant est tout à fait semblable au lemme A.6.

Lemme 3.1 *Il n'existe pas de solution spectrale des équations (3.4) et (3.5).*

Pour une solution spectrale il existe une paire (i, j) telle que $v_{i,\underline{j}} = -a$. Puisque c n'est ni 0 ni ∞ il existe en plus un indice j' tel que $v_{i,\underline{j}'} = -b$. Puisque d non plus n'est ni 0 ni ∞ il existe un i' tel que $v_{i',\underline{j}} = -b$. Alors

$$v_{i',\underline{j}} - v_{i,\underline{j}} = a - b$$

et

$$v_{i,\underline{j}'} - v_{i,\underline{j}} = a - b.$$

De l'équation

$$v_{i,\underline{j}} + v_{i',\underline{j}'} = v_{i,\underline{j}'} + v_{i',j}$$

et du fait que $a \neq b$, il résulte que $v_{i',\underline{j}'} \neq -a$. Mais un indice $\underline{j}''$ tel que $v_{i',\underline{j}''} = -a$ doit exister parce que $c \neq 0$.

En effet nous pouvons construire une suite

$$(i_0, \underline{j}_0), (i_0, \underline{j}_1), (i_1, \underline{j}_1), (i_1, \underline{j}_2), \dots, (i_{n-1}, \underline{j}_n), (i_n, \underline{j}_n) \tag{3.6}$$

telle que

$$v_{i_m,\underline{j}_m} = -a,\ 1 \le m \le n, \quad v_{i_m,\underline{j}_{m+1}} = -b,\ 1 \le m < n$$

et telle que $(i_0, \underline{j}_0) = (i_n, \underline{j}_n)$. Il est convenable de définir $(i_m, \underline{j}_m)$ pour tout entier m en posant $(i_{m+sn}, \underline{j}_{m+sn}) = (i_m, \underline{j}_m)$, $s \in \mathbb{Z}$. La relation

$$v_{i_m,\underline{j}_{m'}} = (m'-m)a + (m-m')b - a \tag{3.7}$$

est évidente pour $m' = m$ et $m' = m+1$. Elle résulte en général par récurrence sur $|m'-m|$ de la relation

$$v_{i_{m-1},\underline{j}_{m'+1}} + v_{i_m,j_{m'}} = v_{i_{m-1},\underline{j}_{m'}} + v_{i_m,\underline{j}_{m'+1}},$$

qui n'est qu'un cas particulier de (3.3). Mais puisque la suite des $(i_m, \underline{j}_m)$ est périodique et $a \neq b$, la relation (3.7) est manifestement impossible.

Les équations admettent une modification simple mais utile. On a

$$\frac{(v_{i,j}+\epsilon)/\lambda + a}{(v_{i,j}+\epsilon)/\lambda + b} = \frac{v_{i,j}+a'}{v_{i,j}+b'}$$

avec $a' = \lambda a + \epsilon$ et $b' = \lambda b + \epsilon$. Donc en utilisant de nouvelles variables on peut supposer que $a = -b = \sqrt{-1}$, ce que nous ferons souvent. Alors des valeurs réelles pour des $v_{i,j}$ mènent à des quotients dont la valeur absolue est 1 et il sera utile de supposer que $|c| = |d| = 1$. Puisque c'est le cas générique qui nous importe, nous admettrons cette hypothèse lorsqu'elle est convenable mais seulement après avoir vérifié deux lemmes qui sont valables sous la seule hypothèse que $c \neq 0$ et $d \neq 0$.

Le lemme suivant est une forme plus forte du lemme précédent.

Lemme 3.2 *Supposons que $b = -a = \bar{a}$. Il existe une constante ϵ telle que, pour tout point fixe de la correspondance (φ, ψ), on ait*

$$|v_{i,\underline{j}} \pm a| \ge \epsilon$$

pour tout i et j.

Choisissons δ tel que

$$\delta < min\{|c|, |d|\} \le max\{|c|, |d|\} < 1/\delta$$

et soit $M = max\{e, f\}$. Choisissons ϵ en sorte que $|v_{i,\underline{j}} + a| < \epsilon$ implique

$$\left|\frac{v_{i,\underline{j}}+a}{v_{i,\underline{j}}-a}\right| < \delta^{M^{2M}}$$

et $|v_{i,\underline{j}} - a| < \epsilon$ implique

$$\left|\frac{v_{i,\underline{j}}+a}{v_{i,\underline{j}}-a}\right| > \delta^{-M^{2M}}.$$

Supposons qu'il existe une solution des équations (3.4) et (3.5) et un i et un $\underline{j}$ tel que

$$\left|\frac{v_{i,\underline{j}}+a}{v_{i,\underline{j}}-a}\right| < \delta^{M^m},\ m \ge 1.$$

Alors il existe un $\underline{j}'$ tel que

$$|\frac{v_{i,\underline{j}'}+a}{v_{i,\underline{j}'}-a}| > \delta^{-M^{m-1}}$$

car sinon le produit

$$\prod_{\underline{j}=1}^{f}|\frac{v_{i,\underline{j}}+a}{v_{i,\underline{j}}-a}| \leq \delta^{M^{m-1}} \leq \delta.$$

Il existe aussi un i' tel que la même inégalité soit satisfaite lorsque on substitue $(i', \underline{j})$ à $(i, \underline{j}')$. De la même façon, s'il existe i et $\underline{j}$ tel que

$$|\frac{v_{i,\underline{j}}+a}{v_{i,\underline{j}}-a}| > \delta^{-M^{m}}$$

alors il existe un $\underline{j}'$ tel que

$$|\frac{v_{i,\underline{j}'}+a}{v_{i,\underline{j}'}-a}| < \delta^{M^{m-1}}.$$

Ces remarques nous permettent de construire par récurrence à partir d'une paire $(i_1, \underline{j}_1)$ qui satisfait à une des inégalités

$$|v_{i,\underline{j}} \pm a| < \epsilon$$

une suite

$$(i_0, \underline{j}_0), (i_0, \underline{j}_1), \ldots, (i_{n-1}, \underline{j}_n), (i_n, \underline{j}_n), \qquad n \leq 2M,$$

telle que $(i_0, \underline{j}_0) = (i_n, \underline{j}_n)$ et

$$|\frac{v_{i_m,\underline{j}_m}+a}{v_{i_m,\underline{j}_m}-a}| < \delta,$$
$$|\frac{v_{i_m,\underline{j}_{m+1}}-a}{v_{i_m,\underline{j}_{m+1}}+a}| < \delta$$

pour $0 \leq m \leq n$. Puisqu'il nous est permis de choisir δ très petit, nous pouvons supposer que les premières de ces inégalités impliquent que

$$|v_{i_m,\underline{j}_m} + a| < |a/K|, \tag{3.8}$$

et les deuxièmes que

$$|v_{i_m,\underline{j}_{m+1}} - a| < |a/K| \tag{3.9}$$

où K est un entier demeurant à notre disposition.

En imitant la démonstration de l'égalité (3.7) nous définissons la suite $(i_m, \underline{j}_m)$ pour tout m en posant $(i_{m+rn}, \underline{j}_{m+rn}) = (i_m, \underline{j}_m)$ et vérifions que

$$|v_{i_m,\underline{j}_{m'}} + (1-2m'+2m)a| < |3^m a/K|.$$

En prenant $K = 2 \cdot 3^M$ et d'abord $m = m' = 0$ mais ensuite $m = 0$ et $m' = n$ nous obtenons de

$$2na = (v_{i_0,\underline{j}_0} + a) - (v_{i_0,\underline{j}_n} + (1-2n)a)$$

que

$$|2na| \leq |a/K| + |3^n a/K| < |a|,$$

dont l'impossibilité conclut la preuve.

Corollaire 3.3 *La variété des solutions de (3.4) et (3.5) est un ensemble fini.*

La variété des solutions de (3.4) et (3.5) est une variété algébrique complexe affine. Sur une telle variété une fonction rationnelle qui omet un ensemble ouvert est constante sur chaque composante irréductible. Les fonctions $v_{i,\underline{j}}/t_{i,\underline{j}}$ sont des fonctions rationnelles sur cette variété et, par le lemme, l'ensemble de leurs valeurs a une intersection vide avec des voisinages ouverts de $\pm a$. Donc chacune de ces fonctions est constante sur chacune des composantes irréductibles qui sont en nombre fini. Il résulte alors facilement du découplage des équations lorsque quelques-unes des coordonnées $t_{i,\underline{j}}$ sont zéro que la variété projective V est aussi finie.

Nous supposons ensuite que $|c| = |d| = 1$.

Lemme 3.4 *Si $b = \bar{a} = -a$ et $|c| = |d| = 1$ alors toutes les solutions des équations (3.4) et (3.5) sont réelles.*

Le lemme se vérifie comme les deux lemmes précédents. Supposons que quelques-uns parmi les $v_{i,j}$ ne sont pas réels. Soit ϵ le signe de $a\sqrt{-1}$. On a

$$\left|\frac{v+a}{v-a}\right| < 1 \Longleftrightarrow \epsilon\Im(v) > 0,$$
$$\left|\frac{v+a}{v-a}\right| > 1 \Longleftrightarrow \epsilon\Im(v) < 0.$$

Puisque $|c| = |d| = 1$ il résulte de l'existence d'une paire $(i, \underline{j})$ telle que $\Im(v_{i,\underline{j}}) > 0$ qu'il existe un $i' \neq i$ et un $\underline{j}' \neq j$ tels que

$$\Im(v_{i',\underline{j}}) < 0 \qquad \Im(v_{i,\underline{j}'}) < 0.$$

Par conséquent nous pouvons à partir de cette paire construire encore une fois une suite (3.6) mais telle que

$$\Im(v_{i_m,\underline{j}_m}) > 0, \quad \Im(v_{i_m,\underline{j}_{m+1}}) < 0.$$

Soit

$$\delta = \min\{\Im(v_{i_m,\underline{j}_m}), -\Im(v_{i_m,\underline{j}_{m+1}})\}.$$

Puisque

$$v_{i_m,\underline{j}_{m'}} = v_{i_m,\underline{j}_{m'-1}} + v_{i_{m'-1},\underline{j}_{m'}} - v_{i_{m'-1},\underline{j}_{m'-1}}$$

on peut démontrer par récurrence que si $l > 0$ alors

$$\Im(v_{i_m,\underline{j}_{m+l}}) < -(2l-1)\delta.$$

De la même façon

$$v_{i_m,\underline{j}_{m'}} = v_{i_{m'},\underline{j}_{m'}} + v_{i_m,\underline{j}_{m'+1}} - v_{i_{m'},\underline{j}_{m'+1}}.$$

Il résulte de cette équation que si $l > 0$ alors

$$v_{i_{m+l},\underline{j}_m} > (2l-1)\delta.$$

Ces deux inégalités sont impossibles et nous avons déduit une contradiction de l'hypothèse qu'il existe un $v_{i,\underline{j}}$ avec $\Im(v_{i,\underline{j}}) > 0$. De la même façon il n'existe pas de $v_{i,\underline{j}}$ avec $\Im(v_{i,\underline{j}}) < 0$. Le lemme s'ensuit.

Soit ϕ l'application définie par (3.4). L'espace défini par les variables $v_{i,\underline{j}}$ est un espace affine de dimension $e + f - 1$ dans lequel les $v_{1,\underline{j}}$, $1 \leq \underline{j} \leq f$ et $v_{i,\underline{1}}$, $1 < i \leq e$ sont des coordonnées possibles. Il est plus simple d'utiliser toutes les variables $v_{i,\underline{j}}$ aussi bien que les différentielles $dv_{i,\underline{j}}$. La dimension de X est aussi $e + f - 1$.

Lemme 3.5 *Supposons que $b = \bar{a} = -a$ et que $|c| = |d| = 1$. En toute solution finie $(v_{i,\underline{j}})$ des équations (3.4) et (3.5), l'application tangentielle $d\phi$ est un isomorphisme.*

Soulignons que l'application ϕ est aussi définie sur la variété projective attachée aux coordonnées $(t_{i,\underline{j}}, v_{i,\underline{j}})$. Nous n'affirmons pas que le lemme est vrai aux points où certains des $t_{i,\underline{j}}$ sont zéro.

Il faut montrer que les équations

$$0 = \sum_{\underline{j}=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial v_{i,\underline{j}}} dv_{i,\underline{j}},$$
$$0 = \sum_{i=1}^{e} \frac{\partial x_{\underline{j}}}{\partial v_{i,\underline{j}}} dv_{i,\underline{j}}$$

n'ont que la solution triviale. Dans ces équations on peut remplacer les coefficients

$$\frac{\partial x_i}{\partial v_{i,\underline{j}}}, \quad \frac{\partial x_{\underline{j}}}{\partial v_{i,\underline{j}}}$$

par

$$\frac{1}{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial v_{i,\underline{j}}}, \quad \frac{1}{x_{\underline{j}}}\frac{\partial x_{\underline{j}}}{\partial v_{i,\underline{j}}}.$$

Puisque

$$\frac{v-a}{v+a}\frac{d}{dv}\Big(\frac{v+a}{v-a}\Big) = -2a\frac{1}{v^2-a^2}$$

les équations deviennent

$$0 = \sum_{\underline{j}=1}^{f} A_{i,\underline{j}} dv_{i,\underline{j}},$$
$$0 = \sum_{i=1}^{e} A_{i,\underline{j}} dv_{i,\underline{j}}. \tag{3.10}$$

On a mis

$$A_{i,\underline{j}} = \frac{\mu_i \mu_{\underline{j}}}{v_{i,j}^2 - a^2}.$$

Les nombres $v_{i,\underline{j}}^2$ sont positifs et $-a^2 = |a|^2$. Par conséquent tous les éléments $A_{i,\underline{j}}$ sont positifs. Puisque

$$dv_{i,\underline{j}} + dv_{i',\underline{j}'} = dv_{i,\underline{j}'} + dv_{i',\underline{j}},$$

il existe des nombres dr_i et $ds_{\underline{j}}$ tels que $dv_{i,\underline{j}} = dr_i - ds_{\underline{j}}$. Il suffit de montrer que $dr_i = ds_{\underline{j}}$ pour tout i et $\underline{j}$.

Soient

$$\sum_{\underline{j}} A_{i,\underline{j}} = U_i, \quad \sum_i A_{i,\underline{j}} = V_{\underline{j}}.$$

Alors les équations (3.10) deviennent

$$U_i dr_i - \sum_j A_{i,j} ds_{\underline{j}} = 0,$$
$$\sum_i A_{i,j} dr_i - V_{\underline{j}} ds_{\underline{j}} = 0. \tag{3.11}$$

Nous introduisons deux matrices,

$$B = (A_{i,\underline{j}}/V_{\underline{j}}), \quad C = (A_{i,\underline{j}}/U_i).$$

et deux vecteurs colonnes $dr' = (dr'_i)$, $dr'_i = U_i dr_i$, et $ds' = (ds'_{\underline{j}})$, $ds'_{\underline{j}} = V_{\underline{j}} ds_{\underline{j}}$. On a $dr' = Bds'$ et $ds' = C^t dr'$ de sorte que

$$dr' = BC^t dr'.$$

Mais

$$BC^t = \left(\sum_{\underline{j}} \frac{A_{i,\underline{j}}}{V_{\underline{j}}} \frac{A_{i',\underline{j}}}{U_{i'}} \right) = (D_{ii'}) = D$$

est une matrice à éléments positifs.

On vérifie que

$$\sum_{i'} D_{ii'} U_{i'} = U_i.$$

Selon le théorème de Perron-Frobenius la valeur propre 1 de D est de multiplicité 1. Il en résulte qu'il existe une constante γ telle que $dr'_i = \gamma U_i$ pour tout i. Par conséquent $dr_i = \gamma$ pour tout i et $ds_{\underline{j}} = \gamma$ pour tout $\underline{j}$.

Le lemme 3.5 implique le lemme suivant qui est plus faible.

Lemme 3.6 *Supposons que c et d soient génériques. Alors pour toute solution $v_{i,\underline{j}}$ des équations (3.4) et (3.5) l'application tangentielle $d\phi$ est un isomorphisme.*

Les lemmes 3.5 et 3.6 affirment que les points de V où toutes les coordonnées $t_{i,\underline{j}}$ sont non-nulles sont de multiplicité un. En général la relation (3.3) nous permet en imitant la définition du chapitre précédent d'attacher à chaque point v de V une relation d'équivalence dans la réunion de $\{1, \dots, e\}$ et $\{\underline{1}, \dots, \underline{f}\}$. Nous posons $i \leftrightarrow \underline{j}$ si $t_{i,\underline{j}} \neq 0$ au point v et $i \leftrightarrow i'$ s'il existe un $\underline{j}$ tel que $i \leftrightarrow \underline{j}$ et $i' \leftrightarrow \underline{j}$. Nous définissons $\underline{j} \leftrightarrow \underline{j}'$ de la même façon.

Lemme 3.7 *Soit M le nombre de classes d'équivalence pour la relation d'équivalence attachée au point v. Alors, pour c et d génériques, la multiplicité du point v sur la variété V est au plus $m(v) = (M-1)!$.*

Par la suite nous saurons déduire de ce lemme un corollaire plus fort.

Corollaire 3.8 *Soit M le nombre de classes d'équivalence pour la relation d'équivalence attachée au point v. Alors, pour c et d génériques, la multiplicité du point v sur la variété V est précisément $m(v) = (M-1)!$.*

Pour démontrer le lemme il s'avère utile de supposer que $a = -b = -\sqrt{-1}$ et ensuite de définir des variétés plus générales dont V est une spécialisation. Ces nouvelles variétés (dénotés aussi $V = V(\{\epsilon_{i,\underline{j}}\})$) sont toujours des sous-variétés d'un produit sur $\{(i,\underline{j})\}$ de droites projectives. Soient $(t_{i,\underline{j}}, v_{i,\underline{j}})$ les coordonnées sur une de ces droites. Soient $\epsilon_{i,\underline{j}}$ des nombres positifs. Les équations auxquelles sont soumises les coordonnées d'un point sur la sous-variété sont les équations (2.15)

$$v_{i,\underline{j}} t_{i',\underline{j}'} t_{i',\underline{j}} t_{i,\underline{j}'} + v_{i',\underline{j}'} t_{i,\underline{j}} t_{i',\underline{j}} t_{i,\underline{j}'} = v_{i,\underline{j}'} t_{i,\underline{j}} t_{i',\underline{j}} t_{i',\underline{j}'} + v_{i',\underline{j}} t_{i,\underline{j}} t_{i,\underline{j}'} t_{i',\underline{j}'} \tag{3.12}$$

et les équations (2.19-23) qui en découlent. Les équations de la variété sont alors

$$\begin{aligned} c &= \prod_{\underline{j}} \left(\frac{v_{i,\underline{j}} - \epsilon_{i,\underline{j}} t_{i,\underline{j}} \sqrt{-1}}{v_{i,\underline{j}} + \epsilon_{i,\underline{j}} t_{i,\underline{j}} \sqrt{-1}} \right)^{\mu_{\underline{j}}}, \qquad i \in E, \\ d &= \prod_{i} \left(v_{i,\underline{j}} - \epsilon_{i,\underline{j}} t_{i,\underline{j}} \frac{\sqrt{-1}}{v_{i,\underline{j}}} + \epsilon_{i,\underline{j}} t_{i,\underline{j}} \sqrt{-1} \right)^{\mu_i}, \qquad \underline{j} \in F \end{aligned} \tag{3.13}$$

où c et d sont des constantes génériques.

Comme ci-dessus il est possible d'introduire la notion d'une solution spectrale de ces équations.

Lemme 3.9 *Il n'existe pas de solution spectrale sur les variétés* $V(\{\epsilon_{i,\underline{j}}\})$.

Ce lemme se démontre comme le lemme 3.1.

Ces variétés sont aussi de dimension zéro mais avant d'énoncer le lemme pertinent nous observons qu'une équivalence fine $i \leftrightarrow \underline{j}$ (ou $\underline{i} \leftrightarrow i'$ et $\underline{j} \leftrightarrow \underline{j}'$) est attachée à chaque point de ces nouvelles variétés. Si $t_{i,\underline{j}} = 0$ alors

$$\frac{v_{i,\underline{j}} - \epsilon_{i,\underline{j}} t_{i,\underline{j}} \sqrt{-1}}{v_{i,\underline{j}} + \epsilon_{i,\underline{j}} t_{i,\underline{j}} \sqrt{-1}} = 1$$

de sorte que les équations découplent selon les classes d'équivalence. Ce découplage n'a toutefois qu'une validité limitée.

Lemme 3.10 *Les variétés* $V(\{\epsilon_{i,\underline{j}}\})$ *sont de dimension* 0.

Pour nous amuser et en même temps pour nous préparer aux arguments à suivre nous vérifions ce lemme en considérant les déformations autour d'un point donné v.

En utilisant l'équivalence définie par v, en prenant les variations logarithmiques et en enlevant un facteur $-2\sqrt{-1}$ inutile, on obtient pour les équations de déformation

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\underline{j}|\underline{j}\leftrightarrow i} \frac{\mu_i \mu_{\underline{j}} \epsilon_{i,\underline{j}} dv_{i,\underline{j}}}{v_{i,\underline{j}}}^2 + \epsilon_{i,\underline{j}}^2 - \sum_{\underline{j}|\underline{j}\not\leftrightarrow i} \frac{\mu_i \mu_{\underline{j}} \epsilon_{i,\underline{j}} dt_{i,\underline{j}}}{1+\epsilon_{i,\underline{j}}^2}, \\ 0 &= \sum_{i|i\leftrightarrow \underline{j}} \frac{\mu_i \mu_{\underline{j}} \epsilon_{i,\underline{j}} dv_{i,\underline{j}}}{v_{i,\underline{j}}^2} + \epsilon_{i,\underline{j}}^2 - \sum_{i|i\not\leftrightarrow \underline{j}} \frac{\mu_i \mu_{\underline{j}} \epsilon_{i,\underline{j}} dt_{i,\underline{j}}}{1+\epsilon_{i,\underline{j}}^2}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Il est entendu que $t_{i,\underline{j}} = 1$ si $i \leftrightarrow \underline{j}$ mais que $v_{i,\underline{j}} = 1$ sinon.

Les coordonnées locales au point v sont les $\delta v_{i,\underline{j}}$, $i \leftrightarrow j$ et les $\delta t_{i,\underline{j}}$, $i \not\leftrightarrow \underline{j}$. Puisque les $t_{i,\underline{j}}$ pertinents sont tous 0 en v, on a $\delta t_{i,\underline{j}} = t_{i,\underline{j}}$. Soient $\mathfrak{a}$ l'anneau local complet défini par ces paramètres et soit $\mathfrak{m}$ l'anneau maximal en v. La variété V est de dimension 0 en v si et seulement si $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}$ est de dimension finie. La dimension est la multiplicité $m(v)$. Puisque nous ne cherchons qu'une borne supérieure pour $m(v)$ il est permis de le remplacer par un idéal plus petit $\mathfrak{m}'$, celui engendré par les termes de plus bas degré dans les équations qui définissent $\mathfrak{m}$. (Observons que si quelques équations sont passées inaperçues rien n'est perdu car on ne cherche à présent qu'une borne supérieure.) Les équations obtenues de (3.14) en remplaçant $dv_{i,\underline{j}}$ et $dt_{i,\underline{j}}$ par $\delta v_{i,\underline{j}}$ et $\delta t_{i,\underline{j}}$ s'obtiennent aussi de (3.13) en supprimant tout terme sauf ceux du plus bas degré. On obtient d'autres équations de (2.19), (2.20), (2.21) de la même façon, à savoir

$$\begin{aligned} t_{i',\underline{j}'} &= t_{i,j}, & i' \leftrightarrow i, \quad \underline{j} \leftrightarrow \underline{j}', \\ t_{i',\underline{j}} &= -t_{i,\underline{j}'}, & i' \leftrightarrow \underline{j}, \quad i \leftrightarrow \underline{j}'. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Il résulte de ces équations que $t_{i,\underline{j}} = t_{\omega,\eta}$ ne dépend que des classes d'équivalence ω et η qui contiennent i et $\underline{j}$ et que $t_{\eta,\omega} = -t_{\omega,\eta}$. Pour vérifier que $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}'$ est de dimension finie il suffit de montrer que la seule solution des équations (3.14) et (3.15) est la solution triviale $\delta v_{i,\underline{j}} = 0$ et $t_{i,\underline{j}} = 0$.

Fixons une classe d'équivalence ω et faisons la somme des équations attachées aux i de cette classe ainsi que la somme de celles attachées aux $\underline{j}$ de la même classe. Nous nommerons les équations ainsi obtenues les équations horizontales et verticales.

Prenons ensuite la différence de l'équation horizontale et de la verticale. Il ne reste que

$$0 = \sum_{\eta|\eta\neq\omega} \epsilon_{\omega,\eta} t_{\omega,\eta} \tag{3.16}$$

si

$$\epsilon_{\omega,\eta} = \sum_{i\in\omega,\underline{j}\in\eta} \mu_i \mu_{\underline{j}} \frac{\epsilon_{i,\underline{j}}}{1+\epsilon_{i,\underline{j}}^2} + \sum_{\underline{j}\in\omega,i\in\eta} \mu_i \mu_{\underline{j}} \frac{\epsilon_{i,\underline{j}}}{1+\epsilon_{i,\underline{j}}^2} > 0. \tag{3.17}$$

Observons que $\epsilon_{\omega,\eta} = \epsilon_{\eta,\omega}$. En remplaçant l'équation (2.22) par ses termes de degré deux nous obtenons

$$t_{\omega,\eta}t_{\eta,\xi} = t_{\omega,\eta}t_{\omega,\xi} + t_{\eta,\xi}t_{\omega,\xi}. \tag{3.18}$$

Il est entendu que ω, η et ξ sont tous différents.

Nous établissons d'abord qu'il résulte de ces équations que tous les $t_{\omega,\eta}$ sont zéro. On en déduit tout de suite que si $t_{\omega,\eta} \neq 0$ et $t_{\eta,\xi} \neq 0$ alors $t_{\omega,\xi} \neq 0$. Cela nous permet de répartir les classes ω en classes d'équivalence. Les équations (3.16) restent évidemment valables si on restreint la somme à une seule classe. Pour ω et η dans la même classe on pose

$$\lambda_{\omega,\eta} = \frac{1}{t_{\omega,\eta}}.$$

La relation (3.18) devient

$$\lambda_{\omega,\xi} = \lambda_{\eta,\xi} + \lambda_{\omega,\eta}.$$

Par conséquent il existe des nombres μ_ω tels que

$$\lambda_{\omega,\eta} = \mu_\omega - \mu_\eta.$$

La relation (3.16) dans laquelle les $\epsilon_{\omega,\eta}$ sont des nombres positifs implique que

$$\sum_{\eta\neq\omega} \epsilon_{\omega,\eta}\Re(t_{\omega,\eta}) = 0, \qquad \sum_{\eta\neq\omega} \epsilon_{\omega,\eta}\Im(t_{\omega,\eta}) = 0. \tag{3.19}$$

Il résulte de (3.19) que s'il existe un η tel que $\Re(t_{\omega,\eta}) > 0$ il existe aussi un ξ tel que $\Re(t_{\omega,\xi}) < 0$.

Nous introduisons une relation d'ordre en posant $\omega \succeq \eta$ si et seulement si $\Re(t_{\omega,\eta}) \geq 0$, donc si et seulement si $\Re(\lambda_{\omega,\eta}) \geq 0$, ou même si et seulement si $\Re(\mu_\omega) \geq \Re(\mu_\eta)$. Il résulte de (3.19) que s'il existe un η tel que $\omega \succeq \eta$ alors il existe un ξ tel que $\xi \succeq \omega$. Ceci n'est possible que si la valeur de $\Re(\mu_\omega)$ est constante dans cette classe, car sinon on choisit ω tel que $\Re(\mu_\omega)$ est maximal pour en déduire une contradiction. Puisque le signe de $\Im(\lambda_{\omega,\eta})$ est opposé à celui de $\Im(t_{\omega,\eta})$ un argument pareil montre que $\Im(\mu_\omega)$ est constant sur la classe d'équivalence. Il en résulte que $\lambda_{\omega,\eta} = 0$ si $\omega \neq \eta$. Puisque ceci est impossible toute classe d'équivalence se réduit à un seul élément. Autrement dit $t_{\omega,\eta} = 0$ si $\omega \neq \eta$. Les équations (3.16) seront appelées les équations *anti-symétriques*.

Il reste à traiter les équations

$$0 = \sum_{\underline{j}\leftrightarrow i} \frac{\mu_i\mu_{\underline{j}}\epsilon_{i,\underline{j}}\delta v_{i,\underline{j}}}{v_{i,\underline{j}}^2 + \epsilon_{i,\underline{j}}^2},$$

$$0 = \sum_{i\leftrightarrow \underline{j}} \frac{\mu_i\mu_{\underline{j}}\epsilon_{i,\underline{j}}\delta v_{i,\underline{j}}}{v_{i,\underline{j}}^2 + \epsilon_{i,\underline{j}}^2}$$

Nous les appelons les équations *symétriques*. Pour montrer qu'il n'y a pas de solution non-triviale de ces équations et par conséquent terminer la démonstration du lemme 3.10, il suffit de répéter la démonstration du lemme 3.5.

L'argument que nous venons d'utiliser a des conséquences. Supposons que nous déformions les équations en variant les $\epsilon_{i,\underline{j}}$. Dans ce cas on obtient les équations de déformation en ajoutant aux quantités à gauche $\sum_{\underline{j}\leftrightarrow i} v_{i,\underline{j}}\delta\epsilon_{i,\underline{j}}$ et $\sum_{i\leftrightarrow \underline{j}} v_{i,\underline{j}}\delta\epsilon_{i,\underline{j}}$. Ces termes s'annulent lorsqu'on forme les équations anti-symétriques. On cherche à trouver des déformations des solutions telles que les $t_{i,\underline{j}}$ restent constants, donc égaux à leur valeur en v qui est soit 0 soit 1. Il résulte immédiatement de la démonstration du lemme 3.5 et du théorème des fonctions implicites qu'une telle déformation existe et qu'elle est unique.

Puisqu'il n'y a qu'une seule déformation du point $v \in V$ et le type du point, donc la relation d'équivalence, reste constant le long de la déformation on peut en vérifiant le lemme 3.7 remplacer V par $V(\{\epsilon_{i,\underline{j}}\})$ et v par le point correspondant $v(\{\epsilon_{i,\underline{j}}\})$, car la multiplicité est conservée. L'avantage des paramètres est qu'on peut les spécialiser, ce qui, au pire, ne fait qu'accroître la multiplicité.

Il y a une transformation triviale des équations. On remplace chaque $t_{i,\underline{j}}$ pertinent par $\lambda_{i,\underline{j}}t_{i,\underline{j}}$ et chaque $v_{i,\underline{j}}$ par $v_{i,\underline{j}}/\lambda_{i,\underline{j}}$; donc on ne change qu'une des coordonnées projectives $v_{i,\underline{j}}$ et $t_{i,\underline{j}}$, l'autre reste 1. L'effet est d'abord de remplacer $\epsilon_{i,\underline{j}}$ par $\lambda_{i,\underline{j}}\epsilon_{i,\underline{j}}$, et donc, en effet, après un simple changement de notation, de ne rien changer du tout dans les équations (3.13). Par contre les autres équations, celles déduites de (3.12) subissent des modifications importantes.

On se souvient que nous essayons de trouver une borne supérieure pour la dimension de $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}$. Nous avons remarqué qu'il est possible de remplacer $\mathfrak{m}$ par $\mathfrak{m}'$. Ces deux idéaux dépendent maintenant des paramètres $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\{\epsilon_{i,\underline{j}}, \lambda_{i,\underline{j}}\})$ et $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}'(\{\epsilon_{i,\underline{j}}, \lambda_{i,\underline{j}}\})$. Nous trouverons une borne supérieure pour la dimension de $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}'$ en faisant dégénérer les paramètres convenablement, car une telle dégénérescence ne fait qu'accroître la dimension.

Puisque les coordonnées $\epsilon_{i,\underline{j}}$ et $\lambda_{i,\underline{j}}$ seront choisies de sorte qu'elles ne dépendent que des classes auxquelles appartiennent i et $\underline{j}$, nous pourrons remplacer tout de suite les variables $t_{i,\underline{j}}$ par les $t_{\omega,\eta}$ et ensuite passer aux équations symétriques et anti-symétriques, parce que ces équations resteront valables. Les équations symétriques montrent que les variables $\delta v_{i,\underline{j}}$, $i \leftrightarrow \underline{j}$ sont dans $\mathfrak{m}'$. Tout revient alors aux variables $t_{\omega,\eta}$. Il y a $M = M(v)$ classes ω et l'argument, qui ne donne qu'une borne supérieure, est par récurrence sur M.

Pour $M = 1$ il n'y a plus de coordonnées de façon que la multiplicité est évidemment $1 = 0!$. Fixons ω. Nous posons $\epsilon_{i,\underline{j}} = \lambda_{\eta,\xi} = 1$ sauf si $i \in \omega$ ou $\underline{j} \in \omega$; dans ce cas nous posons $\epsilon_{i,\underline{j}} = \epsilon$ et $\lambda_{i,\underline{j}} = \lambda$, les deux paramètres ϵ et λ étant libres. On enverra λ à ∞ et $\epsilon\lambda$ à 0.

Soit désormais $\epsilon_{\eta,\xi}$ en général le facteur obtenu en supposant tous les coefficients $\epsilon_{i,\underline{j}}$ égaux à 1. C'est un nombre positif. Les équations qui n'impliquent pas les $t_{\omega,\eta}$ ne sont guère touchées. Les $\epsilon_{\eta,\xi}$ de (3.17) sont ceux qu'on vient de définir.

L'équation anti-symétrique qui change devient, à part un facteur $2\sqrt{-1}\epsilon\lambda$ que l'on supprime,

$$0 = \sum_{\eta \neq \omega} \epsilon_{\omega,\eta} t_{\omega,\eta}. \tag{3.20}$$

La somme porte sur η, mais ω reste fixe.

Il y a toutefois aussi une équation anti-symétrique pour chaque $\eta \neq \omega$ L'équation pour un η donné est

$$0 = \sum_{\xi | \xi \neq \omega,\eta} \{\epsilon_{\eta,\xi} t_{\eta,\xi} + \epsilon\lambda\epsilon_{\eta,\omega} t_{\eta,\omega}\}.$$

Dans la limite $\epsilon = 0$ cette équation devient

$$0 = \sum_{\xi \neq \omega,\eta} \epsilon_{\eta,\xi} t_{\eta,\xi}. \tag{3.21}$$

Considérons ensuite les équations (2.19) à (2.23). Il est convenu que tout terme dans ces équations sauf ceux de degré minimal sera supprimé. Nous avons déjà anticipé que les équations (2.19), (2.20) et (2.21) deviendraient alors des équations linéaires dont il résulte que les $t_{i,\underline{j}}$ ne dépendent que des classes auxquelles appartiennent i et $\underline{j}$ et que $t_{\omega,\eta} = -t_{\eta,\omega}$. Les équations (2.22) deviennent des équations de degré deux. Si aucun des indices n'appartient à ω on a simplement

$$t_{i',\underline{j}} t_{i,\underline{j}'} = t_{i',\underline{j}} t_{i',\underline{j}'} + t_{i,\underline{j}'} t_{i',\underline{j}'}$$

Si par contre $i' \in \omega$ on obtient

$$\lambda t_{i',\underline{j}} t_{i,\underline{j}'} = \lambda^2 t_{i',\underline{j}} t_{i',\underline{j}'} + \lambda t_{i,\underline{j}'} t_{i',\underline{j}'}.$$

Lorsque $\lambda \to \infty$ on obtient

$$0 = t_{i',\underline{j}} t_{i',\underline{j}'}.$$

Donc si ω, η, et ξ sont tous différents

$$0 = t_{\omega,\eta} t_{\omega,\xi}. \tag{3.22}$$

De ces relations et de la relation (3.20) il découle que (3.22) est aussi valable lorsque $\eta = \xi$.

Il résulte que nous avons les équations pour l'étape antérieure, dans lesquelles ω n'intervient pas de sorte que M devient $M-1$; ces équations sont supplées par les équations en les variables $t_{\omega,\eta}$ qui sont alors

$$t^2_{\omega,\eta}=0, \qquad \sum_\eta t_{\omega,\eta}=0. \tag{3.23}$$

Donc la variété définit par $\mathfrak{m}'$ devient une variété produit. Nous pouvons calculer la dimension de $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}'$ comme le produit de la dimension à l'étape antérieure qui, par l'hypothèse de récurrence, est $(M-2)!$, et de la multiplicité de la variété locale définie par (3.23), qui est évidemment $M-1$. Le lemme 3.7 s'ensuit.

Soit η le plus grand diviseur commun des entiers μ_i et $\mu_{\underline{j}}$, $i\in E$, $\underline{j}\in F$.

Lemme 3.11 *Le nombre de points sur la variété V comptés avec multiplicité est $\eta\mu(E)^{f-1}\mu(F)^{e-1}$*

Nous avons défini l'application ϕ d'image X. Nous choisissons un ensemble de $e+f-1$ vecteurs

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_e,\lambda_{\underline{1}},\dots,\lambda_{\underline{f}})$$

qui avec

$$(\lambda_1/\eta,\dots,\lambda_e/\eta,\lambda_{\underline{1}}/\eta,\dots,\lambda_{\underline{f}}/\eta)$$

forment une base du réseau de vecteurs entiers. Les coordonnées sur X seront

$$\prod_i x_i^{\lambda_i}\prod_{\underline{j}} x_{\underline{j}}^{\lambda_{\underline{j}}}$$

de sorte que X est un produit de $e+f-1$ exemplaires de $\mathbb{P}^1$.

Avant de démontrer le lemme 3.11 nous établirons un lemme simple.

Lemme 3.12 *Le nombre de points dans X tels que $x_i=\rho x_{\underline{j}}$ pour tout i et $\underline{j}$ est $|\mu(E)-\mu(F)|/\eta$.*

La seule condition sur $x=x_i=\rho x_{\underline{j}}$ est que

$$x^{(\mu(E)-\mu(F))/\eta}=\gamma$$

où γ est un nombre bien determiné mais générique. Nous rappelons que $\mu(E)\neq\mu(F)$.

Pour établir le lemme 3.11 il suffit de montrer que le degré de l'application ϕ est $\eta\mu(E)^{f-1}\mu(F)^{e-1}$. Observons que nous n'avons jamais défini cette application précisément. En effet pour la définir là où les produits à gauche de (3.4) contiennent des facteurs 0 et des facteurs ∞ il faut des éclatements. A cause du lemme 3.1 leur forme précise n'est guère importante. D'ailleurs le degré est un invariant birationnel.

Puisque le degré est invariant dans une famille d'applications, nous calculons celui de ϕ en le plongeant dans une famille dont le degré du membre générique est facile à calculer. On se souvient que ϕ est donné par des produits

$$\begin{aligned} x_i &= \prod_{uj}\left(\frac{f(r_i,s_{\underline{j}})}{g(r_i,s_{\underline{j}})}\right)^{\mu_{\underline{j}}},\\ x_{\underline{j}} &= \prod_i\left(\frac{f(r_i,s_{\underline{j}})}{g(r_i,s_{\underline{j}})}\right)^{\mu_i}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Nous allons prendre

$$f_{i,\underline{j}}=c'(r_is_{\underline{j}}+d'r_i-d's_{\underline{j}}+a'), \qquad g_{i,\underline{j}}=(r_is_{\underline{j}}+d'r_i-d's_{\underline{j}}+b'), \tag{3.25}$$

de sorte que ϕ s'obtient en prenant $c'=1$ et en faisant $a',b',d'\to\infty$ de façon que $a'/d'\to a$ et $b'/d'\to b$.

Observons que les nouvelles fonctions sont des combinaisons linéaires de la fonction constante et de

$$(r_i - u)(s_{\underline{j}} + u) \tag{3.26}$$

où $u = d'$. Ces fonctions sont invariantes par rapport à l'application

$$r_i' - u = \lambda(r_i - u), \qquad s_{\underline{j}}' + u = (s_{\underline{j}} + u)/\lambda \tag{3.27}$$

qui dans la limite $u \to \infty$, $(1-\lambda)u \to t$ deviennent

$$r_i' = r_i + t, \qquad s_{\underline{j}}' = s_{\underline{j}} + t.$$

Donc même avec ces nouvelles fonctions dans les applications (3.4) il y a une des variables r_i ou $s_{\underline{j}}$ qui est superflue.

Nous faisons dégénérer la variété et l'application (ce qui ne change pas le degré) en prenant

$$c' = \infty, \quad d' = a' = 0, \quad c'/b' = 1.$$

L'application (3.24) devient

$$\begin{aligned} x_i &= \prod_{\underline{j}} (r_i s_{\underline{j}})^{\mu_{\underline{j}}}, \\ x_{\underline{j}} &= \prod_i (r_i s_{\underline{j}})^{\mu_i}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Pour calculer le degré il suffit de trouver un point $(x_i, x_{\underline{j}})$ dont l'image inverse est finie et de calculer le nombre de points qu'elle contient. L'avantage de (3.28) est qu'il s'agit d'une application de tores algébriques et pour des tores le degré se calcule à partir d'une matrice. Puisque $r_i s_{\underline{j}}$ ne change pas si on remplace r_i par λr_i et $s_{\underline{j}}$ par $s_{\underline{j}}/\lambda$ il y a toujours une variable superflue que l'on met égale à 1.

La matrice d'exposants attachée à cette application de tores algébriques est

$$M = \begin{pmatrix} \mu(F) & 0 & \dots & 0 & \mu_{\underline{1}} & \mu_{\underline{2}} & \dots & \mu_{\underline{f}} \\ 0 & \mu(F) & \dots & 0 & \mu_{\underline{1}} & \mu_{\underline{2}} & \dots & \mu_{\underline{f}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu(F) & \mu_{\underline{1}} & \mu_{\underline{2}} & \dots & \mu_{\underline{f}} \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_e & \mu(E) & 0 & \dots & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_e & 0 & \mu(E) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_e & 0 & 0 & \dots & \mu(E) \end{pmatrix}$$

Cette matrice à $e+f$ lignes et colonnes est de rang $e+f-1$ car son déterminant est égal à 0. (Notons que le vecteur $(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$ avec e composantes 1 et f composantes -1 engendre le noyau de M.) Puisque nous avons mis une des variables r_i ou $s_{\underline{j}}$ égale à 1 nous supprimons une colonne pour obtenir une matrice non-singulière. Posons par exemple $s_{\underline{f}} = 1$. En ce qui concerne les lignes nous pouvons prendre des combinaisons linéares à coefficients entiers pour construire des vecteurs de la forme

$$(0,\dots,0,l,\dots,0,*).$$

Le dernier coefficient est sans importance car nous posons $s_{\underline{f}} = 1$ mais l est un entier positif et tous les autres coefficients sont 0. Par conséquent on peut calculer tous les r_i et $s_{\underline{j}}$ – ou plutôt une puissance de ces nombres – par des produits de la forme

$$\prod_i x_i^{a_i} \prod_{\underline{j}} x_{\underline{j}}^{a_{\underline{j}}}$$

où les exposants sont des entiers positifs ou négatifs. Si tous les x_i et $x_{\underline{j}}$ sont finis et non-nuls, alors tous les r_i et $s_{\underline{j}}$ sont aussi finis et non-nuls.

Calculons maintenant le degré. Pour cela prenons tous les vecteurs entiers dont une composante est 0 et calculons l'indice de son image (par rapport à l'application linéaire donnée par M) dans l'ensemble des vecteurs entiers $(a_i, b_{\underline{j}})$ tels que

$$\sum_i \mu_i a_i = \sum_{\underline{j}} \mu_{\underline{j}} b_{\underline{j}}. \tag{3.29}$$

Puisque le noyau de M n'est que l'ensemble de vecteurs $(a, \ldots, a, -a, \ldots, -a)$, avec e coefficients égaux à a et f à $-a$ l'espace de vecteurs entiers est la somme directe du noyau et des vecteurs dont une coordonnée donnée est 0. Donc nous pouvons appliquer M à tout l'espace pour la traiter comme une application d'un premier espace $\mathfrak{X}$, obtenu en divisant l'espace des vecteurs entiers par le noyau de M, dans un second espace $\mathfrak{Y}$ défini par (3.29). On a donc un plongement

$$M : \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{Y},$$

dont nous désirons calculer l'indice $[\mathfrak{Y} : \mathfrak{X}]$ qui est égal au degré recherché. Nous allons maintenant définir deux espaces $\mathfrak{X}'$ et $\mathfrak{Y}'$ tels que les flèches du diagramme suivant soient des plongements:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \longrightarrow & \mathfrak{Y} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{X}' & \longrightarrow & \mathfrak{Y}' \end{array}$$

Il en résultera que

$$[\mathfrak{Y} : \mathfrak{X}] = [\mathfrak{Y} : \mathfrak{Y}'][\mathfrak{Y}' : \mathfrak{X}']/[\mathfrak{X} : \mathfrak{X}'].$$

Soit $\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{Y}_2$ la somme directe de $\mathfrak{Y}_1$, l'ensemble de vecteurs tels que

$$\sum \mu_i a_i = \sum \mu_{\underline{j}} b_{\underline{j}} = 0$$

et de $\mathfrak{Y}_2$, l'ensemble de ceux tels que $a_i = a\mu(F)$ et $b_{\underline{j}} = a\mu(E)$ avec $a \in \mathbb{Z}$. A cause de l'équation (3.29), pour les vecteurs dans $\mathfrak{Y}$ la somme $\sum \mu_i x_i$ est divisible par le plus grand diviseur commun μ de tous les μ_i aussi bien que par le plus grand diviseur commun ν de tous les $\mu_{\underline{j}}$ et donc par $\mu\nu/\eta$. Il en résulte que

$$[\mathfrak{Y} : \mathfrak{Y}'] = \mu(E)\mu(F)/(\mu\nu/\eta) = \eta\mu(E)\mu(F)/\mu\nu.$$

Soit $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2$ la somme directe de $\mathfrak{X}_1$, l'ensemble de vecteurs $(a_i, b_{\underline{j}})$ tels que

$$\sum \mu_i a_i = \sum \mu_{\underline{j}} b_{\underline{j}} = 0,$$

et de $\mathfrak{X}_2$, l'ensemble de ceux tels que a_i sont tous égaux au même entier a et tous les $b_{\underline{j}}$ au même entier b. L'espace $\mathfrak{X}_1$ est le noyau dans $\mathfrak{X}$ de l'application

$$(a_i, b_{\underline{j}}) \to (\sum \mu_i a_i, \sum \mu_{\underline{j}} b_{\underline{j}})$$

L'image de $\mathfrak{X}$ est l'ensemble des (a, b) tels que $\mu|a$ et $\nu|b$ et celle de $\mathfrak{X}'$ l'ensemble de $(\mu(E)a, \mu(F)b)$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Par conséquent $[\mathfrak{X} : \mathfrak{X}'] = \mu(E)\mu(F)/\mu\nu$.

On a $\mathfrak{Y}_1 \supset \mathfrak{X}_1$ et $\mathfrak{Y}_2 \supset \mathfrak{X}_2$ de sorte que $[\mathfrak{Y}' : \mathfrak{X}'] = [\mathfrak{Y}_1 : \mathfrak{X}_1][\mathfrak{Y}_2 : \mathfrak{X}_2]$. Evidemment $[\mathfrak{Y}_1 : \mathfrak{X}_1] = \mu(E)^{f-1}\mu(F)^{e-1}$. Le plongement de $\mathfrak{X}_2$ dans $\mathfrak{Y}_2$ est

$$(a, b) \to (\mu(F)(a + b), \mu(E)(a + b))$$

de sorte que $[\mathfrak{Y}_2 : \mathfrak{X}_2] = 1$. Il s'ensuit que

$$[\mathfrak{Y} : \mathfrak{X}] = \mu(E)^{f-1}\mu(F)^{e-1}\eta,$$

qui est la formule voulue.

4. Les paires libres. La variété algébrique V était attachée à une paire E et F dont les éléments étaient supposés être $1, \dots, e$ et $\underline{1}, \dots, \underline{f}$. Nous supposons maintenant que E et F sont tous les deux des sous-ensembles de $\{1, \dots, r\}$ et nous dénotons V par $V(E, F)$.

Supposons que $D_1, \dots, D_l$ sont des sous-ensembles disjoints de $\{1, \dots, r\}$ et que D_k, $1 \le k \le l$, est la réunion de deux sous-ensembles disjoints E_k et F_k. Pour le moment nous supposons pour simplifier la notation que $\{1, \dots, r\}$ est la réunion des ensembles D_k. Alors, pour chaque D_k et chaque choix des paramètres c_k et d_k (qui remplacent c et d) les équations (3.1) avec $i \in E_k$ et $\underline{j} \in F_k$ définissent une variété $V(E_k, F_k)$. Le produit des variétés $V(E_k, F_k)$ est presqu'une sous-variété de la fibre C de la correspondance en $\Delta = 0$. Pour la plonger dans la correspondance il faut trouver des coordonnées z_{E_k} et z_{F_k} telles que $c_k = R(z_{E_k})$ et $d_k = R(z_{F_k})$. Pour que cela soit possible il faut et il suffit que $c_k = d_k\rho$. Disons que le produit des variétés est une sous-variété potentielle de la correspondance à $\Delta = 0$. Observons qu'il y a plusieurs plongements du produit dans la correspondance selon le choix des coordonnées z_{E_k} et z_{F_k}.

Soit p un point fixe de la correspondance et supposons en profitant du découplage du chapitre 2 qu'il n'y ait qu'un seul ensemble $D = \{1, \dots, r\}$ dans la partition attachée à p. Pour que p appartienne à l'image d'un plongement du produit

$$\prod_k V(E_k, F_k)$$

dans la correspondance à $\Delta = 0$, il faut d'abord que la partition $\{D_k\}$ soit plus grossière que celle attachée à l'équivalence fine définie par p, et alors il suffit que

$$c_k = R(z_E), \qquad d_k = R(z_E)/\rho.$$

Il en résulte immédiatement un lemme que nous signalons explicitement.

Lemme 4.1 *Si un point de l'image d'un plongement dans la variété C du produit $\prod_k V(E_k, F_k)$ est un point fixe de la correspondance, alors tous les points dans les images de tous les plongements sont aussi des points fixes.*

La multiplicité du point p dans le produit est le produit des multiplicités et nous pouvons la majorer à l'aide du lemme 3.7.

Lemme 4.2 *Soit m_k le nombre de classes d'équivalence fine par rapport à p dans D_k. Alors la multiplicité de p dans $\prod_k V(E_k, F_k)$ est au plus $\prod_k (m_k - 1)!$.*

Le point $p = \prod_k v_k$ et $m(v_k)$ est évidemment égal à m_k.

Il est possible qu'il y ait plusieurs décompositions $\{D_1, \dots, D_l\}$ de $\{1, \dots, r\}$ telles que p appartiennent à $\prod_k V(E_k, F_k)$.

Lemme 4.3 *Soit $n(p) = n(p, D)$ le nombre de classes d'équivalence fines par rapport à p dans l'ensemble D. Pour chaque décomposition $\{D_1, \dots, D_l\}$ de $D = \{1, \dots, r\}$ et chaque point p qui appartient au produit $\prod_k V(E_k, F_k)$, soit*

$$m(p; D_1, \dots, D_l)$$

la multiplicité de p dans le produit. Alors pour p donné la somme sur toutes ces décompositions de cette multiplicité satisfait

$$\sum_{\{D_1, \dots, D_l\}} m(p; D_1, \dots, D_l) \le n(p)!.$$

Soit $n = n(p)$. D'après ce que l'on a déjà dit la somme de ces multiplicités est au plus la somme de $\prod_k (|C_k| - 1)!$ sur toutes les décompositions de n en sous-ensembles C_k disjoints. Le résultat de cette somme purement combinatoire est donnée par le lemme suivant.

Lemme 4.4 *Pour tout entier positif n, la somme sur toutes les partitions de $\{1,\ldots,n\}$ en des sous-ensembles disjoints $C_1,\ldots,C_l$ de $\prod(|C_k|-1)!$ est $n!$.*

Ce lemme est évident pour $n = 1, 2$. On le vérifie par récurrence. Comme d'habitude on construit les partitions de $\{1,\ldots,n\}$ en ajoutant n à un des sous-ensembles d'une partition $C_1,\ldots,C_k$ de $\{1,\ldots,n-1\}$ ou en ajoutant $\{n\}$ à une telle partition. Donc on multiplie $\prod(|C_k|-1)!$ par $\sum|C_k|$ et par 1. Puisque la somme de ces deux nombres est n le lemme en résulte.

Avant de revenir aux structures combinatoires de [BL] nous vérifions un dernier lemme. Supposons que la paire (E,F) qui donne D soit libre. Nous cherchons des points fixes de la correspondance autour de p qui se développent en séries de Puiseux en Δ dont les exposants ne sont pas trop compliqués. En fait nous les supposerons demi-entiers de sorte que les séries seront des séries de Taylor en $\Delta^{1/2}$. Donc pour $i \not\leftrightarrow \underline{j}$

$$(4.1.a)\qquad \begin{aligned} t_{i,\underline{j}} &= a(t_{i,\underline{j}})\Delta^{1/2} + b(t_{i,\underline{j}})\Delta + \ldots, \\ z_i &= z_i^0 + a(z_i)\Delta^{1/2} + b(z_i)\Delta + \ldots, \\ \tilde z_{\underline{j}} &= \tilde z_{\underline{j}}^0 + a(\tilde z_{\underline{j}})\Delta^{1/2} + b(\tilde z_{\underline{j}})\Delta + \ldots. \end{aligned}$$

Les $v_{i,\underline{j}}$, $i \leftrightarrow \underline{j}$, seront par contre des séries en Δ lui-même

$$(4.1.b)\qquad v_{i,\underline{j}} = v_{i,\underline{j}}^0 + a(v_{i,\underline{j}})\Delta + \ldots$$

En général pour n'importe quelle coordonnée x qui se développe en série de Puiseux nous posons $x = x^0 + a(x)\Delta^{\alpha(x)} + \ldots$, où $\alpha(a)$ est censé être la plus petite puissance positive qui intervient avec un coefficient $a(x) \neq 0$.

Lemme 4.5 *Il existe au moins $n(p)!$ solutions distinctes de la forme (4.1) des équations pour les points fixes.*

Ici comme par la suite les énoncés sur l'existence de solutions en séries de Puiseux de telle ou telle équation ne sont pas démontrés d'une façon complète. Donc le caractère informel de cet exposé qui était annoncé au début se revèle enfin. Nous n'examinons que les premiers termes.

Nous supposons que $a(t_{i,\underline{j}}) \neq 0$. Il résulte des équations (2.19), (2.20) et (2.21) que $a(t_{i,\underline{j}})$ ne dépend que des classes d'équivalence fine auxquelles appartiennent i et $\underline{j}$ de sorte que l'on écrit $a(t_{i,\underline{j}}) = 1/\mu_{\omega,\eta}$ avec $\mu_{\omega,\eta} = -\mu_{\eta,\omega}$. (Ces facteurs $\mu_{\omega,\eta}$ sont étroitement liés aux facteurs $\mu_{i,\underline{j}}$ de l'équation (2.12).) Il résulte de ces mêmes équations que si i et $\underline{j}$ sont équivalents dans le sens fin alors $a(z_i) = a(\tilde z_{\underline{j}})$ de sorte que l'on peut poser $a(z_i) = a(\tilde z_{\underline{j}}) = \nu_\omega$, $i \in \omega$, $\underline{j} \in \omega$. Les équations (2.12) donnent enfin

$$(4.2)\qquad \nu_\omega - \nu_\eta = \mu_{\omega,\eta}, \qquad \text{pour } \omega \neq \eta.$$

Il y a d'autres équations de déformation qui proviennent des équations (2.30). Puisqu'aucun $R(z_i)$ n'est 0 en p on calcule plutôt les dérivées logarithmiques. Soient

$$\begin{aligned} A' &= \frac{1}{R(z)}\frac{dR(z)}{dz}, \qquad z = z_E, \quad \Delta = 0, \\ B' &= -\frac{1}{R(z)}\frac{dR(z)}{d\tilde z} = \frac{1}{R(\tilde z)}\frac{dR(\tilde z)}{d\tilde z} = A', \qquad z = z_F = \tilde z_E, \quad \Delta = 0, \\ C &= \frac{1}{R}\frac{dR}{d\Delta} = +2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{z-\beta_k}, \qquad z = z_E, \quad \Delta = 0, \\ C' &= -\frac{1}{R}\frac{dR(z)}{d\Delta} = -2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{z-\beta_k}, \qquad z = z_F = \tilde z_E, \quad \Delta = 0. \end{aligned}$$

Nous supposons que les α_k sont des constantes de sorte que les $\beta_k = 2\Delta - 1/\alpha_k$ sont des fonctions linéaires de Δ.

Les équations de déformation sont pour $a = -b$

$$A'\delta z_i + C\Delta = -2a \sum_{\underline{j} \leftrightarrow i} \frac{\mu_i \mu_{\underline{j}} \delta v_{i,\underline{j}}}{v_{i,\underline{j}}^2 - a^2} + 2a \sum_{\underline{j} \not\leftrightarrow i} \frac{\mu_i \mu_{\underline{j}} \delta t_{i,\underline{j}}}{1 - a^2},$$
$$A'\delta \tilde{z}_{\underline{j}} + C'\Delta = -2a \sum_{i \leftrightarrow \underline{j}} \frac{\mu_i \mu_{\underline{j}} \delta v_{i,\underline{j}}}{v_{i,\underline{j}}^2 - a^2} + 2a \sum_{i \not\leftrightarrow \underline{j}} \frac{\mu_i \mu_{\underline{j}} \delta t_{i,\underline{j}}}{1 - a^2}.$$

car $\delta\Delta = \Delta$. Dans ces équations nous remplaçons δz_i et $\delta \tilde{z}_{\underline{j}}$ par $\nu_\omega \Delta^{1/2}$ si ω est la classe de i ou de $\underline{j}$.

De ces équations nous déduisons d'abord les équations anti-symétriques dont nous ne gardons que les termes en $\Delta^{1/2}$. Donc nous fixons ω et nous prenons la différence entre la somme des premières équations sur tout $i \in \omega$ et la somme des secondes équations sur tout $\underline{j} \in \omega$ ne gardant que les termes en $\Delta^{1/2}$ déduits de (4.1). Rappelons d'abord que les entiers e et f qui interviennent dans la formule (2.34) sont devenus $\mu(E)$ et $\mu(F)$. Les entiers e_ω et f_ω de (2.37) sont donnés par

$$e_\omega = \sum_{i \in \omega} \mu_i, \qquad f_\omega = \sum_{\underline{j} \in \omega} \mu_{\underline{j}}.$$

On se souvient que $e_\omega = m_\omega \mu(E)/m$ et $f_\omega = m_\omega \mu(F)/m$. Puisque $\delta v_{i,\underline{j}}$ n'a pas de terme en Δ, le côté gauche de l'équation ainsi obtenu est

$$A'(e_\omega - f_\omega)\nu_\omega = A' m_\omega (\mu(E) - \mu(F))/m.$$

Le côté droit est

$$\frac{4a}{1-a^2} \sum_{\eta \neq \omega} \frac{e_\omega f_\eta}{\nu_\omega - \nu_\eta} = \frac{4a}{1-a^2} \frac{m_\omega}{m^2} \sum_{\eta \neq \omega} \frac{m_\eta}{\nu_\omega - \nu_\eta}.$$

Donc les équations anti-symétriques sont

$$A' m_\omega m(\mu(E) - \mu(F))\nu_\omega = \frac{4a}{1-a^2} \mu(E)\mu(F) m_\omega \sum_{\eta \neq \omega} m_\eta \frac{1}{\nu_\omega - \nu_\eta}$$

Rappelons que $\mu(E) \neq \mu(F)$. Un facteur $1/m^2$ a été supprimé aux deux côtés.

Nous nous contentons de la preuve que ces équations en les $n(p)$ variables ν_ω ont $n(p)!$ solutions. Si on remplace chaque ν_ω par $\alpha\nu_\omega$, le coefficient $A'(\mu(E) - \mu(F))$ à gauche est multiplié par α^2; ainsi, pour étudier les solutions de ces équations, nous pouvons supprimer ce coefficient aussi bien que le coefficient $4a\mu(E)\mu(F)/(1 - a^2)$ qui intervient à droite. L'équation qui reste est

$$m_\omega \nu_\omega = m_\omega \sum_{\eta \neq \omega} m_\eta \frac{1}{\nu_\omega - \nu_\eta}. \tag{4.3}$$

Lemme 4.6 *Si $n = n(p)$ est le nombre de classes, alors l'équation (4.3) possède au moins $n!$ solutions.*

Nous ordonnons les classes d'une façon arbitraire, $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Il suffit de montrer qu'il y a une solution dans la région

$$\nu_{\omega_1} > \nu_{\omega_2} > \ldots > \nu_{\omega_n}. \tag{4.4}$$

Considérons la fonction

$$e^{-2\sum_\rho m_\rho \nu_\rho^2} \prod_{\substack{\omega,\eta \\ \omega \neq \eta}} (\nu_\omega - \nu_\eta)^{2m_\omega m_\eta}$$

dans la fermeture de l'ensemble (4.4). Elle est 0 à la frontière. En même temps il est évident qu'elle est très petite en-dehors d'une grande boule centrée à l'origine. Il en résulte qu'elle atteint une valeur maximale à un point où toutes les dérivées de son logarithme seront 0. Ces dérivées sont

$$4\sum_{\eta}\frac{m_\omega m_\eta}{\nu_\omega-\nu_\eta}-4m_\omega\nu_\omega.$$

Chaque point de valeur maximale donne alors une solution des équations (4.3).

Observons en particulier que d'une solution ν_ω on obtient une autre en remplaçant tous les ν_ω par $-\nu_\omega$. S'il est le cas qu'il y a exactement $n!$ solutions il s'ensuit que chaque solution est telle que si les valeurs sont ordonnées comme dans (4.4) alors $\nu_{\omega_k}=-\nu_{\omega_l}$ si $k=n-l+1$.

5. La structure combinatoire. Nous avons esquissé une description de la structure combinatoire des points fixes autour de $\Delta=0$ dans [AG]. Les équations pertinentes de ce papier, corrigées dans l'appendice 3, sont (12), (14) et (15). La structure combinatoire que ces équations expriment est déjà présente dans les descriptions des points fixes à $\Delta=0$ introduites au chapitre 2.

A chaque point fixe p est attachée une première décomposition $\{D_1,\dots,D_m\}$ de $\{1,\dots,r\}$ qui est définie à partir des valeurs des coordonnées $z_i(p)$, $D_k=E_k\cup F_k$ et E_k est par exemple l'ensemble de tous les indices i tels que $z_i(p)$ a une valeur donnée z_{E_k}. Rappelons que le lemme 2.2 permettait d'introduire, dans chaque ensemble D_k, une équivalence fine. Nous considérons des décompositions $\{D'_1,\dots,D'_n\}$ qui sont plus fines que $\{D_1,\dots,D_m\}$. Donc chaque D_k est la réunion des D'_l qu'il contient. De plus chaque D'_l est lui-même la réunion des classes d'équivalence fine qu'il contient. Evidemment $n\geq m$. Soit $D'_l=E'_l\cup F'_l$.

Nous savons attacher à chaque paire (E'_l,F'_l) une variété $V(E'_l,F'_l)$ définie à partir d'équations semblables à (3.1) mais avec $c=c'_l$ et $d=d'_l$. Pour qu'un point du produit $\prod_l V(E'_l,F'_l)$ appartienne à la variété de points fixes de la correspondance, il faut et il suffit que $c'_l=d'_l\rho$ pour tout l et alors chaque point du produit y appartient.

Selon les lemmes (3.11) et (3.12), la somme sur tous les c'_l et d'_l possibles du nombre de points sur le produit est

$$\prod_l|\mu(E'_l)-\mu(F'_l)|\mu(E'_l)^{f'_l-1}\mu(F'_l)^{e'_l-1}. \tag{5.1}$$

Mais pour définir un plongement du produit dans la correspondance il faut choisir les $z_{E'_l}$ et $z_{F'_l}$. Puisque $z_{F'_l}=\tilde z_{E'_l}$ et $R(z_{E'_l})=c'_l$ il y a N^n choix supplémentaires si n est le nombre d'éléments D'_l dans la décomposition.

L'expression (5.1) multipliée par N^n est le produit des termes

$$N|\mu(E'_l)-\mu(F'_l)|\mu(E'_l)^{f'_l-1}\mu(F'_l)^{e'_l-1} \tag{5.2}$$

et correspond donc à la formule (12) de [AG].

Il y a cependant dans [AG] une imprécision provenant de l'incompréhension des auteurs de leur propre formule. Les deux décompositions $\{D_1,\dots,D_m\}$ et $\{D'_1,\dots,D'_n\}$ ne sont pas toujours les mêmes car il est bien possible que $z_{E'_k}=z_{E'_l}$ pour $k\neq l$. Un lecteur de [AG] pourrait penser que dans (12) il s'agit de la première décomposition et non de la seconde. En fait, il ne s'agit ni de l'une ni de l'autre. Il s'agit d'une décomposition intermédiaire, celle qui définit la variété produit du chapitre 4.

La même confusion est possible avec (14) et (15), mais avant de passer à ces deux formules, observons que les formules (5.1) et (5.2) proviennent des formules pour le nombre de points sur les variétés $V(E,F)$, chacun compté avec sa multiplicité. Sous divers plongements des produits de ces variétés plusieurs points peuvent avoir la même image dans la correspondance, mais si nous comptons le nombre de solutions en séries de Puiseux qui émergent de cette image nous trouvons selon les lemmes (4.3) et (4.5) au moins le nombre prédit par la formule (12). Nous obtiendrons le même résultat pour les formules (14) et (15). Il en résulte qu'en comptant toutes les solutions trouvées autour de $\Delta=0$ sans tenir compte de leur multiplicité nous obtiendrons un nombre n_2 qui est *au moins* le nombre n_3 donné par (12), (14) et (15) en suivant la procédure combinatoire décrite dans [AG]; mais ce dernier nombre n_3 est celui prédit par la formule de Lefschetz, qui compte les solutions avec multiplicité. Mais n_2 est certainement plus petit ou égal au nombre total n_1 de solutions car, en trouvant n_2, il est bien possible qu'il y ait des solutions restées inaperçues. Donc $n_1 \geq n_3$ mais n_3 compte les solutions avec multiplicité de sorte que n_3 est nécessairement plus grand ou égal à n_1. Il en résulte que $n_1 = n_3$ et que tous nos résultats antérieurs admettent des précisions. En particulier le corollaire 3.8 est valable.

Il serait utile en traitant les équations (14) et (15) pour les paires liées d'introduire quelque notation supplémentaire. Pour une paire $\{E, F\}$ sans sommet interdit dans le sens de [AG], que nous distinguons de la paire $\{F, E\}$ de sorte que le facteur 2 dans (14) s'enlève, nous introduisons

$$\chi(E,F) = \min\{\mu(E), \mu(F)\}\mu(E)^{f-1}\mu(F)^{e-1}. \tag{5.3}$$

Pour distinguer les deux ordres possibles nous convenons que la valeur commune z_E de z_i, $i \in E$ est un zéro de R. Observons tout de suite que (5.3) est 0 si un des deux ensembles E et F est vide.

Si une paire contient un sommet interdit nous la dénotons $\{E, F, B\}$ et convenons que les éléments de B' sont dans E et ceux de B'' dans F. Pour une telle paire nous introduisons

$$\chi(E,F,B) = (\mu(E)\omega'' + \mu(F)\omega' + \omega'\omega'')(\mu(E) + \omega')^{f-1}(\mu(F) + \omega'')^{e-1}. \tag{5.4}$$

Dans la formule (15) de [AG] il y a une erreur que la formule (5.4) corrige. Supposons que D contienne un sommet interdit $B = \{B', B''\}$ aux poids $\omega' = |B'|$ et $\omega'' = |B''|$ et soit $\omega = \omega' + \omega''$. Soit $\{A_1, \ldots, A_{d-1}\}$ l'ensemble des autres sommets aux poids $\mu_i = |A_i|$. Puisque D contient d éléments alors le poids attaché à D par le lemme de Fan Chung ([AG]) est $\omega\mu(D)^{d-2}$ avec $\mu(D) = \omega + \sum_i \mu_i$. Ce poids apparaît à gauche dans la formule (15) de [AG] et il nous faut changer la somme à droite qui porte sur toutes les partitions $\{E, F\}$ de $\{A_1, \ldots, A_{d-1}\}$ car telle quelle la formule n'est malheureusement pas correcte. La formule correcte suit. Soient comme d'habitude $e = |E|$ et $f = |F|$.

Lemme 5.1

$$\omega\mu(D)^{d-2} = \sum(\mu(E)\omega'' + \mu(F)\omega' + \omega'\omega'')(\mu(E) + \omega')^{f-1}(\mu(F) + \omega'')^{e-1}. \tag{5.5}$$

Si $d = 1$ alors le côté gauche n'est que $\omega\omega^{-1} = 1$ et à droite il n'y a que la partition avec E et F vides. Donc $\mu(E) = \mu(F) = 0$ et le côté droit est aussi 1. Supposons donc que $d > 1$.

Il est plus convenable d'écrire le côté droit de l'équation comme

$$\sum\{(\mu(E) + \omega')^f(\mu(F) + \omega'')^e - \mu(E)\mu(F)(\mu(E) + \omega')^{f-1}(\mu(F) + \omega'')^{e-1}\}.$$

Si $d = 2$ il n'y a que deux possibilités à droite: soit $e = 1$ et $f = 0$; soit $e = 0$ et $f = 1$. La seconde expression de chaque terme est 0 et l'égalité devient

$$\omega = \omega' + \omega''$$

qui s'avère exact. Supposons donc que $d > 2$ et procédons par récurrence.

Les deux côtés de l'égalité à vérifier sont des polynômes en $\mu_i = |A_i|$, ω' et ω'' de degré $d - 1$. Puisque leur différence s'annule si $\omega' = \omega'' = 0$, il suffit de vérifier que le produit $\prod_1^{d-1} \mu_i$ la divise, donc qu'elle s'annule si $\mu_i = 0$ pour un i donné.

On peut appliquer l'identité à l'ensemble de variables μ_j, $j \neq i$, ω' et ω''. Puisque $\mu_i = 0$, le côté gauche de (5.5) devient $\omega(\omega + \sum_i \mu_j)^{d-3} = \omega\mu(D)^{d-3}$. En le multipliant par $\omega + \sum_j \mu_j$ on obtient le côté gauche de (5.5). A toute partition $\{E_1, F_1\}$ de $\{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d-1\}$ correspond deux partitions $\{E, F\}$ de $\{1, \ldots, d-1\}$: on ajoute i soit à E_1 soit à F_1. On obtient de cette façon chaque partition $\{E, F\}$. La somme sur ces deux partitions de $(\mu(E) + \omega')^f(\mu(F) + \omega'')^e$ n'est que

$$\mu(D)(\mu(E_1) + \omega')^{f_1}(\mu(F_1) + \omega'')^{e_1}.$$

Le même argument s'applique au second terme

$$\mu(E)\mu(F)(\mu(E) + \omega')^{f-1}(\mu(F) + \omega'')^{e-1}$$

de sorte que les deux côtés de l'identité se multiplie par $\mu(D)$ en passant de l'ensemble $\{1,\dots,i-1,i+1,\dots,d-1\}$ à l'ensemble $\{1,\dots,d-1\}$ pourvu que la variable μ_i soit 0. Le lemme en résulte.

La confusion déjà mentionnée provient du fait qu'il est parfois nécessaire, pendant le compte, de décomposer une paire (E,F) définie par les valeurs des z_i au point fixe en deux paires (E',F') et (E'',F''). Nous avons su tenir compte de cette possibilité pour des paires libres. Sa cause est même évidente pour des paires liées car alors le facteur N attaché à chaque paire provient de l'existence des N zéros de R. Mais il est bien possible de choisir le même zéro pour E' que pour E'' de sorte qu'ils se confondent dans le compte naïf. Heureusement les paires libres et les paires liées ne se confondent pas de sorte qu'il est permis en traitant les paires libres de les découpler des paires liées comme nous avons fait implicitement.

Puisque nous n'avons pas encore d'arguments généraux pour les paires liées, nous ne tenons compte que d'une façon explicite et maladroite de la possibilité des paires diagonales. A $\Delta=0$ tous les indices i tels que z_i est un zéro donné α de R sont mis ensemble pour obtenir E, et alors F est l'ensemble de j tels que $z_j=\beta=\tilde{\alpha}$. S'il n'y pas de sommet interdit, alors il faut examiner toutes les décompositions possibles $\{(E_1,F_1),\dots,(E_m,F_m)\}$ de (E,F) et vérifier qu'il y a

$$\sum\prod\chi(E_k,F_k) \tag{5.6}$$

solutions en séries de Puiseux qui émergent du point fixe à $\Delta=0$ aux coordonnées $z_i=\alpha$, $i\in E$, et $z_j=\beta$, $j\in F$, au moins dans le cas que $E\cup F=\{1,\dots,r\}$. Il suffit de traiter ce cas car les indices attachées aux zéros différents de α ou aux paires libres sont certainement découplés de ceux attachés à α et β. La somme porte sur toutes les décompositions possibles.

S'il y a un sommet interdit B nous définissons E et F de la même façon sauf que nous écartons les indices i qui appartiennent à B. Dans ce cas il y a une paire préférée (E_1,F_1) dans chaque décomposition, celle à laquelle sont attachés les éléments de B. Cependant il n'est pas exclu que E ou F soit vide ou même qu'ils soient tous les deux vides. Le compte pour la paire $\{E,F\}$ doit donner

$$\sum\chi(E_1,F_1,B)\prod_{i>1}\chi(E_i,F_i) \tag{5.7}$$

où le produit porte sur toutes les décompositions simultanées de E et de F.

Nous ne sommes pas en état de traiter les problèmes autour des formules (5.6) et (5.7) d'une façon générale. Il faut nous contenter d'exemples assez simples et même, pour ces exemples, de n'examiner que les premiers terme des séries de Puiseux qui y apparaissent. Nous ne vérifions pas que les séries elles-mêmes existent.

6. Les paires liées sans sommet interdit. Dans ce chapitre nous examinons les séries de Puiseux pour les paires liées qui n'ont pas de sommets interdits, donc des paires telles qu'aucune des coordonnées z_i, $i\in E\cup F$, n'est contrainte à demeurer un zéro ou un pôle de R même lors de la déformation. Cependant, à $\Delta=0$, toutes les coordonnées sont égales soit à un zéro donné de R soit au pôle correspondant. La formule pertinente est (2.40) dans laquelle nous remplaçons A et B par $(-1)^{r-1}A$ et $(-1)^{r-1}B$ pour alléger la notation. Les éléments de F seront dénotés $\underline{j}$. Les équations deviennent

$$\begin{aligned} A\Delta p_i &= \prod_{\underline{j}\in F} S(p_i,p_{\underline{j}})^{\mu_{\underline{j}}},\\ B\Delta p_{\underline{j}} &= \prod_{i\in E} S(p_i,p_{\underline{j}})^{\mu_i}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Les poids ne sont qu'implicites dans (2.40). Nous ne traitons que quelques cas simples de ces équations, qui ne sont d'ailleurs que des équations simplifiées par rapport aux vraies équations de déformation. La valeur de a dans la formule (2.39) n'est guère importante car les degrés d'homogénéité des deux côtés sont différents, et nous supposons que $a=-1$. Nous soulignons enfin que l'argument global est qu'il suffit de trouver *assez* de solutions! Il s'avérera alors à la toute fin de l'argument que nous les avons toutes trouvées. Pour faire le compte nous trouvons les parties dominantes possibles $x^0 + a(x)\Delta^\alpha$ des solutions en séries de Puiseux mais nous acceptons qu'il est possible de trouver par récurrence les termes suivants.

A: e=f=1. Soient $\mu = \mu_1$ et $\nu = \nu_1$. La somme (5.6) ne contient qu'un seul terme et si on utilise une transformation simple ($p \to -ap$, $q \to -aq$) pour éliminer $-a$ de (2.39), les équations simplifiées (2.40) deviennent

$$A\Delta p_1 = \left(\frac{p_1 + p_{\underline{1}}}{p_1 + p_{\underline{1}} + 1}\right)^\nu,$$

$$B\Delta p_{\underline{1}} = \left(\frac{p_1 + p_{\underline{1}}}{p_1 + p_{\underline{1}} + 1}\right)^\mu,$$

avec de nouvelles constantes A et B. Il y a deux types de solutions de ces équations en série de Puiseux en puissances de Δ. D'abord $p_1 \equiv p_{\underline{1}} \equiv 0$ (c'est-à-dire en fonction de Δ) donne une seule solution.

Soit autrement $\alpha = \alpha(p_1)$, $\beta = \alpha(p_{\underline{1}})$ et $\gamma = \alpha(p_1 + p_{\underline{1}})$ les exposants de p_1, $p_{\underline{1}}$ et $p_1 + p_{\underline{1}}$ définis selon nos conventions. Evidemment $\gamma > 0$ de sorte que $p_1^0 = -p_{\underline{1}}^0$. On a $1 + \alpha = \nu\gamma$ et $1 + \beta = \mu\gamma$. Supposons que $\nu \leq \mu$ de sorte que $\chi(E, F) = \nu$.

Si $\nu < \mu$ alors $\beta > \alpha$ de sorte que $\gamma = \alpha = 1/(\nu - 1)$. En comparant les coefficients des termes du plus bas degré dans la première des équations on obtient

$$Aa(p_1) = a(p_1)^\nu.$$

Puisque la solution $a(p_1) = 0$ est exclue par la définition même de $a(p_1)$, il y a $\nu - 1$ solutions admises. Elles sont différentes. L'équation pour $a(p_{\underline{1}})$ est alors

$$Ba(p_{\underline{1}}) = a(p_1)^\mu$$

qui détermine $a(p_{\underline{1}})$. Par conséquent nous obtenons $\nu - 1 + 1 = \chi(E, F)$ solutions.

Si $\mu = \nu$ alors $\alpha = \beta$. En divisant les deux équations on obtient une équation pour $p_1/p_{\underline{1}}$ dont -1 n'est pas une solution puisque A/B est générique. Par conséquent $\gamma = \alpha = \beta = 1/(\nu - 1)$. On obtient à nouveau ν solutions.

B: f=1. Soit $\nu = \nu_{\underline{1}}$. Puisque $\chi(E, \emptyset) = 0$ pour tout E, il n'y a toujours pas de décomposition à examiner et il suffit de trouver

$$\chi(E, F) = \min\left\{\sum \mu_i, \nu\right\}\nu^{e-1}$$

solutions.

Soit, lorsqu'ils sont définis, $\alpha_i = \alpha(p_i)$, $\beta = \alpha(p_{\underline{1}})$ et $\gamma_i = \alpha(p_i + p_{\underline{1}})$. Commençons par les solutions avec $p_{\underline{1}} \equiv 0$. Soit R l'ensemble des i tels que $p_i \not\equiv 0$. A cause de l'équation

$$B\Delta p_{\underline{1}} = \prod_i \left(\frac{p_i + p_{\underline{1}}}{p_i + p_{\underline{1}} + 1}\right)^{\mu_i}$$

l'ensemble R n'est pas tout l'ensemble E. Pour $i \in R$ on a $1 + \alpha = \gamma$ et l'équation pour $a(p_i)$ est

$$Aa(p_i) = a(p_i)^\nu,$$

qui possède $\nu - 1$ solutions à part la solution 0. On obtient donc au total

$$\sum_R (\nu - 1)^{|R|} = \nu^e - (\nu - 1)^e,$$

solutions car la somme porte sur tout sous-ensemble R de $\{1, \ldots, e\}$ sauf l'ensemble lui-même.

Supposons maintenant que $p_{\underline{1}} \not\equiv 0$ de sorte qu'aucun p_i n'est identiquement nul. Nous répartissons l'ensemble des indices en quatre:

$$\begin{aligned} R &= \{i|\alpha_i = \gamma_i < \beta\}, \\ S &= \{i|\alpha_i = \beta < \gamma_i\}, \\ T &= \{i|\beta = \gamma_i < \alpha_i\}, \\ U &= \{i|\alpha_i = \gamma_i = \beta\}. \end{aligned}$$

Des équations

$$A\Delta p_i = \left(\frac{p_i + p_{\underline{1}}}{p_i + p_{\underline{1}} + 1}\right)^{\nu},$$

$$B\Delta p_{\underline{1}} = \prod_i \left(\frac{p_i + p_{\underline{1}}}{p_i + p_{\underline{1}} + 1}\right)^{\mu_i},$$

il résulte que

$$\begin{aligned} &\alpha_i = \gamma_i = 1/(\nu-1), \quad (\nu-1)\beta > 1, && i \in R, \\ &\gamma_i = (1+\beta)/\nu > \beta, \quad 1 > (\nu-1)\beta, && i \in S, \\ &\alpha_i = \nu\gamma_i - 1 = \nu\beta - 1 > \beta, \quad (\nu-1)\beta > 1, && i \in T, \\ &\nu = \textstyle\sum \mu_i, \quad \beta = 1/(\nu-1), && i \in U. \end{aligned}$$

Par conséquent on a soit $S = E$, soit $U = E$, soit quelque partition de $\{1, \ldots, e\}$ entre R et T, S et U étant vides. Le cas $\sum \mu_i = \nu$ étant exceptionel, nous le remettons à la fin de l'argument. Dans tout autre cas on a

$$1 + \beta = \sum_{i \in T} \mu_i \beta + \sum_{i \in S} \frac{1+\beta}{\nu} \mu_i + \sum_{i \in R} \frac{\mu_i}{\nu - 1}$$

ou

$$\beta\Big(\sum_T \mu_i + \sum_S \mu_i/\nu - 1\Big) = 1 - \sum_S \mu_i/\nu - \sum_R \frac{\mu_i}{\nu-1}.$$

Observons que R est vide si $\nu = 1$. De plus si R et T sont vides, on obtient de cette équation, sauf si $\sum \mu_i = \nu$, que la quantité non-négative β est -1.

Si R est tout l'ensemble E, on obtient

$$\beta = \frac{\sum \mu_i - \nu + 1}{\nu - 1}$$

et l'équation $(\nu-1)\beta > 1$ implique que $\sum \mu_i > \nu$ ou $\sum \mu_i \geq \nu$. L'équation pour $a(p_i)$ est

$$Aa(p_i) = a(p_i)^{\nu}$$

dont il y a $\nu - 1$ solutions pour chaque i. Ajoutant à celles-ci les solutions $p_{\underline{1}} \equiv 0$, nous avons trouvé

$$\nu^e - (\nu-1)^e + (\nu-1)^e = \nu^e$$

solutions qui, si $\sum \mu_i > \nu$, est le nombre voulu $\chi(E, F)$.

Si T est non-vide, alors

$$\beta\Big(\sum_T \mu_i - 1\Big) = 1 - \sum_R \frac{\mu_i}{\nu - 1}.$$

De l'équation $(\nu-1)\beta > 1$, il résulte que

$$\sum_T \mu_i - 1 < \nu - 1 - \sum_R \mu_i \Leftrightarrow \sum \mu_i < \nu.$$

Si cette condition est satisfaite, alors l'ensemble T ne peut pas être vide, mais c'est la seule condition sur T. Les équations pour $a(p_i)$, $a(p_{\underline{1}})$ sont

$$\begin{aligned} Aa(p_i) &= a(p_i)^\nu, \qquad && i \in R, \\ Aa(p_i) &= a(p_{\underline{1}})^\nu, \qquad && i \in T, \\ Ba(p_{\underline{1}}) &= \prod_T a(p_{\underline{1}})^{\mu_i} \prod_R a(p_i)^{\mu_i}, \end{aligned}$$

qui possèdent $(\nu-1)^{|R|}(\sum_T \mu_i - 1)$ solutions. Sommant sur toutes les partitions, on obtient le nombre de solutions:

$$\sum_{R \subsetneq E} (\nu-1)^{|R|} \Big(\sum_{i \in E \backslash R} \mu_i - 1 \Big) = \sum_i \mu_i \sum_{i \notin R} (\nu-1)^{|R|} - \nu^e + (\nu-1)^e.$$

Si nous nous rappelons les solutions déjà trouvées, cela donne

$$\Big(\sum \mu_i \Big) \nu^{e-1} = \chi(E,F)$$

solutions. Observons que ces arguments restent valables même pour $\nu = 1$.

Il ne reste que le cas que $\sum \mu_i = \nu$. Dans ce cas nous n'avons trouvé que ν^e solutions à part celles données par le cas où chaque i est dans U. Alors en éliminant des puissances de Δ des équations nous obtenons d'abord

$$A' x_i = (x_i + 1)^\nu, \quad x_i = a(p_i)/a(p_{\underline{1}}), \quad A' = Aa(p_{\underline{1}})^{1-\nu}, \tag{6.2}$$

ce qui nous permet de trouver toutes les valeurs possibles des x_i comme fonction de A'. En plus il y a l'équation

$$B' = \prod (x_i + 1)^{\mu_i}, \quad B' = Ba(p_{\underline{1}})^{1-\nu}. \tag{6.3}$$

Ces équations exigent malheureusement une discussion un peu fastidieuse. Observons tout de suite que les solutions de l'équation en x

$$A' x = (x+1)^\nu \tag{6.4}$$

sont toutes distinctes sauf si pour une d'elles $A' = \nu(x+1)^{\nu-1}$, donc si

$$x = (A'/\nu)^{1/(\nu-1)}.$$

Il résulte de cette dernière équation que si les équations (6.2) et (6.3) sont satisfaites et si les solutions de (6.4) ne sont pas toutes distinctes alors A' et B' appartiennent à des ensembles finis donnés. Puisque $A'/B' = A/B$ est générique cela n'est pas possible.

Soit $a = a(p_{\underline{1}})$. Nous remplaçons dans (6.2) et (6.3) le facteur $x_i + 1$ par $x_i + \delta/a$ où δ est un paramètre que nous mettons ensuite égal à 0. Si on met $y_i = ax_i + \delta$ cela donne des équations

$$Ay_i = y_i^\nu, \qquad Ba = \prod y_i^{\mu_i},$$

qui sont des équations de type multiplicatif et dont le nombre de solutions non-nulles, chacune de multiplicité un, est (à signe près) le déterminant

$$\begin{vmatrix} \nu-1 & 0 & \dots & 0 & \nu-1 \\ 0 & \nu-1 & \dots & 0 & \nu-1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \nu-1 & \nu-1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_e & \nu-1 \end{vmatrix}.$$

Un calcul facile montre que ce déterminant est $-(\nu-1)^e$. En admettant aussi des solutions telles que quelques y_i sont nuls de façon que a est forcément nul, nous obtenons en tout ν^e solutions, toutes de multiplicité un. Puisque $\nu^e = \chi(E,F)$ est exactement le nombre voulu de solutions, il ne reste qu'à se convaincre que toutes ces solutions peuvent être déformées de $\delta = 0$ à $\delta/a = 1$. Hors des points où $a = 0$ on peut récupérer les x_i à partir des y_i.

Puisqu'elles toutes ces solutions sont de multiplicité un à $\delta = 0$ une petite déformation est certainement possible. En examinant les équations on vérifie que aucun y_i n'est nul près de $\delta = 0$ sauf à $\delta = 0$. Donc a n'est nul hors de $\delta = 0$. Ayant déformé les $\chi(E,F)$ solutions de $\delta = 0$ dans un petit voisinage où elles restent forcément distinctes et en particulier à un point particulier $\delta \neq 0$ de ce voisinage, nous remplaçons δ/a par δ pour continuer jusqu'à $\delta = 1$ en évitant tout point de ramification. Le seul accroc possible est que deux solutions $(x_i(\delta), a(\delta))$ et $(x_i'(\delta), a'(\delta))$ distinctes en $\delta = 0$ coïncident en $\delta = 1$. Il résulte de notre discussion de l'équation (6.4) que chaque $y_i(0)$ est alors égal à $y_i'(0)$, et que cette égalité demeure valable le long de tout chemin de déformation. Mais alors $(a(\delta)/a'(\delta))^{1-\nu}$ reste constant sur le chemin le long lequel on déforme en faisant varier δ, car

$$Ba = \prod (y_i - \delta)^{\mu_i}.$$

La constante $a(\delta)/a'(\delta)$ est nécessairement égale à 1.

C: e=f=2 avec tous les poids égaux à 1. Dans ce cas il y a des répartitions possibles de la forme $\{E_1, F_1\}|\{E_2, F_2\}$ pour lesquelles chacun des quatre ensembles n'a qu'un seul élément. Il y a deux telles répartitions et $\chi(E_1, F_1) = \chi(E_2, F_2) = 1$. Puisque $\mu_1 + \mu_2 = \nu_1 + \nu_2 = 2$ on a $\chi(E,F) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Nous cherchons par conséquent $8 + 2 = 10$ solutions.

Il y a d'abord $p_1 = p_2 = p_{\underline{1}} = p_{\underline{2}} \equiv 0$. Puis ce sont les solutions pour lesquelles une seule des variables n'est pas identiquement zéro. Pour cette variable il y a quatre choix. Si, par exemple, elle est p_2 alors

$$A\Delta p_2 = \frac{p_2^2}{(p_2+1)^2}.$$

Il en résulte que $\alpha(p_2) = 1$ et que $a(p_2) = A$.

Ensuite ce sont celles avec un seul $p_i \equiv 0$ et un seul $p_{\underline{i}} \equiv 0$. Il y a deux possibilités pour i et deux pour $\underline{i}$. Si $i = 1$ et $\underline{i} = \underline{1}$ alors les équations pour p_2 et $p_{\underline{2}}$ deviennent

$$\begin{aligned} A\Delta p_2 &= \frac{p_2 + p_{\underline{2}}}{p_2 + p_{\underline{2}} + 1} \frac{p_2}{p_2 + 1}, \\ B\Delta p_{\underline{2}} &= \frac{p_2 + p_{\underline{2}}}{p_2 + p_{\underline{2}} + 1} \frac{p_{\underline{2}}}{p_{\underline{2}} + 1}. \end{aligned}$$

Ces équations impliquent de plus que $\alpha(p_2 + p_{\underline{2}}) = 1$. En divisant ces deux équations nous trouvons l'équation $A/B = (p_{\underline{2}} + 1)/(p_2 + 1)$. Puisque A/B est générique il est exclu que $\alpha(p_2) > 0$ et $\alpha(p_{\underline{2}}) > 0$. Par conséquent $a(p_2) = -a(p_{\underline{2}})$ et

$$\frac{A}{B} = -\frac{a(p_2) + 1}{a(p_2) - 1}.$$

De cette équation on trouve la valeur de $a(p_2)$.

Nous avons trouvé, à ce point, neuf solutions. Il nous en faut une de plus. Supposons qu'aucune des quatre fonctions p_i et $p_{\underline{j}}$ n'est identiquement zéro. On obtient alors

$$\begin{aligned} A\Delta p_i &= \prod_{\underline{j}} \frac{p_i + p_{\underline{j}}}{p_i + p_{\underline{j}} + 1}, \\ B\Delta p_{\underline{j}} &= \prod_i \frac{p_i + p_{\underline{j}}}{p_i + p_{\underline{j}} + 1}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Nous cherchons des solutions telles que $\alpha(p_i) = \alpha(p_{\underline{j}}) = 1$ pour tout i et $\underline{j}$ et telles que $a(p_i) = a$ est indépendant de i et $a(p_{\underline{j}}) = b$ indépendant de $\underline{j}$. On obtient

$$Aa = (a+b)^2, \qquad Bb = (a+b)^2,$$

et par conséquent $a = c/A$, $b = c/B$, $1 = c(1/A + 1/B)^2$. Puisque nous avons trouvé 10 solutions il ne faut pas en chercher plus! Nous reviendrons à ce cas mais seulement après en avoir examiné un autre.

D: e=3, f=2 mais tout poids est 1. Les décompositions possibles sont de la forme $\{E_1, F_1\}|\{E_2, F_2\}$ et elles auront $f_1 = e_2 = f_2 = 1$ et $e_1 = 2$ et pour chacune on a $\chi(E_1, F_1) = 1 \cdot 2^0 \cdot 1^1 = 1$, tandis que $\chi(E, F) = 2 \cdot 3^1 \cdot 2^2 = 24$. Nous cherchons alors $24 + 6 \cdot 1 = 30$ solutions. Elles se distribueront de la façon suivante. Dans cette liste il est entendu que toutes les variables sauf celles données explicitement ne sont pas identiquement zéro.

$p_1 = p_2 = p_3 = p_{\underline{1}} = p_{\underline{2}} \equiv 0$ – une solution: 1.
$p_1 = p_{\underline{1}} \equiv 0$ – une solution et six choix d'indices: $1 \times 6 = 6$.
$p_1 = p_{\underline{1}} = p_{\underline{2}} \equiv 0$ – une solution et trois choix d'indices: $1 \times 3 = 3$.
$p_1 = p_2 = p_{\underline{1}} \equiv 0$ – deux solutions et six choix d'indices: $2 \times 6 = 12$.
$p_1 = p_2 = p_{\underline{1}} = p_{\underline{2}} \equiv 0$ – une solution et trois choix d'indices: $1 \times 3 = 3$;
$p_1 = p_2 = p_3 = p_{\underline{1}} \equiv 0$ – deux solutions et deux choix d'indices: $2 \times 2 = 4$.
Aucune des variables n'est identiquement zéro – une solution: 1.

La somme de ces nombres est 30. Donc ayant trouvé ces solution, il n'est pas nécessaire d'en chercher plus. Ce qui frappe le plus (pour des raisons que nous discuterons plus tard) est qu'il n'est pas du tout évident qu'il n'y ait qu'une seule solution telle qu'aucune des variables n'est identiquement zéro. Si $e = f = 2$, il s'avère possible de manipuler les équations de façon à se convaincre qu'il n'y pas que la solution trouvée mais, pour $e = 2$ et $f = 3$, nous n'avons pas su le faire.

Examinons les divers cas. Le premier est évident. Le deuxième donne

$$A\Delta p_i = S(p_i)S(p_i + p_{\underline{2}}), \qquad i = 2, 3,$$
$$B\Delta p_{\underline{2}} = S(p_{\underline{2}}) \prod_{i=2}^{3} S(p_i + p_{\underline{2}}).$$

De ces équations il résulte que
$$\frac{A^2\Delta}{B} = \frac{p_{\underline{2}} + 1}{(p_2+1)(p_3+1)}$$
et par conséquent que $p_{\underline{2}} = -1 + a(p_{\underline{2}})\Delta^{\alpha(p_{\underline{2}})} + \ldots$, $\alpha(p_{\underline{2}}) = 1$. Nous concluons de plus que $p_i = 1 + a(p_i)\Delta + \ldots$, $i = 2, 3$. On obtient enfin l'équation

$$A = (a(p_i) + a(p_{\underline{2}})), \qquad i = 2, 3,$$

d'où il résulte que $a(p_2) = a(p_3)$ et
$$B = (a(p_2) + a(p_{\underline{2}}))^2 / a(p_{\underline{2}}).$$
Ces équations admettent une solution unique! En particulier, $a(p_{\underline{2}}) = A^2/B$.

Dans le troisième cas on a
$$A\Delta p_i = S(p_i)^2, \qquad i = 2, 3,$$
ou
$$A\Delta = p_i/(p_i+1)^2.$$
Ces équations admettent évidemment une seule solution en série de Puiseux et $p_2 = p_3$.

Dans le quatrième cas on a

$$A\Delta = \frac{p_3 + p_{\underline{2}}}{(p_3 + p_{\underline{2}} + 1)(p_3 + 1)},$$
$$B\Delta = \frac{(p_3 + p_{\underline{2}})p_{\underline{2}}}{(p_3 + p_{\underline{2}} + 1)(p_{\underline{2}} + 1)^2}.$$

En divisant les deux équations nous trouvons

$$\frac{A}{B} = \frac{(p_{\underline{2}} + 1)^2}{p_{\underline{2}}(p_3 + 1)}.$$

Nous concluons de la première équation que $p_3 + p_{\underline{2}} = a(p_3 + p_{\underline{2}})\Delta^\alpha + \ldots$, $\alpha = \alpha(p_3 + p_{\underline{2}}) = 1$. Puisque A/B est générique il résulte de la dernière que $p_3 = -a + a(p_3)\Delta^\alpha + \ldots$ et que $p_{\underline{2}} = a + a(p_{\underline{2}})\Delta^\alpha + \ldots$ où $a \neq 0$ est une des deux solutions de $A/B = -(a+1)^2/a(a-1)$. La valeur de $a(p_3 + p_{\underline{2}})$ se déduit alors de la première équation, mais pour trouver $a(p_3)$ et $a(p_{\underline{2}})$ il faut utiliser la dernière équation une deuxième fois en examinant les termes linéaires en Δ.

Dans le cinquième cas il n'y a que l'équation

$$A\Delta = \frac{p_3}{(p_3 + 1)^2}.$$

Il en résulte que $\alpha(p_3) = 1$ et que $a(p_3) = A$.

Dans le sixième cas l'équation est

$$B\Delta = \frac{p_{\underline{2}}^2}{(p_{\underline{2}} + 1)^3}$$

de sorte que $\alpha(p_{\underline{2}}) = 1/2$ et $B = a(p_{\underline{2}})^2$.

Il reste enfin le cas qu'aucune des séries n'est identiquement nulle. Puisque nous n'avons besoin que d'une seule solution, nous supposons que $p_1 = p_2 = p_3$ et que $p_{\underline{1}} = p_{\underline{2}}$. Les deux équations deviennent

$$A\Delta p_1 = \frac{(p_1 + p_{\underline{1}})^2}{(p_1 + p_{\underline{1}} + 1)^2},$$
$$B\Delta p_{\underline{1}} = \frac{(p_1 + p_{\underline{1}})^3}{(p_1 + p_{\underline{1}} + 1)^3}.$$

En général les équations

$$A\Delta p_1 = \frac{(p_1 + p_{\underline{1}})^\nu}{(p_1 + p_{\underline{1}} + 1)^\nu},$$
$$B\Delta p_{\underline{1}} = \frac{(p_1 + p_{\underline{1}})^\mu}{(p_1 + p_{\underline{1}} + 1)^\mu}.$$

avec $\mu > \nu > 1$ admettent des solutions $p_1 = a\Delta^\alpha + \ldots$, $p_{\underline{1}} = b\Delta^\beta + \ldots$ avec $\alpha = 1/(\nu - 1)$, $\beta = \alpha\mu - 1 = (\mu - \nu + 1)/(\nu - 1)$. Les valeurs de $a \neq 0$ et $b \neq 0$ sont déterminées par

$$Aa = a^\nu, \qquad Bb = a^\mu.$$

Il y a par conséquent $\nu - 1$ possibilités. Si $\mu = \nu$ on arrive au même résultat mais les équations sont un peu plus compliquées.

Nous ne traitons pas d'autres cas de paires libres mais avant de passer aux paires liées nous examinons les équations

$$(6.6)\qquad \begin{aligned} A\Delta p_i &= \prod_{\underline{j}\in F} S(p_i + p_{\underline{j}}), \\ B\Delta p_{\underline{j}} &= \prod_{i\in E} S(p_i + p_{\underline{j}}) \end{aligned}$$

sous l'hypothèse qu'aucune des séries p_i et $p_{\underline{j}}$ n'est identiquement zéro. Ce sont les équations (6.5) généralisées. Nous montrons, pour $e = f = 2$, comment en déduire que toute telle solution satisfait aux conditions: $p_1 = p_2$ et $p_{\underline{1}} = p_{\underline{2}}$. Cependant, même pour $e = 3$, $f = 2$ nous ne savons pas établir ce fait directement.

En divisant les deux équations nous obtenons

$$\frac{A}{B}\frac{p_i}{p_{\underline{j}}} = \frac{\prod_{\underline{l}\neq\underline{j}} S(p_i + p_{\underline{l}})}{\prod_{k\neq i} S(p_k + p_{\underline{j}})}.$$

Nous supposons que $p_i^0 = 0$ pour tout i et que $p_{\underline{j}}^0 = 0$ pour tout $\underline{j}$. Cette équation s'écrit

$$(6.7)\qquad Ap_i \prod_{k\neq i} S(p_k + p_{\underline{j}}) = Bp_{\underline{j}} \prod_{\underline{l}\neq\underline{j}} S(p_i + p_{\underline{l}}).$$

Les premières des équations (6.6) s'écrivent

$$\begin{aligned} Ap_i\Delta &= \frac{p_i}{p_i + p_{\underline{j}} + 1} \prod_{\underline{l}\neq\underline{j}} S(p_i + p_{\underline{l}}) + \frac{p_{\underline{j}}}{p_i + p_{\underline{j}} + 1} \prod_{\underline{l}\neq\underline{j}} S(p_i + p_{\underline{l}}) \\ &= \frac{p_i}{p_i + p_{\underline{j}} + 1} \prod_{\underline{l}\neq\underline{j}} S(p_i + p_{\underline{l}}) + \frac{A}{B}\frac{p_i}{p_i + p_{\underline{j}} + 1} \prod_{k\neq i} S(p_k + p_{\underline{j}}). \end{aligned}$$

Puisque $p_i \not\equiv 0$ il est permis de le supprimer.

Si $e = 2$ et $f = 2$, l'équation qui reste peut être considérée comme une équation linéaire pour p_1, p_2, $p_{\underline{1}}$, $p_{\underline{2}}$ dans laquelle les coefficients dépendent de ces mêmes variables. Si i et $\underline{j}$ sont donnés, supposons que $k \neq i$ et $\underline{l} \neq \underline{j}$.

$$(6.8)\qquad A\Delta = (p_i + p_{\underline{l}}) \prod_{\underline{n}} \frac{1}{p_i + p_{\underline{n}} + 1} + \frac{A}{B}(p_k + p_{\underline{j}}) \prod_{m} \frac{1}{p_m + p_{\underline{j}} + 1}.$$

Puisqu'il y a quatre choix de la paire $(i, \underline{j})$, il y a quatre équations pour les quatre variables. La matrice des coefficients, dans laquelle la première correspond à la paire $(1, \underline{1})$, la deuxième à $(2, \underline{1})$ et ainsi de suite, est

$$M = \begin{pmatrix} \rho_1 & \sigma_{\underline{1}} & \sigma_{\underline{1}} & \rho_1 \\ \sigma_{\underline{1}} & \rho_2 & \sigma_{\underline{1}} & \rho_2 \\ \rho_1 & \sigma_{\underline{2}} & \rho_1 & \sigma_{\underline{2}} \\ \sigma_{\underline{2}} & \rho_2 & \rho_2 & \sigma_{\underline{2}} \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} \rho_i &= \prod_{\underline{n}} \frac{1}{p_i + p_{\underline{n}} + 1}, \\ \sigma_{\underline{j}} &= \frac{A}{B} \prod_{m} \frac{1}{p_m + p_{\underline{j}} + 1}. \end{aligned}$$

Soulignons qu'il s'agit des équations linéaires en $p_1, p_2, p_{\underline{1}}, p_{\underline{2}}$ dont les coefficients dépendent de ces mêmes variables.

À $\Delta = 0$ on a

$$\rho_i = \rho = 1, \qquad \sigma_{\underline{j}} = \sigma = A/B.$$

Si $\rho^2 \neq \sigma^2$ la matrice

$$\begin{pmatrix} \rho & \sigma & \sigma & \rho \\ \sigma & \rho & \sigma & \rho \\ \rho & \sigma & \rho & \sigma \\ \sigma & \rho & \rho & \sigma \end{pmatrix}$$

est de rang trois. Le seul vecteur qu'elle annule est le transposé de $(1, 1, -1, -1)$. Puisque A/B est générique, il en résulte que les équations (6.8) déterminent toutes les quantités $p_i + p_{\underline{j}}$ à partir des coefficients ρ_i et $\sigma_{\underline{j}}$.

En particulier

$$p_i + p_{\underline{j}} = \frac{\rho_k - \sigma_{\underline{l}}}{\rho_1\rho_2 - \sigma_{\underline{1}}\sigma_{\underline{2}}} A\Delta.$$

de sorte que $\alpha(p_i + p_{\underline{j}}) = 1$ pour tout i et $\underline{j}$. Puisque ρ_k et $\sigma_{\underline{l}}$ sont des fonctions des $p_m + p_{\underline{n}}$, nous pouvons utiliser ces équations pour calculer par récurrence le développement en série de Puiseux des fonctions $p_m + p_{\underline{n}}$. Il en résulte qu'elles ne dépendent pas des indices. Enfin en utilisant les équations (6.6) nous concluons que $p_1 = p_2$, que $p_{\underline{1}} = p_{\underline{2}}$ et que $\alpha(p_i) = \alpha(p_{\underline{j}}) = 1$.

7. Les paires liées à sommet interdit. La somme pertinente est (5.7). Les équations pertinentes sont des modifications de (6.1)

$$\begin{aligned} A\Delta p_i &= S(p_i)^{\omega''} \prod_{\underline{j} \in F} S(p_i, p_{\underline{j}})^{\mu_{\underline{j}}}, \\ B\Delta p_{\underline{j}} &= S(p_{\underline{j}})^{\omega'} \prod_{i \in E} S(p_i, p_{\underline{j}})^{\mu_i}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

où $S(p) = S(p, 0)$. Nous nous permettons d'utiliser deux notations déjà introduites bien qu'elles soient en conflit: la constante B de (2.40) et l'ensemble B de sommets interdits. Cela n'entraine guère d'inconvénients. On se souvient aussi que selon les conventions de la section 5, $B = B' \cup B''$ et que B' est rattaché à E et B'' à F, mais que E et B' aussi bien que F et B'' sont disjoints. Les facteurs supplémentaires à droite dans les équations sont attachés au sommets interdits B'' et B', car pour les indices i et $\underline{j}$ dans $\mathbb{B}$ les coordonnées p_i et $p_{\underline{j}}$ restent 0. Ces équations sont valables même pour $i \in B'$ ou $\underline{j} \in B''$, mais elles ne donnent rien car alors p_i et $S(p_i)$ ou $p_{\underline{j}}$ et $S(p_{\underline{j}})$ sont nuls. Pour tout i, $p_i^0 = 0$ et pour tout $\underline{j}$, $p_{\underline{j}}^0 = 0$.

A: f=0. C'est le cas où F est vide. Alors la seule décomposition à considérer est $\{E, \emptyset, B\}$ et

$$\chi(E, \emptyset, B) = (\omega'')^e.$$

Les équations à résoudre sont

$$A\Delta p_i = \left(\frac{p_i}{p_i + 1}\right)^{\omega''}.$$

Ces équations ne sont pas couplées. On peut choisir $p_i \equiv 0$, qui est la seule solution si $\omega'' = 1$. Si $\omega'' > 1$ toute autre solution est de la forme

$$p_i = a(p_i)\Delta^{\alpha(p_i)} + \dots.$$

Evidemment $\alpha(p_i) = 1/(\omega'' - 1)$ et l'équation pour $a(p_i)$ est

$$Aa(p_i) = a(p_i)^{\omega''},$$

dont il y a $\omega''-1$ solutions distinctes et distinctes de zéro. Donc chaque équation a ω'' solutions. Puisqu'il y a e équations indépendantes on obtient le nombre voulu de solutions.

Nous ne traitons ensuite que le cas où F ne contient qu'un seul élément, donc où $f=1$. A part la partition principale qui correspond à un diagramme connexe, il y a d'autres partitions qui correspondent aux diagrammes non-connexes et donc aux termes diagonaux. On a donc dans (5.7) des termes attachés aux décompositions

$$\{E,F,B\} \qquad \{E,F\},\{B\} \qquad \{E_1,B\},\{E_2,F\} \qquad \{E,\emptyset\},\{F,B\}.$$

Puisque $\chi(E,\emptyset)=0$ la somme (5.7) est

$$\chi(E,F,B)+\chi(E,F)\chi(B)+\sum\chi(E_1,\emptyset,B)\chi(E_2,F). \tag{7.2}$$

Il est entendu que dans la somme ni E_1 ni E_2 n'est vide et que leur réunion est E. En plus de l'hypothèse $f=1$ nous supposons soit que $e=1$ soit que $\omega'=\omega''=1$.

B: f=1 et e $=$ 1. Soit μ le poids du seul élément de E et ν le poids du seul élément de F. D'abord

$$\chi(E,F,B)=\omega'\omega''+\omega'\nu+\omega''\mu$$

tandis que

$$\chi(E,F)\chi(B)=\min\{\mu,\nu\}.$$

Puisqu'il n'existe pas de décomposition $\{E_1,B\},\{E_2,F\}$ avec $E_1\neq\emptyset$ et $E_2\neq\emptyset$ nous cherchons

$$\chi(E,F,B)+\chi(E,F)\chi(B)=\omega'\omega''+\omega'\nu+\omega''\mu+\min\{\mu,\nu\} \tag{7.3}$$

solutions liées qui se développent en séries de Puiseux

$$\begin{aligned} p_i &= p_i^0+a(p_i)\Delta^{\alpha(p_i)}+\dots, \\ p_{\underline{j}} &= p_{\underline{j}}^0+a(p_{\underline{j}})\Delta^{\alpha(p_{\underline{j}})}+\dots. \end{aligned}$$

Puisque $e=f=1$ il n'y a que deux équations, celles pour $i=1$ et pour $\underline{j}=\underline{1}$. Observons comme première conséquence des équations (7.1) que, si $p_1^0\neq0$ ou $p_{\underline{1}}^0\neq0$, alors $p_1^0+p_{\underline{1}}^0=0$. Cette dernière équation est donc toujours valable et nous écrivons

$$p_1+p_{\underline{1}}=a(p_1+p_{\underline{1}})\Delta^\gamma+\dots.$$

Pour pouvoir plus facilement analyser les équations pour les exposantes $\alpha=\alpha(p_1)$, $\beta=\alpha(p_{\underline{1}})$ et γ nous posons

$$a=\omega'-1,\quad b=\mu,\quad c=\omega''-1,\quad d=\nu.$$

Comme nous le verrons par la suite, les conditions sur ces quantités qui s'avèrent pertinentes sont,

$$\begin{aligned} &sgn(bc-ad)=sgn(b-d)=sgn(c-a), \\ &|a-c|\geq|b-d|. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Supposons que $b\leq d$, donc que $\mu\leq\nu$. Si la condition (7.4) n'est pas satisfaite nous obtiendrons par la suite $a(c+d)+bc$. Par contre si elle est satisfaite alors $a-c\geq d-b$ de sorte que $a+b\geq c+d$ et nous obtiendrons

$$c(a+b)+ad-bc+bc=a(c+d)+bc.$$

Donc deux expressions à première vue différentes qui apparaîtront sont en fait les mêmes – une remarque facile mais utile!

Nous cherchons d'abord des solutions avec $p_1^0 = p_{\underline{1}}^0 = 0$. Si ni p_1 ni $p_{\underline{1}}$ n'est identiquement nul, il y a quatre possibilités

$$\alpha = \gamma < \beta, \tag{7.5a}$$
$$\beta = \gamma < \alpha, \tag{7.5b}$$
$$\alpha = \beta < \gamma, \tag{7.5c}$$
$$\alpha = \beta = \gamma. \tag{7.5d}$$

Pour trois des cas $\beta \geq \alpha$ et les inconnues convenables sont $p_{\underline{1}}$ et $p_1 + p_{\underline{1}}$. Les équations pour α et β sont dans les cas correspondants à (7.5.a) et (7.5.c):

$$1 + \alpha = \omega''\alpha + \nu\alpha, \quad 1 + \beta = \omega'\beta + \mu\alpha, \tag{7.6.a}$$
$$1 + \alpha = \omega''\alpha + \nu\gamma, \quad 1 + \alpha = \omega'\alpha + \mu\gamma, \tag{7.6.c}$$

Dans le cas (7.5.d) qui n'arrive que si $\omega' + \mu = \omega'' + \nu$, tous les exposants sont égaux à $1/(\omega' + \mu - 1)$.

Considérons les contraintes qu'impose l'existence de solutions positives des équations (7.6.a) et (7.6.c) qui satisfont aux inégalités (7.5.a) et (7.5.c). Pour (7.6.a) on trouve

$$\alpha = \frac{1}{\omega'' + \nu - 1}, \qquad \beta = \frac{1 - \mu\alpha}{\omega' - 1}.$$

Alors on a $\alpha < \beta$ (et par conséquent $\beta > 0$) si et seulement si $\omega' + \mu < \omega'' + \nu$. Il en résulte que les deux cas (7.5.a) et (7.6.b) s'excluent l'un l'autre.

La solution des équations (7.6.c) est

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\mu - \nu}{\mu(\omega'' - 1) - \nu(\omega' - 1)}, \\ \gamma &= \frac{\omega'' - \omega'}{\mu(\omega'' - 1) - \nu(\omega' - 1)} \end{aligned} \tag{7.7}$$

sauf peut-être dans le cas exceptionnel $\mu(\omega'' - 1) - \nu(\omega' - 1) = 0$. A part ce cas, les équations (7.7) n'ont de solution positive que si les conditions

$$sgn(\mu - \nu) = sgn(\omega'' - \omega') = sgn(\mu(\omega'' - 1) - \nu(\omega' - 1))$$

sont satisfaites. Donc (7.5.c) est possible si et seulement si $\mu < \nu$ et $\omega' + \mu > \omega'' + \nu$ ou $\nu < \mu$ et $\omega'' + \nu > \omega' + \mu$. Dans le cas exceptionnel où le déterminant des équations (7.6.c) s'annule, il n'y pas de solution sauf si $\omega' = \omega''$ et $\mu = \nu$ et alors elle n'est pas bien définie. Nous reviendrons à ce cas. Les autres possibilités sont donc:

$$\omega'' + \nu > \omega' + \mu, \quad \mu \leq \nu, \tag{7.8a}$$
$$\omega' + \mu > \omega'' + \nu, \quad \nu \leq \mu, \tag{7.8b}$$
$$\omega'' + \nu > \omega' + \mu, \quad \nu < \mu, \tag{7.8c}$$
$$\omega' + \mu > \omega'' + \nu, \quad \mu < \nu. \tag{7.8d}$$

Dans chacun des cas nous comptons le nombre de solutions de nos équations ou plutôt le nombre de possibilités pour $a(p_1)$, $a(p_{\underline{1}})$, et $a(p_1 + p_{\underline{1}})$ sans nous occuper trop des termes d'ordre plus élévé. Par symétrie le cas (7.5.b) est compris dans le cas (7.5.a). Encore par symétrie, mais une autre, il suffit de ne considérer dans les quatre cas (7.5.a), (7.5.b) (7.5.c) et (7.5.d) que (7.8.a) et (7.8.d). On suppose alors par la suite qu'une de ces deux inégalités, qui sont celles de la remarque qui suit (7.4), est satisfaite! Dans le cas (7.8.d) les conditions (7.4) sont satisfaites. Elles ne le sont pas dans le cas (7.8.a). Observons de plus que les quantités qui figurent dans les inégalités de (7.8) sont des données, tandis que celles de (7.5) sont libres, de sorte que chacune des quatre possibilités envisagées doit être considérée.

Avant de traiter ces cas, nous comptons les autres solutions, celles pour lesquelles $p_1 \equiv 0$ ou $p_{\underline{1}} \equiv 0$. Si $p_1 \equiv 0$, l'équation pour $p_{\underline{1}}$ devient

$$\Delta B p_{\underline{1}} = \Big(\frac{p_{\underline{1}}}{p_{\underline{1}}+1}\Big)^{\omega'+\mu}$$

dont il y a $\omega' + \mu$ solutions. Si $p_{\underline{1}} \equiv 0$ on obtient une équation semblable, mais alors en comptant les solutions il faut écarter celle telle que $p_1 \equiv 0$. Donc on n'en obtient que $\omega'' + \nu - 1$. Au total on obtient $\omega' + \mu + \omega'' + \nu - 1$.

Commençons maintenant avec (7.5.a). On a déjà observé que les égalités (7.6.a) ne sont pas compatibles avec les inégalités de (7.8.d). Nous supposons par conséquent que les inégalités (7.8.a) sont satisfaites. Les équations pour $a(p_1)$ et $a(p_{\underline{1}})$ sont

$$\begin{aligned} Aa(p_1) &= a(p_1)^{\omega''+\nu}, \\ Ba(p_{\underline{1}}) &= a(p_{\underline{1}})^{\omega'} a(p_1)^{\mu} \end{aligned}$$

Le nombre de solutions qui ne sont pas identiquement 0 de ces équations est évidemment $(\omega'-1)(\omega''+\nu-1)$. Pour cette équation comme pour les équations suivantes il est évident que les solutions sont distinctes.

Considérons ensuite les solutions de type (7.5.c). Elles n'existent que dans le cas (7.8.d), mais alors il faut ajouter le nombre de solutions de type (7.5.b) qui est $(\omega''-1)(\omega'+\mu-1)$. Dans le cas (7.5.c) les équations pour $a(p_1)$ et $a(p_1 + p_{\underline{1}})$ deviennent

$$\begin{aligned} Aa(p_1) &= a(p_1)^{\omega''} a(p_1+p_{\underline{1}})^{\nu}, \\ Ba(p_1) &= a(p_1)^{\omega'} a(p_1+p_{\underline{1}})^{\mu} \end{aligned}$$

dont le nombre de solutions non-zéro est

$$|(\omega''-1)\mu - (\omega'-1)\nu|.$$

Il résulte du commentaire suivant (7.4) que dans les deux cas on obtient au total

$$(\omega'-1)(\omega''-1+\nu) + (\omega'+\mu) + (\omega''+\nu) - 1 = \omega'\omega'' + \omega'\nu + \mu$$

solutions. Par conséquent les conditions $p_1^0 = p_{\underline{1}}^0 = 0$ ne donnent pas toutes les solutions cherchées.

Nous supposons toujours que $\mu \le \nu$ et considérons les solutions avec $p_1^0 = -1$, $p_{\underline{1}}^0 = 1$. Les équations pour les exposants sont

$$1 = -\omega''\alpha + \nu\gamma, \qquad 1 = \mu\gamma.$$

Donc $\gamma = 1/\mu$ et

$$\alpha = \frac{\nu/\mu - 1}{\omega''} \ge 0.$$

Le cas $\mu = \nu$ est exceptionnel. Si $\nu > \mu$ les équations pour $a(p_1)$ et u sont

$$\begin{aligned} -Aa(p_1)^{\omega''} &= (-1)^{\omega''} a(p_1+p_{\underline{1}})^{\nu}, \\ B &= (\frac{1}{2})^{\omega'} a(p_1+p_{\underline{1}})^{\mu} \end{aligned}$$

Il y a $\mu\omega''$ solutions de ces équations. On trouve d'abord $a(p_1+p_{\underline{1}})$ et ensuite $a(p_1)$. Sauf peut-être dans les cas exceptionnels, nous trouvons au total

$$\omega'\omega'' + \omega'\nu + \omega''\mu + \min\{\mu,\nu\}$$

solutions, précisément le nombre (7.3) escompté.

Si $\mu = \nu$ nous cherchons des solutions avec $p_1^0 \neq 0, \pm 1$. Alors $\gamma = 1/\mu$ et il s'agit de trouver les valeurs permises de $x = p_1^0 = -p_{\underline{1}}^0 = -\underline{x}$. Soit $u = a(p_1 + p_{\underline{1}})$. Les équations pertinentes sont

$$\begin{aligned} Ax &= \Big(\frac{x}{x+1}\Big)^{\omega''} u^{\nu}, \\ B\underline{x} &= \Big(\frac{\underline{x}}{\underline{x}+1}\Big)^{\omega'} u^{\mu}. \end{aligned}$$

En formant le quotient des deux équations on obtient une équation pour x car $x = -\underline{x}$. Supposons que $\omega'' > \omega'$. Alors

$$-\frac{A}{B} = x^{\omega''-\omega'} \frac{(x-1)^{\omega'}}{(x+1)^{\omega''}}.$$

Selon le prochain lemme cette équation a ω'' solutions distinctes. Après avoir trouvé x on résout les premières équations pour trouver μ valeurs de u. On trouve donc les $\omega''\mu$ solutions supplémentaires cherchées et ce, même si $\omega' = \omega''$.

Lemme 7.1 *Supposons que a_i, $1 \leq i \leq m$ et b_j, $1 \leq j \leq n$ sont des paramètres donnés mais que C est générique. Si $a_i \neq b_j$ pour tout i et j, alors l'équation*

$$C\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)^{\mu_i} = \prod_{j=1}^{n}(x-b_j)^{\nu_j} \tag{7.9}$$

n'a pas de solution multiple.

En effet chaque solution multiple satisfait à l'équation obtenue en prenant la dérivée logarithmique des deux côtés, donc à

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_i}{x-a_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\nu_j}{x-b_j}. \tag{7.10}$$

Cette équation a un nombre fini de solutions qui ne satisfont pas (7.9) si C et générique.

Il reste toujours le cas exceptionnel $\omega' + \mu = \omega'' + \nu$. Si $\mu < \nu$ et $p_1^0 = p_{\underline{1}}^0 = 0$, on a le cas (7.5.d). Pour $a(p_1)$ et $a(p_{\underline{1}})$ les équations sont

$$\begin{aligned} Aa(p_1) &= a(p_1)^{\omega''}(a(p_1) + a(p_{\underline{1}}))^{\nu}, \\ Ba(p_{\underline{1}}) &= a(p_{\underline{1}})^{\omega'}(a(p_1) + a(p_{\underline{1}}))^{\mu}. \end{aligned} \tag{7.11}$$

En divisant la première des équations par la seconde on obtient une équation pour $x = a(p_1)/a(p_{\underline{1}})$ de la forme $(1+x)^m x^n = C$ où $m = \nu - \mu$, $n = \omega'' - 1$ sont des entiers non-négatifs et C est générique. Selon le lemme 7.1 cette équation a $\nu - \mu + \omega'' - 1 = \omega' - 1$ solutions distinctes de sorte que (7.11) a $(\omega'' + \nu - 1)(\omega' - 1)$ solutions distinctes et différentes de 0. C'est le nombre déjà trouvé pour les cas non-exceptionnels. Puisque le nombre des solutions avec $p_1^0 = -1$, $p_{\underline{1}}^0 = 1$ ne change pas, il ne reste que le cas $\mu = \nu$ et $\omega' = \omega''$. Dans ce cas nous écartons arbitrairement la possibilité (7.6.c) et nous obtenons encore le nombre de solutions voulu.

C: $\omega' = \omega'' = \mathbf{1}$. Supposons enfin que $\omega' = \omega'' = 1$ mais que e soit arbitraire. La valeur de f est toujours 1. Il résulte immédiatement des premières équations (7.1) que si $p_i^0 + p_{\underline{1}}^0 \neq 0$ alors $p_i \equiv 0$.

Si $\nu = \mu(F)$ et les valeurs de $|A_i|$, $A_i \in E$, sont μ_i, on a

$$\chi(E,F,B) = \omega'(\nu+\omega'')^e + \omega''(\sum \mu_i)(\nu+\omega'')^{e-1} = (\nu+1)^e + \mu(E)(\nu+1)^{e-1}. \tag{7.12}$$

On a de plus pour une décomposition $E = E_1 \cup E_2$,

$$\begin{aligned} \chi(E_1, \emptyset, B) &= (\omega'')^{e_1} = 1, \\ \chi(E_2, F) &= \min\{\mu(E_2), \nu\}\nu^{e_2-1}, \\ \chi(E_1, \emptyset, B)\chi(E_2, F) &= (\omega'')^{e_1} \min\{\mu(E_2), \nu\}\nu^{e_2-1} = \min\{\mu(E_2), \nu\}\nu^{e_2-1}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Observons encore que $\chi(E_2, F) = 0$ si $e_2 = 0$ et que

$$\sum_{E=E_1\cup E_2} \mu(E_2)\nu^{e_1} = \sum_i \mu_i \sum_{i\notin E_1} \nu^{e_1} = \mu(E)(\nu+1)^{e-1} \tag{7.14}$$

est le second terme de (7.12), que nous remplaçons désormais par le côté gauche de (7.14).

Nous considérons d'abord les solutions avec $p_{\underline{1}} \equiv 0$. Puisque $\omega'' = 1$, l'équation pour p_i devient

$$A\Delta p_i = \Big(\frac{p_i}{p_i+1}\Big)^{\nu+1}.$$

Ces équations sont indépendantes et elles ont par conséquent $(\nu + 1)^e$ solutions dont quelques-unes auront $p_i \equiv 0$. De toute façon on a ici le premier terme de (7.12) de sorte qu'il ne reste qu'à couvrir (7.13) et (7.14).

Nous examinons ensuite les solutions avec $p_{\underline{1}}^0 = 0$ mais $p_{\underline{1}} \not\equiv 0$, et par conséquent tous les $p_i^0 = 0$. Soit E_2 un sous-ensemble de E. Nous cherchons les solutions telles que $p_i \equiv 0$ si et seulement si $i \in E_2$. Si le complément de E_2 est E_1 posons

$$p_i + p_{\underline{1}} = u_i\Delta^{\gamma_i} + \dots, \qquad i \in E_1.$$

On a $\gamma_i = 1/\nu$ pour tout $i \in E_1$. Soit $\beta = \alpha(p_{\underline{1}})$. De l'équation pour $p_{\underline{1}}$ résulte

$$1 = \sum_{i\in 2} \mu_i\beta + \sum_{i\in E_1} \mu_i/\nu,$$

et cette équation admet une solution positive en β si et seulement si

$$\sum_{i\in E_1} \mu_i < \nu. \tag{7.15}$$

Alors les équations pour les u_i et $\underline{a} = a(p_{\underline{1}})$ deviennent

$$\begin{aligned} A &= u_i^\nu, \qquad i \in E_1, \\ B &= \underline{a}^{\sum_{E_2}\mu_i} \prod_{E_1} u_i^{\mu_i} \end{aligned}$$

dont le nombre de solutions est

$$\nu^{e_1} \sum_{E_2} \mu_i = \nu^{e_1}\mu(E_2). \tag{7.14$'$}$$

L'expression (7.14′) n'est qu'un terme de (7.14). On a par conséquent trouvé assez de solutions pour couvrir tout terme de (7.14) attaché à une décomposition qui satisfait à (7.15).

Nous supposons ensuite que $p_{\underline{1}}^0 = -1$ de sorte que $E = E_1 \cup E_2$ et $p_i \equiv 0$, $i \in E_2$, $p_i^0 = 1$, $i \in E_1$. Plutôt que p_i ce sont les variables $p_i + p_{\underline{1}}$, $i \in E_1$, qui sont primaires. On a forcément $\gamma_i = 1/\nu$, $i \in E_1$. L'équation qui détermine $\beta = \alpha(p_{\underline{1}})$ est

$$1 = -\sum_{E_2} \mu_i\beta + \sum_{E_1} \mu_i/\nu,$$

qui admet une solution positive en β seulement si

$$\sum_{i\in E_1} \mu_i > \nu. \tag{7.15$'$}$$

Cette condition est à comparer avec celle de (7.15). Si elle est satisfaite l'équation pour $u_i = a(p_i + p_{\underline{1}})$ est

$$2A = u_i^\nu$$

et celle pour $\underline{a} = a(p_{\underline{1}})$ est alors

$$-B = \left(-\frac{1}{\underline{a}}\right)^{\mu(E_2)+1} \prod_{E_1} u_i^{\mu_i}.$$

Donc le nombre de solutions est $\nu^{e_1}(\mu(E_2)+1)$, ce qui est la somme de

$$\nu^{e_1}\mu(E_2). \tag{7.14$''$}$$

et de

$$\nu^{e_1}. \tag{7.13$'$}$$

. En particulier il en résulte qu'il ne manque à (7.14) que les termes pour lesquels

$$\sum_{i\in E_1} \mu_i = \nu, \tag{7.15$''$}$$

car (7.14$''$) donne les termes voulus lorsque (7.15$'$) est satisfait et (7.14$'$) couvre les autres. Nous revenons au cas (7.15$''$) à la toute fin. Observons tout de suite que l'expression (7.13$'$) est égale à (7.13) lorsque (7.15$'$) est valable.

Nous cherchons enfin des solutions avec $p_{\underline{1}}^0 = 1$. Nous supposons encore que $p_i \equiv 0$, $i \in E_2$ et que les variables $p_i + p_{\underline{1}}$ sont primaires pour $i \in E_1$. Soient $\alpha_i = \alpha(P_i)$. Nous répartissons E_1 en quatre sous-ensembles

$$\begin{aligned} E_1^1 :& \qquad \gamma_i > \alpha_i = \beta, \\ E_1^2 :& \qquad \alpha_i > \gamma_i = \beta, \\ E_1^3 :& \qquad \beta > \alpha_i = \gamma_i, \\ E_1^4 :& \qquad \alpha_i = \gamma_i = \beta. \end{aligned}$$

Pour $i \in E_1^1$ on a

$$1 = -\beta + \nu\gamma_i, \qquad \gamma_i = \frac{1+\beta}{\nu}.$$

Puisque γ_i est censé être plus grand que β, on exige que

$$\frac{1+\beta}{\nu} > \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 > (\nu-1)\beta.$$

Pour $i \in E_1^2$,

$$1 = -\alpha_i + \nu\beta, \qquad \alpha_i = \nu\beta - 1 \quad \Rightarrow \quad (\nu-1)\beta > 1.$$

Il en résulte qu'un des deux ensembles E_1^1 et E_1^2 est vide. Pour $i \in E_1^3$,

$$1 = -\alpha_i + \nu\alpha_i, \qquad \alpha_i = 1/(\nu-1) \quad \Rightarrow (\nu-1)\beta > 1.$$

Si E_1^4 n'est pas vide alors $(\nu-1)\beta = 1$.

Supposons d'abord que E_1^1 n'est pas vide de sorte que les autres sous-ensembles le sont. L'équation pour β est

$$1 = \sum_{E_1} \mu_i \frac{1+\beta}{\nu}$$

qui a une solution positive seulement si

$$\nu > \sum_{E_1} \mu_i = \mu(E_1). \tag{7.15'''}$$

Pour que $1 > (\nu - 1)\beta$ il faut que

$$1 > (\nu - 1)\frac{\nu - \mu(E_1)}{\mu(E_1)}$$

ce qui n'est pas possible car $(\nu - 1)/\mu(E_1) \geq 1$ et $(\nu - \mu(E_1))$ est un entier positif.

Supposons ensuite que $E_1 = E_1^2 \cup E_1^3$. L'équation pour β est

$$1 = \sum_{E_1^2} \mu_i \beta + \sum_{E_1^3} \mu_i/(\nu - 1).$$

Pour que cette équation admette une solution positive, il faut d'abord que

$$1 > \mu(E_1^3)/(\nu - 1). \tag{7.16}$$

De plus pour que $(\nu - 1)\beta > 1$, il faut que

$$(\nu - 1 - \mu(E_1^3))/\mu(E_1^2) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \nu - 1 > \mu(E_1).$$

Cette dernière inégalité implique (7.16).

Si elle est satisfaite, les équations pour les $a_i = a(p_i)$, $i \in E_1^2$ et $a_i = a(p_i)$, $i \in E_1^3$ sont

$$\begin{aligned} -A &= -\frac{1}{a_i}\underline{a}^\nu, \qquad i \in E_1^2, \\ -A &= -\frac{1}{a_i}a_i^\nu, \qquad i \in E_1^3, \\ B &= (\frac{1}{2})^{1+\mu(E_2)}\underline{a}^{\mu(E_1^2)} \prod_{E_1^3} a_i^{\mu_i}. \end{aligned}$$

Les deuxièmes équations admettent chacune $\nu - 1$ solutions distinctes en a_i. La dernière donne ensuite $\mu(E_1^2)$ valeurs pour $\underline{a}$. Les premières équations nous permettent enfin de trouver à tour de rôle chaque a_i, $i \in E_i^2$.

Donc si $\nu - 1 > \mu(E_1)$ on a

$$\sum_{E_1^2 \cup E_1^3 = E_1} \mu(E_1^2)(\nu - 1)^{e_1^3} = \mu(E_1)\nu^{e_1 - 1} \tag{7.13''}$$

où l'égalité résulte de (7.14). Cette expression est (7.13) lorsque (7.15''') est satisfait.

Supposons enfin que $\nu - 1 = \mu(E_1)$. Alors $E_1 = E_1^4$ et les équations pour a_i et $\underline{a}$ sont

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a_i}(a_i + \underline{a})^\nu, \\ B &= \frac{1}{2}\prod_{j \in E_1}(a_j + \underline{a})^{\mu_j}. \end{aligned}$$

Il s'avère que ces équations admettent $\nu^{e_1-1}\mu(E_1)$ solutions.

Pour $e_1 = 1$ c'est évident car alors on trouve d'abord $a_1 + \underline{a}$ et ensuite a_1. En général nous divisons les premières équations par la dernière pour obtenir des équations pour $v_i = a_i/\underline{a}$

$$\frac{A}{2B}\prod_{j\in E_1}(v_j+1)^{\mu_j} = \frac{(v_i+1)^\nu}{v_i}. \tag{7.17}$$

Une équation plus facile à traiter est

$$\frac{A}{2B}\prod_{j\in E_1}(v_j+1)^{\mu_j} = (v_i+1)^\nu. \tag{7.18}$$

Pour la résoudre nous posons

$$v_i + 1 = \epsilon_i w$$

où w ne dépend pas de i et $\epsilon_i^\nu = 1$. Il faut donc que

$$\frac{A}{2B}\prod_{j\in E_1}\epsilon_j^{\mu_j} = w,$$

une équation qui sert à fixer w. Il y a ν^{e_1} choix pour les ϵ_i. Mais si $\epsilon^\nu = 1$ on peut remplacer chaque ϵ_i par $\epsilon\epsilon_i$ et w par $\epsilon^{-1}w$. Cela nous donne ν^{e_1-1} possibilités, mais ensuite il faut trouver $\underline{a}$ à partir de l'équation

$$2B = \underline{a}^{\mu(E_1)}\prod_{j\in E_1}(v_i+1)^{\mu_j}. \tag{7.19}$$

Cette équation a $\mu(E_1)$ solutions.

Les deux systèmes d'équations (7.17) et (7.18) sont deux éléments d'une famille définie par

$$\frac{A}{2B}(\alpha+\beta v_i)\prod_{j\in E_1}(v_j+1)^{\mu_j} = (v_i+1)^\nu \tag{7.20}$$

auxquelles on ajoute (7.19). Puisque le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} \nu-\mu_1 & -\mu_2 & \dots & -\mu_r \\ -\mu_1 & \nu-\mu_2 & \dots & -\mu_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\mu_r \\ -\mu_1 & -\mu_2 & \dots & \nu-\mu_r \end{pmatrix}$$

n'est pas nul, les ν^{e_1-1} solutions de (7.18) admettent des déformations autour de $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Une solution v_i de l'équation

$$\lambda v_i = (v_i+1)^\nu \tag{7.21}$$

n'est une solution multiple que si $v_i + 1 = \nu v_i$, et alors λ et v_i sont des nombres rationnels. Le λ qui est pertinent pour (7.17) est

$$\lambda = \frac{A}{2B}\prod_{j\in E_1}(v_j+1)^{\mu_j}.$$

Si ce λ est rationnel et si le système (7.17) est satisfait alors tous les v_i sont algébriques et par conséquent $A/2B$ est algébrique et appartient même a un corps de nombres que l'on peut déterminer. Puisque $A/2B$ est supposé être générique ceci est exclu.

Supposons maintenant que nous commençons avec la collection de solutions de (7.18) et (7.19) que nous avons trouvées et que nous les déformons tout en évitant les valeurs de

$$\lambda = \frac{A}{2B}(\alpha + \beta v_i) \prod_{j \in E_1} (v_j + 1)^{\mu_j}$$

où (7.21) a des solutions multiples. Cela est possible (par des principes généraux) sur une courbe qui va de $\alpha = 1$, $\beta = 0$ à $\alpha = 0$, $\beta = 1$ car elle n'a de solution multiple ni au point de départ ni au point final. Il en résulte que si deux solutions arrivent à des solutions avec les mêmes valeurs pour toutes les variables v_i alors elles commencaient avec les mêmes valeurs de v_i. Il résulte alors de (7.19) que le quotient des valeurs de $\underline{a}$ pour les deux solutions reste constant pendant la déformation. En particulier s'il est 1 à la fin, il est 1 au début et nous avons trouvé $\nu^{e_1 - 1}\mu(E_1)$ solutions distinctes de (7.17-7.19) en déformant celles de (7.18-7.19).

Il ne nous reste qu'à traiter le cas (7.15$''$). Si $\mu(E_1) = \nu$, nous cherchons des solutions telles que $p^0_{\underline{1}}$ n'est ni 0 ni ± 1. Les équations pour $x_i = p^0_i$ et $\underline{x} = p^0_{\underline{1}}$ et $u_i = p_i + p_{\underline{1}}$ sont

$$\begin{aligned} x_i &= -\underline{x}, \\ Ax_i &= \frac{x_i}{x_i + 1}\Big(\frac{u_i}{u_i + 1}\Big)^{\nu}, \\ B\underline{x} &= \Big(\frac{\underline{x}}{\underline{x} + 1}\Big)^{\mu(E_2)+1} \prod_{E_1} \Big(\frac{u_i}{u_i + 1}\Big)^{\mu_i}. \end{aligned} \tag{7.22}$$

On résout les secondes équations pour trouver u_i en fonction de $\underline{x}$ pour obtenir enfin l'équation

$$B(\underline{x} + 1) = \Big(\frac{\underline{x}}{\underline{x} + 1}\Big)^{\mu(E_2)} \prod_{E_1} (A(1 - \underline{x}))^{\mu_i/\nu},$$

ou

$$B(\underline{x} + 1) = cA(1 - \underline{x})\Big(\frac{\underline{x}}{\underline{x} + 1}\Big)^{\mu(E_2)}. \tag{7.23}$$

La constante c dépend des racines choisies en résolvant les premières équations. Puisque A et B sont génériques, il y a $\mu(E_2) + 1$ solutions distinctes de (7.23). Le nombre de solutions de (7.22) est donc $\nu^{e_1}(\mu(E_2) + 1)$. Cette expression est la somme de ν^{e_1} qui est (13) et $\nu^{e_1}\mu(E_2)$ qui est la contribution pertinente à (14).

8. Derniers commentaires.

Quoique nous ne soyons pas en état de traiter le cas général dans cet exposé, nous voulons tirer quelques conséquences des exemples. Le numérateur et le dénominateur de $S(p_i + p_{\underline{j}})$ ne sont 0 que si $p_i + p_{\underline{j}}$ est 0 ou -1. Nous répartissons par conséquent les indices en classes, deux indices i et i' (ou $\underline{j}$ et $\underline{j}'$) étant dans la même classe si la différence $p_i - p_{i'}$ est un entier. Par contre i et $\underline{j}$ sont dans la même classe si $p_i + p_{\underline{j}}$ est un entier. Les équations pour les exposants $\alpha(p_i)$ et $\alpha(p_{\underline{j}})$ découple car $\alpha(p_i + p_{\underline{j}})$ et $\alpha(p_i + p_{\underline{j}} + 1)$ sont 0 si i et $\underline{j}$ n'appartiennent pas à la même classe. La classe attachée aux entiers, donc la classe à laquelle 0 appartient s'il se trouve parmi les p_i et $p_{\underline{j}}$, contient tous les i tels que $p_i \equiv 0$ et tous les $\underline{j}$ tels que $p_{\underline{j}} \equiv 0$.

Nous avons trouvé dans les exemples que $\alpha(p_i)$ ne dépend que de p^0_i et que $\alpha(p_{\underline{j}})$ ne dépend que de $p^0_{\underline{j}}$. Nous ne savons pas si il s'agit ici d'un fait général, mais une telle hypothèse est certainement raisonnable.

Examinons les conséquences de cette hypothèse pour les exposants. Une classe Q correspond à une suite $q_k = q + k$, $K_1 \le k \le K_2$. Soit P_k l'ensemble d'indices i tels que $p_i = q - k$ mais $p_i \not\equiv 0$ et $\underline{P}_k$ l'ensemble d'indices $\underline{j}$ tels que $p_{\underline{j}} = -q + k$ mais $p_{\underline{j}} \not\equiv 0$. Soit R l'ensemble d'indices tels que $p_i \equiv 0$ et $\underline{R}$ l'ensemble tels que $p_{\underline{j}} \equiv 0$. Soit $r = |R|$ et $\underline{r} = |\underline{R}|$. En changeant q au besoin nous pouvons supposer que $K_1 = 0$. Posons alors $K = K_2$.

Supposons d'abord que q n'est pas un entier. Alors $p_i^0 \neq 0$ et $p_{\underline{j}}^0 \neq 0$ pour tout i et $\underline{j}$ dans Q. Soit $M_k = \sum_{i \in P_k} \mu_i$ et $N_k = \sum_{\underline{j} \in P_k} \nu_{\underline{j}}$. Supposons que $\alpha(p_i + p_{\underline{j}})$ est égal à γ_k pour tout $i \in P_k$ et $\underline{j} \in \underline{P}_k$ tandis que $\alpha(p_i + p_{\underline{j}} + 1) = \delta_k$ pour tout $i \in P_k$ et tout $\underline{j} \in \underline{P}_{k-1}$. Les équations sont

$$\begin{aligned}
1 &= N_k\gamma_k, && k = 0,\\
1 &= -N_{k-1}\delta_k + N_k\gamma_k, && 0 < k \leq K,\\
1 &= M_k\gamma_k - M_{k+1}\delta_{k+1}, && 0 \leq k < K,\\
1 &= M_k\gamma_k, && k = K.
\end{aligned} \tag{8.1}$$

Il y a $2K + 2$ équations et $2K + 1$ inconnues car δ_0 n'est pas défini.

La solution est

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 1/N_0,\\
\delta_1 &= (M_0\gamma_0 - 1)/M_1 = (M_0 - N_0)/M_1N_0,\\
\gamma_1 &= (1 + N_0\delta_1)/N_1 = (M_0 + M_1 - N_0)/M_1N_1,\\
\delta_k &= (M_0 + \ldots + M_{k-1} - N_0 - \ldots - N_{k-1})/M_kN_{k-1}, && 0 < k \leq K,\\
\gamma_k &= (M_0 + \ldots + M_k - N_0 - \ldots - N_{k-1})/M_kN_k, && 0 \leq k \leq K,\\
\gamma_K &= 1/M_k.
\end{aligned}$$

En comparant les deux expressions pour γ_K nous concluons qu'il y a une solution si et seulement si $\sum_k M_k = \sum_k N_k$, ce qui correspond aux résultats des exemples.

Supposons maintenant que $q + k = 0$ pour $K_1 \leq K_2$. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que $q = 0$. Les équations (8.1) se modifient légèrement. Supposons que $\alpha(p_i) = \alpha$ pour $i \in P_0$ et que $\alpha(p_{\underline{j}}) = \beta$ pour $\underline{j} \in \underline{P}_0$. Pour $k \neq 0$ on a toujours

$$\begin{aligned}
1 &= N_k\gamma_k, && k = K_1,\\
1 &= -N_{k-1}\delta_k + N_k\gamma_k, && K_1 < k \leq K_2,\\
1 &= M_k\gamma_k - M_{k+1}\delta_{k+1}, && K_1 \leq k < K_2,\\
1 &= M_k\gamma_k, && k = K_2.
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Mais pour $k = 0$ il faut tenir compte des éléments de R et $\underline{R}$,

$$\begin{aligned}
1 + \alpha &= N\alpha - N_{-1}\delta_0 + N_0\gamma_0,\\
1 + \beta &= M\beta + M_0\gamma_0 - M_1\delta_1,
\end{aligned}$$

où $N = \sum_{\underline{j} \in \underline{R}} \nu_{\underline{j}}$ et $M = \sum_{i \in R} \mu_i$. Si $K_1 = 0$ posons $N_{-1} = 0$ et si $K_2 = 0$ posons $M_1 = 0$. Il y a maintenant plus d'inconnues que d'équations mais il y a des conditions supplémentaires car une des conditions suivantes est satisfaite:

(1) $\alpha = \beta < \gamma_0$;

(2) $\alpha = \gamma_0 < \beta$;

(3) $\beta = \gamma_0 < \alpha$;

(4) $\alpha = \beta = \gamma_0$.

Avec ces conditions le nombre d'inconnues devient égal au nombre d'équations. Nous avons vu qu'il est même nécessaire de permettre des combinaisons de ces conditions en divisant P_0 et $\underline{P}_0$ en sous-ensembles.

Les arguments combinatoires qui permettent de traiter tous les cas d'une manière uniforme et de montrer que les conclusions des exemples sont toujours valables restent à faire! Il s'agit certainement d'un problème séduisant pour un mathématicien mais dont la pertinence pour l'étude du problème de départ, le calcul des valeurs propres d'une matrice, n'est point évidente.

Appendice 1

Les équations de Bethe peuvent être définies à partir de deux applications rationnelles $\varphi = \varphi_\Delta$ et $\psi = \psi_\Delta$ d'une variété X dans elle-même. Cette variété est un produit de droites projectives,

$$X = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}^1 \times \prod_{1 \le i < j \le r} \mathbb{P}^1 = Z \times W.$$

Les coordonnées sont z_i, $1 \le i \le r$, et $w_{i,j}$, $1 \le i < j \le r$. Bien qu'elles soient superflues, nous utiliserons également les coordonnées $w_{i,j} = w_{j,i}^{-1}$ pour $i > j$.

L'application φ est définie par $\varphi : (z,w) \to (z',w')$ où $z_i' = R(z_i)$ et $w_{i,j}' = w_{i,j}$ alors que l'application ψ l'est par $\psi : (z,w) \to (z'',w'')$ où

$$z_i'' = \prod_{j \ne i} w_{i,j} \tag{A.1}$$

et

$$w_{i,j}'' = Q(z_i, z_j) = -F(z_i, z_j)/F(z_j, z_i), \tag{A.2}$$

avec $F(z,z') = F_\Delta(z,z') = zz' - 2\Delta z + 1$. Les solutions de l'équation de Bethe sont les points (z,w) tels que

$$(z',w') = (z'',w'').$$

Cependant, pour appliquer la formule de Lefschetz, on a besoin d'une correspondence

$$(\varphi, \psi) : C \to X \times X$$

définie par des applications régulières partout. Il est claire que l'application ψ n'est pas bien définie aux points où $F(z_i,z_j) = F(z_j,z_i) = 0$.

Nous reviendrons aux éclatements nécessaires pour qu'elle le soit. Puisqu'il faut dénombrer non seulement l'ensemble de toutes les solutions des équations de Bethe mais également le sous-ensemble des solutions inadmissibles pour ensuite prendre la différence, nous introduisons d'abord des sous-variétés $X^{A,B}$ de X et des correspondances (encore mal définies) sur ces sous-variétés. Soit $\{1,\dots,r\}$ la réunion disjointe de sous-ensembles $A_1,\dots,A_s$, $B_1',\dots,B_t'$, et $B_1'',\dots,B_t''$. Soit $B_l = B_l' \cup B_l''$. Nous exigeons que tous les A_l, B_l' et B_l'' soient non-vides. A chaque l est attaché un entier $k = k(l)$, $1 \le k \le N$. Nous posons $i \equiv j$ si i et j appartiennent au même A_l, ou si $i \in B_l'$ et $j \in B_m'$ avec $k(l) = k(m)$ ou enfin $i \in B_l''$ et $j \in B_m''$ avec encore $k(l) = k(m)$. Parfois, pour être plus clairs, nous écrivons $i \equiv j(A,B)$, où

$$A = \{A_1,\dots,A_s\}, \quad B' = \{B_1',\dots,B_t'\}, \quad B'' = \{B_1'',\dots,B_t''\}, \quad B = \{B', B''\}.$$

Soit $X^{A,B}$ la sous-variété de X définie par les conditions:

(1) $z_i = z_j$ et $w_{i,m} = w_{j,m}$ si $i \equiv j$;
(2) si $i \equiv j$ alors $w_{i,j} = -1$;
(3) si $i \in B_l'$ alors $z_i = 0$;
(4) si $i \in B_l''$ alors $z_i = \infty$;
(5) si $i \in B_{l'}'$ et $j \in B_{l''}''$ avec $k(l') = k(l'')$ alors $w_{i,j} = 0$ et $w_{j,i} = \infty$;
(6) supposons que $k' = k(l') \ne k(l'') = k''$ alors
  (a) $w_{i,j} = Q(\alpha_{k'}, \alpha_{k''})$ pour $i \in B_{l'}'$ et $j \in B_{l''}'$,
  (b) $w_{i,j} = Q(\alpha_{k'}, \beta_{k''})$ pour $i \in B_{l'}'$ et $j \in B_{l''}''$,
  (c) $w_{i,j} = Q(\beta_{k'}, \beta_{k''})$ pour $i \in B_{l'}''$ et $j \in B_{l''}''$,
  (d) $w_{i,j} = Q(\beta_{k'}, \alpha_{k''})$ pour $i \in B_{l'}''$ et $j \in B_{l''}'$.

On observe que pour obtenir X lui-même il suffit de prendre $s = r$ (de sorte que $A = \{\{1\}, \ldots, \{r\}\}$) et $t = 0$. Nous utilisons plusieurs B'_l et B''_l avec le même $k = k(l)$ parce que cela simplifie les arguments combinatoires mais à maints égards il est plus utile de ne considérer que

$$\mathbb{B}'_k = \cup_{\{l|k(l)=k\}} B'_l, \qquad \mathbb{B}''_k = \cup_{\{l|k(l)=k\}} B''_l.$$

Soit $\mathbb{B}_k = \mathbb{B}'_k \cup \mathbb{B}''_k$. Il n'est pas exclu que $\mathbb{B}'_k$ ou $\mathbb{B}''_k$ soit vide mais alors tous les deux le sont.

La variété $C^{A,B}$ est définie par des conditions quelque peu différentes:

(1) $z_i = z_j$ et $w_{i,m} = w_{j,m}$ si $i \equiv j$;
(2) si $i \equiv j$ alors $w_{i,j} = -1$;
(3) si $i \in B'_l$ et $k = k(l)$ alors $z_i = \alpha_k$;
(4) si $i \in B''_l$ et $k = k(l)$ alors $z_i = \beta_k$;
(5) si $i \in B'_{l'}$ et $j \in B''_{l''}$ avec $k(l') = k(l'')$ alors $w_{i,j} = 0$ et $w_{j,i} = \infty$.
(6) supposons que $k' = k(l') \neq k(l'') = k''$ alors
    (a) $w_{i,j} = Q(\alpha_{k'}, \alpha_{k''})$ pour $i \in B'_{l'}$ et $j \in B'_{l''}$,
    (b) $w_{i,j} = Q(\alpha_{k'}, \beta_{k''})$ pour $i \in B'_{l'}$ et $j \in B''_{l''}$,
    (c) $w_{i,j} = Q(\beta_{k'}, \beta_{k''})$ pour $i \in B''_{l'}$ et $j \in B''_{l''}$,
    (d) $w_{i,j} = Q(\beta_{k'}, \alpha_{k''})$ pour $i \in B''_{l'}$ et $j \in B'_{l''}$.

La condition (5) sur la variété $C^{A,B}$ nous permet de définir l'application $\psi^{A,B}$ de sorte qu'elle l'envoie dans une sous-variété de X qui satisfait aux conditions (2) et (3) de la définition de $X^{A,B}$. Pour que $C^{A,B}$ soit de la même dimension que $X^{A,B}$ il faut que $X^{A,B}$ satisfasse à la même condition. Les conditions (6) sont facultatives. Nous les avons introduites simplement pour ne pas être encombrés par des coordonnées qui pourraient sembler arbitraires mais dont les valeurs aux points fixes sont prescrites.

Les deux variétés $X^{A,B}$ et $C^{A,B}$ sont des produits de deux variétés, celle avec les coordonnées z_i et celle avec les coordonnées $w_{i,j}$. La deuxième variété est la même dans les deux cas et sera dénotée $W^{A,B}$. Par contre les conditions sur les premières coordonnées sont différentes et on dénote le premier facteur de $X^{A,B}$ par $Z^{A,B}$ et le premier facteur de $C^{A,B}$ par $E^{A,B}$

L'ensemble des paires (A, B) est (partiellement) ordonné. La paire $(\tilde{A}, \tilde{B})$ est plus profonde (ou plus grossière) que (A, B) si chaque A_k est contenu dans un $\tilde{A}_{l'}$, un $\tilde{B}'_l$ ou un $\tilde{B}''_l$, chaque B'_l dans un $\tilde{B}'_{l'}$, et chaque B''_l dans un $\tilde{B}''_{l'}$. Si $(\tilde{A}, \tilde{B})$ est plus profond que (A, B) alors $C^{\tilde{A},\tilde{B}}$ est une sous-variété de $C^{A,B}$. En particulier si $s = r$ et $t = 0$ alors $C = X$ et toute variété $C^{A,B}$ est une sous-variété de X.

L'application φ envoie évidemment $C^{A,B}$ dans $X^{A,B}$ et devient

$$\varphi = \varphi^{A,B} = \varphi^{A,B}_{\Delta} : (z, w) \to (z', w')$$

avec

$$z'_i = R(z_i)|\, i \in A_k, \quad z'_i = 0|\, i \in B'_l, \quad z'_i = \infty|\, i \in B''_l,$$

et $w'_{i,j} = w_{i,j}$ pour tout i et j. Nous dénotons la restriction de φ à $C^{A,B}$ par $\varphi = \varphi^{A,B} = \varphi^{A,B}_{\Delta}$.

Pour définir l'application

$$\psi = \psi^{A,B} = \psi^{A,B}_{\Delta} : (z, w) \to (z'', w''),$$

nous posons d'abord $z''_i = 0$ s'il existe l tel que $i \in \mathbb{B}'_l$ et $z''_i = \infty$ s'il existe k tel que $i \in \mathbb{B}''_k$. Nous posons autrement

$$z''_i = \prod_{j \neq i} w_{i,j}.$$

De la même façon nous posons $w''_{i,j} = 0$ et $w''_{j,i} = \infty$ si $i \in \mathbb{B}'_k$ et $j \in \mathbb{B}''_k$ pour un certain k et $w''_{i,j} = -1$ si $i \equiv j$. Autrement nous définissons $w''_{i,j}$ par (A.2).

Dans le cas générique, qui exige en particulier que $\Delta \neq 0$, aucun α_i n'est un point fixe ni de l'application linéaire

$$(A.3) \qquad \alpha \to A(\alpha) = 2\Delta - \frac{1}{\alpha}$$

ni de son carré. Par conséquent si $i \in \mathbb{B}'_k$ et $j \in \mathbb{B}''_k$ alors $F(z_i, z_j) = 0$ mais $F(z_j, z_i) \neq 0$ pour $(z, w) \in C^{A,B}$. Donc $Q(z_i, z_j) = 0$ de sorte que l'application $\psi^{A,B}$ est la restriction de ψ à $C^{A,B}$.

Nous observons en particulier que si δ_1 et δ_2 sont les deux racines de $z^2 - 2\Delta z + 1 = 0$ alors δ_1 et δ_2 sont fixés par l'application (A.3). Sauf à $\Delta = \pm 1$ ces deux racines sont différentes. Dans le cas générique on a

$$R(\delta_i) \neq 0, \qquad i = 1, 2.$$

L'application linéaire (A.3) est définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 2\Delta & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $\exp(\pm\eta\sqrt{-1})$ si $\cos\eta = \Delta$. Si $\Delta = \pm 1$ l'application linéaire est parabolique de sorte qu'elle n'a pas de point d'ordre fini sauf le point fixe $\delta_1 = \delta_2$. Pour les autres valeurs de Δ cette application n'a pas de point d'ordre deux sauf si $\Delta = 0$, et alors tout point sauf δ_1 et δ_2 est d'ordre deux.

Si $\mathbb{B}_k$ n'est pas vide alors les applications

$$z \to \frac{F(z, \alpha_k)}{F(\alpha_k, z)}, \qquad z \to \frac{F(z, \beta_k)}{F(\beta_k, z)}$$

interviennent dans la définition de $\psi^{A,B}$. Elles sont des fonctions linéaires de z qui s'écrivent

$$(A.4) \qquad \frac{\alpha_k - 2\Delta}{\alpha_k}\frac{z - \gamma_k}{z - \beta_k}, \qquad \frac{\beta_k - 2\Delta}{\beta_k}\frac{z - \alpha_k}{z - \delta_k}$$

où $A(\gamma_k) = \alpha_k$ et $\delta_k = A(\beta_k)$. Donc pourvu que $\Delta \neq 0$ elles sont bien définies car $\gamma_k \neq \beta_k$ et $\alpha_k \neq \delta_k$. Pour les cas exceptionnels où $\alpha_k = 0$ ou $\beta_k = 0$ on remplace (A.4) par

$$-2\Delta(z - \beta_k), \qquad -2\Delta(z - \alpha_k).$$

Par contre si $\alpha_k - 2\Delta = 0$ ou $\beta_k - 2\Delta = 0$ on a

$$\frac{1}{\alpha_k}\frac{1}{z - \beta_k}, \qquad \frac{1}{\beta_k}\frac{1}{z - \delta_k}.$$

Ainsi, ce fonctions sont toujours de vraies fonctions linéaires et non pas simplement des constantes car le dénominateur et le numérateur ne peuvent pas s'annuler en même temps.

Puisque l'applications $\psi^{A,B}$ est mal définie il faut modifier la variété $C^{A,B} \times \mathbb{P}^1$ qui est une variété fibrée sur $\mathbb{P}^1$ en sorte que $\psi^{A,B} = \psi^{A,B}_\Delta$ soit bien défini sur les nouvelles fibres $C^{A,B}_\Delta$. Les problèmes proviennent principalement de deux sources. Parfois, pour un indice i qui n'est ni dans un $\mathbb{B}'_k$ ni dans un $\mathbb{B}''_k$, il y a des indices supplémentaires j et m tels que $w_{i,j} = 0$ et $w_{i,m} = \infty$. Alors la formule (A.1) n'a plus de sens. D'un autre côté il peut arriver que pour deux indices i et j on ait

$$(A.5) \qquad F(z_i, z_j) = F(z_j, z_i) = 0.$$

de sorte que le quotient dans (A.2) n'est pas défini. Autour de $\Delta = 0$ un troisième obstacle se présente parce que quelques-uns des quotients (A.4) peuvent ne pas être définis.

Nous remarquons tout d'abord que les modifications nécessaires pour enlever les premières difficultés ne font intervenir que les coordonnées $w_{i,j}$ tandis que les modifications pour les secondes n'impliquent que les coordonnées z_i et Δ. Cela nous permet de les traiter séparément et donc d'éclater les deux facteurs

$$W^{A,B} \subseteq W = \prod_{i<j} \mathbb{P}^1$$

et

$$E^{A,B} \times \mathbb{P}^1 \subseteq Z \times \mathbb{P}^1,$$

de $C^{A,B} \times \mathbb{P}^1$ et de prendre ensuite le produit des variétés ainsi obtenues. On se souvient qu'il y a des contraintes sur les coordonnées de $E^{A,B}$ et de $W^{A,B}$. Quelques-unes parmi ces coordonnées sont nécessairement égales. Les deux variétés $E^{A,B}$ et $W^{A,B}$ sont néanmoins aussi des produits d'espaces projectifs de dimension un. Les produits portent sur les coefficients qui ont des valeurs variables et à chaque famille de coordonnées égales (donc pour $E^{A,B}$ à chaque A_k) ne correspond qu'un seul facteur.

Nous avertissons le lecteur que la fibre au-dessus de $\Delta = \infty$ ne nous intéresse pas quoique nous examinerons de près son voisinage dans un autre papier. Nous avons inclus cette fibre par force d'habitude, pour ne pas sortir du cadre des variétés projectives.

Les modifications qui impliquent les coordonnées z_i servent des fins différentes que celles qui impliquent les coordonnées $w_{i,j}$. Les variétés données par les premières exigeront une étude locale soigneuse pour comprendre les multiplicités des points fixes. Par contre les variétés obtenues par les modifications des coordonnées $w_{i,j}$ sont plutôt abstraites et leur but est surtout de permettre l'utilisation rigoureuse de la formule de Lefschetz. Soit $\mathcal{C}^{A,B}$ la variété obtenue en modifiant les coordonnées z_i et en suivant ces modifications par celles des coordonnées $w_{i,j}$. Donc $\mathcal{C}^{A,B}$ s'obtient en modifiant d'abord $E^{A,B} \times \mathbb{P}^1$ pour obtenir $\mathcal{E}^{A,B}$ et en modifiant ensuite $W^{A,B}$ pour obtenir $\mathcal{W}^{A,B}$ et en posant enfin

$$\mathcal{C}^{A,B} = \mathcal{E}^{A,B} \times \mathcal{W}^{A,B}. \tag{A.6}$$

Soit π_1 et π_2 les compositions de

$$\mathcal{C}^{A,B} \to C^{A,B} \times \mathbb{P}^1$$

avec les deux projections $C^{A,B} \times \mathbb{P}^1 \to C^{A,B}$ et $C^{A,B} \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$. Nous dénotons la fibre de π_2 au-dessus du point Δ par $C_\Delta = C_\Delta^{A,B}$.

On aura

Lemme A.1 *L'application π_2 est lisse sur les fibres génériques.*

En particulier la variété $C_\Delta^{A,B}$ est lisse pour des valeurs génériques de Δ.

Soit $E_\Delta^{A,B}$ la fibre de $\mathcal{E}^{A,B}$ au-dessus de Δ. Les définitions seront telles que

$$\mathcal{E}^{\tilde{A},\tilde{B}} \subseteq \mathcal{E}^{A,B}, \qquad E_\Delta^{\tilde{A},\tilde{B}} \subseteq E_\Delta^{A,B}$$

si $(\tilde{A},\tilde{B})$ est plus profond que (A,B). La relation entre $\mathcal{C}^{\tilde{A},\tilde{B}}$ et $\mathcal{C}^{A,B}$ sera par contre plus compliquée. Il existera une sous-variété $\mathcal{C}^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$ de $\mathcal{C}^{A,B}$ pourvue d'une application

$$\eta : \mathcal{C}^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B}) \to \mathcal{C}^{\tilde{A},\tilde{B}} \tag{A.7}$$

mais cette sous-variété n'est pas toujours lisse et l'application η n'est pas toujours un isomorphisme. Elle est toutefois surjective. Soit

$$C_\Delta^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$$

la fibre de $\mathcal{C}^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$ au point Δ. La restriction de η à la fibre sera aussi dénotée η. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} C_{\Delta}^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B}) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\varphi_{\Delta}^{A,B}\times\psi_{\Delta}^{A,B}"'] & C_{\Delta}^{\tilde{A},\tilde{B}} \arrow[d, "\varphi_{\Delta}^{\tilde{A},\tilde{B}}\times\psi_{\Delta}^{\tilde{A},\tilde{B}}"] \\ X^{A,B}\times X^{A,B} & X^{\tilde{A},\tilde{B}}\times X^{\tilde{A},\tilde{B}} \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{A.8}$$

sera commutatif.

Bien qu'il existe sans doute des références utiles pour la construction simple qui résolvent les difficultés qui proviennent des points où (A.5) est satifait pour une paire (i,j), nous ne les avons pas trouvées. Notre discussion n'en sera pas moins aussi brève que possible. La nouvelle variété $\mathcal{E}^{A,B}$ sera définie en ajoutant des coordonnées supplémentaires à Δ et aux z_i. Pour chaque paire (i,j) (telle que $i<j$) nous ajoutons des coordonnées projectives $(u_{i,j},u_{j,i})$ qu'on choisit habituellement tel qu'une des deux coordonnées $u_{i,j}$ et $u_{j,i}$ est égale à 1. On introduit en plus des relations

$$u_{i,j}F(z_j,z_i)=u_{j,i}F(z_i,z_j) \tag{A.9}$$

et des coordonnées $\lambda_{i,j}=\lambda_{j,i}$ supplémentaires telles que

$$F(z_i,z_j)=\lambda_{i,j}u_{i,j},\qquad F(z_j,z_i)=\lambda_{j,i}u_{j,i}.$$

Par exemple, autour d'un point où $z_j=\infty$ il convient d'utiliser plutôt la coordonnée $\tilde{z}_j=-1/z_j$ de sorte que $F(z_i,z_j)$ est remplacée par $F(z_i,\tilde{z}_j)=z_i+2\Delta z_i\tilde{z}_j-\tilde{z}_j$ et $F(z_j,z_i)$ par $F(\tilde{z}_j,z_i)=z_i-2\Delta-\tilde{z}_j$. L'équation (A.9) devient

$$u_{i,j}F(\tilde{z}_j,z_i)=u_{j,i}F(z_i,\tilde{z}_j).$$

Soulignons qu'en un point où $F(z_i,z_j)\neq 0$ ou $F(z_j,z_i)\neq 0$ l'équation (A.9) nous permet d'exprimer le point projectif $(u_{i,j},u_{j,i})$ en termes des z. Donc pour cette paire (i,j), ces nouvelles coordonnées sont alors superflues. En particulier si $i\in\mathbb{B}'_k$ et $j\in\mathbb{B}''_k$ on a $(u_{i,j},u_{j,i})=(0,1)$.

Pour que les quotients (A.4) soient toujours définis il faut ajouter des coordonnées projectives $(p'_{i,k},q'_{i,k})$ et $(p''_{i,k},q''_{i,k})$ aussi bien que $\xi'_{i,k}$ et $\xi''_{i,k}$ telles que

$$z_i-\gamma_k=\xi'_{i,k}p'_{i,k},\quad z_i-\beta_k=\xi'_{i,k}q'_{i,k},\qquad z_i-\alpha_k=\xi''_{i,k}p''_{i,k},\quad z_i-\delta_k=\xi''_{i,k}q''_{i,k}.$$

Ces coordonnées sont toutes superflues sauf à $\Delta=0$. Evidemment on suppose comme condition de généricité que ni α_k ni β_k n'est égal à 0 en $\Delta=0$.

Les relations (A.9) ne sont pas les seules auxquelles sont assujetties les nouvelles coordonnées. Soient $\{(i_1,j_1),\dots,(i_M,j_M)\}$ un ensemble de paires fixées. Supposons que localement on ait des fonctions régulières

$$g_{i'_1,j'_1,\dots,i'_M,j'_M}$$

définies pour (i'_m,j'_m) égal à (i_m,j_m) ou à (j_m,i_m) et une équation multi-homogène

$$\sum_{\{(i_1,j_1),(j_1,i_1)\}}\cdots\sum_{\{(i_M,j_M),(j_M,i_M)\}} g_{i'_1,j'_1,\dots,i'_M,j'_M}F(z_{i'_1},z_{j'_1})\dots F(z_{i'_M},z_{j'_M})=0. \tag{A.10}$$

Alors

$$\sum_{\{(i_1,j_1),(j_1,i_1)\}}\cdots\sum_{\{(i_M,j_M),(j_M,i_M)\}} g_{i'_1,j'_1,\dots,i'_M,j'_M}u_{i'_1,j'_1}\dots u_{i'_M,j'_M}=0. \tag{A.11}$$

Il y a des conditions semblables dans lesquelles interviennent en plus les coordonnées $p'_{i,k}$, $q'_{i,k}$, $p''_{i,k}$, $q''_{i,k}$. En particulier, si $i\in\mathbb{B}'_k$, de la relation $z_i-\alpha_k=0$ résulte $p''_{i,k}=0$ et si $i\in\mathbb{B}''_k$, on a $q'_{i,k}=0$. De plus si i et j sont dans le même A_l, les égalités évidentes entre ces coordonnées supplémentaires doivent alors être satisfaites.

Les définitions sont évidemment telles que si $(\tilde{A}, \tilde{B})$ est plus profond que (A, B) alors $\mathcal{E}^{\tilde{A},\tilde{B}}$ est une sous-variété de $\mathcal{E}^{A,B}$ car les éclatements que nous venons de décrire sont définis d'une façon cohérente. Les nouvelles coordonnées sont les mêmes pour les deux variétés, mais pour la paire plus profonde elles sont assujetties à plus de contraintes. Par conséquent la nouvelle variété attachée à une paire $(\tilde{A}, \tilde{B})$ plus profonde que (A, B) est trivialement une sous-variété de celle attachée à (A, B). Par exemple, si $i \equiv i'$ alors

$$F(z_i, z_j)F(z_j, z_{i'}) = F(z_{i'}, z_j)F(z_j, z_i).$$

Il en résulte que $(u_{i,j}, u_{j,i})$ et $(u_{i',j}, u_{j,i'})$ définissent le même point projectif et donc qu'un des deux points est superflu.

On remarque aussi que dans le cas où z_i est égal à ∞, de sorte que la coordonnée convenable est $\tilde{z}_i$, on remplace $F(z_i, z_j)$ par $F(\tilde{z}_i, z_j) = z_j + 2\Delta - \tilde{z}_i$ ou même $F(\tilde{z}_i, \tilde{z}_j) = 1 - 2\Delta\tilde{z}_j + \tilde{z}_i\tilde{z}_j$ et $F(z_j, z_i)$ par $F(z_j, \tilde{z}_i) = z_j + 2\Delta\tilde{z}_i z_j - \tilde{z}_i$ ou $F(\tilde{z}_j, \tilde{z}_i) = 1 - 2\Delta\tilde{z}_i + \tilde{z}_i\tilde{z}_j$. Il s'agit de changements faciles dont on tiendra compte aux endroits appropriés. Il y a une ambiguïté malencontreuse dans cette notation dont le lecteur est prié de se rendre compte. Lorsque un tilde apparaît parmi les arguments de la fonction F, la fonction elle-même se modifie.

Puisque l'application π_2 du lemme A.1 est définie à partir d'une application de $\mathcal{E}^{A,B}$ dans $\mathbb{P}^1$ la démonstration du lemme remonte au lemme suivant, dont l'énoncé anticipe la définition des variétés $\mathcal{W}^{A,B}$. Nous la donnerons par la suite.

Lemme A.2 *Les fibres de l'application $\mathcal{E}^{A,B} \to \mathbb{P}^1$ sont lisses sauf en $\Delta = 0, \pm1, \infty$; et les variétés $\mathcal{W}^{A,B}$ sont lisses.*

Supposons que Δ n'appartienne pas à $\{0, \pm1, \infty\}$. On peut remplacer les coordonnées projectives $(u_{i,j}, u_{j,i})$, $i < j$, par $(x_{i,j}, y_{i,j})$ avec

$$x_{i,j} = (u_{j,i} - u_{i,j})/2\Delta, \qquad y_{i,j} = u_{i,j} + z_i x_{i,j}. \tag{A.12}$$

Les relations (A.9) sont remplacées par

$$x_{i,j}(z_i^2 - 2\Delta z_i + 1) = y_{i,j}(z_i - z_j). \tag{A.13}$$

En effet, puisque les relations (A.12) définissent une transformation linéaire bijective, la paire $(x_{i,j}, y_{i,j})$ sert aussi bien que $(u_{i,j}, u_{j,i})$ comme coordonnées projectives.

La fonction

$$z^2 - 2\Delta z + 1 = (z - \delta_1)(z - \delta_2)$$

n'est 0 qu'aux deux points δ_1 et δ_2 qui sont différents puisque $\Delta \neq \pm1$. Autour de $z_i = \delta_1$ on peut remplacer $y_{i,j}$ par

$$y'_{i,j} = \frac{y_{i,j}}{z_i - \delta_2}$$

et $x_{i,j}$ par

$$x'_{i,j} = -x_{i,j} + y'_{i,j}.$$

Alors (A.13) est remplacé par

$$x'_{i,j}(z_i - \delta_1) = y'_{i,j}(z_j - \delta_1). \tag{A.14}$$

En particulier les coordonnées $x'_{i,j}$ et $y'_{i,j}$ sont superflues sauf si z_j est aussi près de δ_1. On traite les coordonnées qui sont près de δ_2 de la même façon.

Il en résulte qu'autour d'un point p donné il est utile de répartir les coordonnées z_i dans trois sous-ensembles: D_1 qui contient celles telles que $z_i(p) = \delta_1$; D_2 qui contient celles telles que $z_i(p) = \delta_2$; et D_0 qui contient celles telles que $z_i(p)$ n'est ni δ_1 ni δ_2. Les seules coordonnées $(x'_{i,j}, y'_{i,j})$ qu'il faut retenir autour de p sont celles telles que i et j sont tous les deux dans D_1 ou D_2. Pour elles on a soit (A.14) soit

$$x'_{i,j}(z_i - \delta_2) = y'_{i,j}(z_j - \delta_2). \tag{A.15}$$

Si $i < j$ et si on a retenu $y'_{i,j}$, soit $y'_{j,i} = x'_{i,j}$. Les relations du genre (A.10) sont remplacées par

$$\sum_{\{(i_1,j_1),(j_1,i_1)\}} \dots \sum_{\{(i_M,j_M),(j_M,i_M)\}} g_{i_1,j_1,\dots,i_M,j_M}(z_{i_1} - \delta_{\epsilon(1)}) \dots (z_{i_M} - \delta_{\epsilon(M)}) = 0,$$

où $\epsilon(m)$ est 1 ou 2. Dans chaque somme les indices $i_m \neq j_m$ parcourent l'ensemble $D_{\epsilon(m)}$ Chacune de ces relations implique une relation semblable entre les $y'_{i,j}$

$$\sum_{\{(i_1,j_1),(j_1,i_1)\}} \dots \sum_{\{(i_M,j_M),(j_M,i_M)\}} g_{i_1,j_1,\dots,i_M,j_M} y'_{i_1,j_1} \dots y'_{i_M,j_M} = 0.$$

Puisque

$$(z_i - \delta_\epsilon)(z_j - \delta_\epsilon)(z_k - \delta_\epsilon) = (z_i - \delta_\epsilon)(z_j - \delta_\epsilon)(z_k - \delta_\epsilon),$$

il en résulte que

$$(A.16) \qquad y'_{i,j} y'_{j,k} y'_{k,i} = y'_{i,k} y'_{k,j} y'_{j,i}.$$

Il s'agit ici des coordonnées projectives. Posons, pour un point p donné, $j \succeq i$ si $y'_{j,i} \neq 0$. Alors on a soit $j \succeq i$ soit $i \succeq j$ et même, dans la plupart des cas, les deux simultanément. Supposons que $k \succeq j$ et $j \succeq i$. Si $y'_{k,i} = 0$ il résulte de (A.16) que $y'_{i,k} = 0$; mais ceci est exclu puisqu'il s'agit des coordonnées projectives. Par conséquent $k \succeq i$.

Pour chaque point il a des éléments maximaux dans D_1 et dans D_2 par rapport à cet ordre et un élément qui est maximal à un point donné l'est aussi dans un voisinage de ce point. Soient

$$D_1 = \{i_1, i_2, \dots, i_{s_1}\}, \quad D_2 = \{j_1, j_2, \dots, j_{s_2}\},$$

où les deux suites (i_k) et (j_k) sont décroissantes. Alors

$$z_{i_{k+1}} - \delta_1 = (z_{i_k} - \delta_1) \frac{y'_{i_{k+1},i_k}}{y'_{i_k,i_{k+1}}}.$$

et

$$z_{j_{k+1}} - \delta_2 = (z_{j_k} - \delta_2) \frac{y'_{j_{k+1},j_k}}{y'_{j_k,j_{k+1}}}.$$

Par conséquent, si on met tous les $y'_{i,j}$, $i \succeq j$, égaux à 1, ce qui est possible car il s'agit de coordonnées projectives, alors toutes les coordonnées sont des fonctions régulières de z_{i_1}, y'_{i_{k+1},i_k}, $1 \leq k < s_1$, z_{j_1}, y'_{j_{k+1},j_k}, $1 \leq k < s_2$, et de z_i, $i \in D_0$ et (pour ne pas l'oublier) de Δ. Il en résulte que la variété éclatée de cette façon est lisse et, qui est plus, que l'application π_2 de cette variété dans $\mathbb{P}^1$ déduite de la projection $E^{A,B} \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est aussi lisse. Donc la première affirmation du lemme est valable.

Il faut ensuite nous occuper des difficultés qui proviennent des quotients qui définissent les fonctions z''_i. Seules les coordonnées $w_{i,j}$ sont pertinentes. Les paires (i,j) pour lesquelles les coordonnées $w_{i,j}$ sont égales à 0 ou à l'infini sur $C^{A,B}$ par la définition même de cette variété, exigeront une attention particulière.

Nous commençons en introduisant la variété $V = V^{A,B}$ définie par les coordonnées $w_{i,j}$ en admettant $i > j$ mais en exigeant que $w_{i,j} w_{j,i} = 1$ et en excluant toute paire telle que $w_{i,j}$ est par définition égal à 0 ou à l'infini ou à -1 sur $W = W^{A,B}$. (Nous supprimerons parfois les indices A et B.) Si $i \equiv i'$ et $j \equiv j'$ alors $w_{i,j}$ ne diffère pas de $w_{i',j'}$. Les deux coordonées sont les mêmes. Les valeurs de toutes les coordonnées sont nécessairement différentes de 0. Il s'agit d'un tore algébrique dans le sens de [TE].

Le groupe $U = U^{A,B}$ de caractères du tore pertinent est engendré par des éléments $e_{i,j}$ sauf que les paires (i,j) telles que $i \in \mathbb{B}'_k$ ou $j \in \mathbb{B}''_k$ ne sont pas admises. Les seules relations sont $e_{i,j} + e_{j,i} = 0$, $e_{i,j} = e_{i',j'}$ si $i \equiv i'$ et $j \equiv j'$ et $e_{i,j} = 0$ si $i \equiv j$. La première de ces relations n'est pertinente que si les deux éléments qui y interviennent sont définis. Soit $Y = Y^{A,B} = Hom(U, \mathbb{R})$.

L'application évidente

$$V \to W = W^{A,B} = \prod \mathbb{P}^1$$

est un plongement normal équivariant dans le sens de [TE]. Il est associé dans le sens de [TE, §I.2, Th. 6] à la décomposition polyédrique de Y définie par des hyperplans $e_{i,j}(y) = 0$. Chaque élément ouvert de la décomposition est donc défini par des inégalités

$$(A.17) \qquad \epsilon_{i,j} e_{i,j}(y) \geq 0,$$

où $\epsilon_{i,j} = \pm 1$ et $\epsilon_{i,j}\epsilon_{j,i} = 1$. Pour (i, j) et (i', j') tels que $e_{i,j} = e_{i',j'}$, on exige en plus que $\epsilon_{i,j} = \epsilon_{i',j'}$. Si $i \equiv j(A, B)$ le facteur $\epsilon_{i,j}$ n'est pas défini. Nous observons que les coordonnées supplémentaires qui apparaissent dans la condition (5) de la définition de $C^{A,B}$ et qui sont des constantes apparaissent parmi celles de $W^{A,B}$ mais ont été supprimées en définissant $V^{A,B}$.

Notre éclatement de W sera défini par une décomposition polyédrique plus fine que (A.17) (voir [TE, §I.2, Th. 7]). Pour chaque i dans la réunion des ensembles A_k soit f_i la forme linéaire

$$f_i(y) = \sum_{j \neq i} e_{i,j}(y).$$

Nous raffinons la décomposition en ajoutant tous les hyperplans $f_i(y) = 0$, donc en ajoutant les inégalités

$$(A.18) \qquad \eta_i f_i(y) \geq 0,$$

où $\eta_i = \pm 1$ et $\eta_i = \eta_j$ si i et j appartiennent au même A_k. La variété ainsi obtenue est telle que les $\exp(f_i)$ aussi bien que les fonctions $\exp(e_{i,j}) = w_{i,j}$ y sont bien définie quoique la valeur ∞ est admise. Nous pouvons même définir $\exp(f_i)$ pour $i \in B'_l$ en posant $\exp(f_i) \equiv 0$ et pour $i \in B''_l$ en posant $\exp(f_i) \equiv \infty$.

La variété associée à cette décomposition est complète (voir [TE, §I.2, Th. 7]) mais en général singulière. Selon la définition même, à chaque point de cette nouvelle variété une des deux fonctions

$$z''_i = \exp(f_i(w)) = \prod_{i \neq j} w_{i,j}, \qquad \tilde{z}''_i = \exp(-f_i(w)) = \prod_{i \neq j} w_{j,i}$$

est régulière. (Si $i \in \mathbb{B}'_k$ et $j \in \mathbb{B}''_k$ nous posons $z''_i = \tilde{z}''_j = 0$ et $\tilde{z}''_i = z''_j = \infty$.) Par conséquent cet éclatement de W suffit pour que l'application $\psi^{A,B}$ soit définie. De plus à cette étape l'éclatement de $W^{\tilde{A},\tilde{B}}$ est une sous-variété de $W^{A,B}$ si $(\tilde{A}, \tilde{B})$ est plus profond que (A, B). Mais un éclatement de plus est nécessaire pour obtenir une variété lisse.

L'existence d'un tel éclatement $\mathcal{W}^{A,B}$ est vérifiée dans [TE, I.2, Lem. 1,2,3]. (Nous observons que la démonstration du Thm. 11 de [TE] est indépendante des Thms. 9 et 10. L'éclatement pertinent est obtenu en utilisant les trois lemmes et le Thm. 4.) Pour construire cet éclatement il suffit de raffiner la première décomposition en une décomposition simpliciale.

A certains égards la décomposition précise est sans importance. Mais une partie de la décomposition doit être choisie soigneusement. On observe que les constructions de [TE] sont telles que la modification commence avec les cellules (ou cônes) de la dimension la plus basse, donc de dimension 0, puis passe aux autres cellules en augmentant la dimension k à la dimension $k + 1$; les cellules de dimension k ne sont plus modifiées après l'étape k. De plus, si une cellule de dimension k est déjà un cône simplicial, il n'est pas nécessaire de la modifier ou de modifier les cellules de sa frontière.

La décomposition donnée par (A.17) est une décomposition en cônes fermés simpliciaux. Par conséquent si quelqu'uns de ces cônes ou des cônes de leurs frontières sont telles que les inégalités (A.18) sont satisfaites avec des choix convenables des constantes η_i alors il est admissible de ne pas les modifier; et nous ne les modifions pas.

Supposons que la réunion $\cup A_k$, donc le complément de la réunion $\cup \mathbb{B}_k$, soit la réunion de deux ensembles disjoints D' et D''. On attache à une telle paire une cellule *spéciale* en posant $\epsilon_{i,j} = 1$ si $i \in D'$ et $\epsilon_{i,j} = -1$ si $i \in D''$. Pour satisfaire à (A.18) on choisit $\eta_i = 1$, $i \in D'$ et $\eta_i = -1$, $i \in D''$. La cellule ainsi obtenue est une cellule (A.17) et ni elle ni les composantes de sa frontière ne seront modifiées. Il est utile d'étendre la notion d'une cellule spéciale en n'exigeant pas que la réunion de D' et D'' soit le complément de celle des $\mathbb{B}_k$. Alors il est entendu que $e_{i,j}(y) = 0$ et $f_i(y) = 0$ pour $i \notin D' \cap D''$. Dans un sens plus large, ces cellules spéciales sont de toute façon des cellules de la frontière des cellules spéciales dans un sens restreint.

A chaque cellule Σ qui est spéciale ou qui appartient à la frontière d'une cellule spéciale correspond une sous-variété W_Σ ouverte, dans le sens de Zariski, de l'éclatement et la restriction à W_Σ de l'application qui envoie l'éclatement dans W définit un isomorphisme de W_Σ avec son image. Nous dénotons cet image par le même symbole W_Σ.

La variété W_Σ attachée à une cellule spéciale peut être définie d'une façon plus concrète. Elle est définie par les conditions: (i) $w_{i,j}$ est fini pour i dans D'; (ii) $w_{j,i}$ est fini si $i \in D''$. Les variétés attachées aux cellules de sa frontière satisfont à ces conditions et en plus à la condition que $w_{i,j}$ est fini et pas zéro pour certaines paires (i, j). Il résulte de [TE, Th. 6] (légèrement corrigé – dans la dernière phrase les orbites devraient être remplacées par leurs fermetures) qu'un point de W qui est contenu dans un sous-ensemble W_Σ est l'image d'un point unique de $\mathcal{W}$.

A nos fins il faut nous assurer en plus que les décompositions de [TE] peuvent être choisies en sorte que $\mathcal{C}^{AB}(\tilde{A}, \tilde{B})$ et l'application η de (A.7) soient définis. Puisque $\mathcal{E}^{\tilde{A},\tilde{B}}$ est une sous-variété de $\mathcal{E}^{A,B}$, il suffira de définir une sous-variété $\mathcal{W}^{A,B}(\tilde{A}, \tilde{B})$ de $\mathcal{W}^{A,B}$ et une application (notée encore η)

$$\eta: \quad \mathcal{W}^{A,B}(\tilde{A}, \tilde{B}) \to \mathcal{W}^{\tilde{A},\tilde{B}}.$$

On aura alors

$$\mathcal{C}^{A,B}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mathcal{E}^{\tilde{A},\tilde{B}} \times \mathcal{W}^{A,B}(\tilde{A}, \tilde{B}).$$

En particulier le lemme A.1 sera valable.

A chaque paire (A, B) nous avons attaché l'espace vectoriel $Y^{A,B}$. Si $(\tilde{A}, \tilde{B})$ est plus profond que (A, B) nous définissons un sous-espace $Y^{A,B}(\tilde{A}, \tilde{B})$ de $Y^{A,B}$ par la condition que $y \in Y^{A,B}$est dans $Y^{A,B}(\tilde{A}, \tilde{B})$ si et seulement si

(1) $e_{i,j}(y) = e_{i',j'}(y)$ chaque fois que $i \equiv i'(\tilde{A}, \tilde{B})$ et $j \equiv j'(\tilde{A}, \tilde{B})$;

(2) $e_{i,j}(y) = 0$ s'il existe $k \neq k'$ tels que $i \in \tilde{\mathbb{B}}_k$ et $j \in \tilde{\mathbb{B}}_{k'}$.

Ces conditions sont cependant pertinentes seulement si les éléments qui y interviennent sont définis. La première implique que $e_{i,i'}$ s'annule sur $Y^{A,B}(\tilde{A}, \tilde{B})$ si $i \equiv i'(\tilde{A}, \tilde{B})$. Nous nous intéressons surtout au sous-ensemble $Y_+^{\tilde{A},B}(\tilde{A}, \tilde{B})$ de $Y^{A,B}(\tilde{A}, \tilde{B})$ défini par les conditions

(1) $e_{i,j}(y) \geq 0$ si
 $i \in \tilde{\mathbb{B}}'_k$, $j \in \tilde{\mathbb{B}}''_k$;

(2) $e_{i,j}(y) \leq 0$ si $i \in \tilde{\mathbb{B}}''_k$, $j \in \tilde{\mathbb{B}}'_k$;

(3) si $i \in \tilde{\mathbb{B}}'_k$ alors $f_i(y) \geq 0$ et si $j \in \tilde{\mathbb{B}}''_k$ alors $f_j(y) \leq 0$.

Nous observons pour la dernière fois que les première et seconde conditions ne sont pertinentes que si $e_{i,j}$ est défini, donc si $i \notin \mathbb{B}_k$.

Par l'intérieur d'un cône fermé Σ d'une décomposition polyédrique nous entendons son intérieur dans l'espace vectoriel qu'il engendre. Donc si $e_{i,j}(y) = 0$ pour un point intérieur du cône alors $e_{i,j}$ s'annule sur le cône entier.

Lemme A.3 *Si l'intersection de l'intérieur Σ° d'un cône fermé Σ avec l'espace $Y_+^{A,B}(\tilde{A}, \tilde{B})$ n'est pas vide alors cette intersection est égale à $\Sigma^\circ \cap Y^{A,B}(\tilde{A}, \tilde{B})$.*

Supposons que l'intersection $\Sigma^\circ \cap Y_+^{A,B}(\tilde{A}, \tilde{B})$ ne soit pas vide. Il faut vérifier que, si $i \in \tilde{\mathbb{B}}'_k$ et $j \in \tilde{\mathbb{B}}''_k$ et si $i \notin \tilde{\mathbb{B}}_k$ de sorte que $e_{i,j}$ est un élément bien défini de $U^{A,B}$, alors $e_{i,j}(y) \geq 0$ pour chaque élément y de l'intersection $\Sigma^\circ \cap Y^{A,B}(\tilde{A}, \tilde{B})$. Si $e_{i,j}(y) = 0$ alors $e_{i,j}$ est 0 partout sur cette intersection parce que y appartient à Σ°. Si $e_{i,j}(y) \neq 0$ et $i \in \mathbb{B}'_k$, $j \in \mathbb{B}''_k$ il faut que $e_{i,j}(y) > 0$ car le signe de $e_{i,j}$ est constant sur Σ° et $\Sigma^\circ \cap Y_+^{A,B}(\tilde{A}, \tilde{B})$

n'est pas vide. De la même façon si $f_i(y)$ n'est pas identiquement 0 sur Σ alors il est de signe constant et ce signe est celui exigé par la définition de $Y_+^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$.

Il existe une application linéaire λ bien définie de $Y^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$ sur $Y^{\tilde{A},\tilde{B}}$ car si $\tilde{e}_{i,j}$ et $\tilde{e}_{i',j'}$ sont deux éléments égaux de $U^{\tilde{A},\tilde{B}}$, donc deux éléments définis par des paires (i,j) et (i',j') avec $i \equiv i'(\tilde{A},\tilde{B})$ et $j \equiv j'(\tilde{A},\tilde{B})$, alors les deux éléments $e_{i,j}$ et $e_{i',j'}$ satisfont les mêmes restrictions dans $Y^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$. Nous voulons construire les décompositions polyédriques tel que toute intersection $\Sigma \cap Y_+^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$ est contenue dans l'image réciproque $\lambda^{-1}(\tilde{\Sigma})$ d'un cône de la décomposition de $Y^{\tilde{A},\tilde{B}}$. Puisque les décompositions des cellules sont définies par récurrence sur leur dimension et la dimension de $Y^{A,B}$ est plus grande que celle de $Y^{\tilde{A},\tilde{B}}$, cela s'avère possible.

Il faut cependant tenir compte de l'intersection des raffinements des cellules spéciales et de leurs frontières.

Lemme A.4 *Soit Σ une cellule spéciale de $Y^{A,B}$ ou une cellule de sa frontière. Alors*

$$\Sigma^\circ \cap Y_+^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B}) \tag{A.19}$$

est contenu dans l'image réciproque d'une cellule spéciale de $Y^{\tilde{A},\tilde{B}}$ ou d'une cellule de sa frontière.

Il suffit évidemment de montrer que cette intersection est contenue dans l'image réciproque d'une cellule spéciale dans le sens large. Supposons qu'une cellule spéciale qui contient Σ soit définie par des ensembles D' et D''. Soient $\hat{D}'$ l'ensemble de tous les i tel que $i \equiv i'(\tilde{A},\tilde{B})$ et $i' \in D'$. Définissons $\hat{D}''$ de la même façon. Puisque nous admettons les cellules spéciales dans le sens large nous pouvons remplacer D' et D'' par $\hat{D}'$ et $\hat{D}''$ car Σ est contenu dans la cellule plus petite qu'ils définissent. Soient $\tilde{D}'$ et $\tilde{D}''$ les intersections de $\hat{D}'$ et de $\hat{D}''$ avec $\cup\tilde{A}_k$ Il est clair que (A.19) est contenu dans l'image réciproque de la cellule spéciale attachée à $\tilde{D}'$ et $\tilde{D}''$.

Proposition A.5 *Il est possible de construire simultanément pour toute paire (A,B) des raffinements en cônes simpliciaux des décompositions de $Y^{A,B}$ données par (A.17) et (A.18) tels que*

(1) *les cellules spéciales et les cônes de leur frontières ne soient pas modifiés;*

(2) *si la paire $(\tilde{A},\tilde{B})$ est plus profonde que la paire (A,B) alors l'intersection de chaque cône du raffinement de la décomposition sur $Y^{A,B}$ avec $Y_+^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$ est contenue dans l'image réciproque d'un cône du raffinement de la décomposition de $Y^{\tilde{A},\tilde{B}}$.*

La construction se fait par récurrence sur la dimension de $Y^{A,B}$. Pour (A,B) donné elle se fait par récurrence sur la dimension du cône. Soit Σ un cône donné dans $Y^{A,B}$ et supposons que tout cône de la frontière de Σ a déjà été modifié. Si l'intersection de Σ° et $Y_+^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$ est vide, alors on décompose Σ à partir de la décomposition des cônes de sa frontière. Si Σ est spécial ou appartient à la frontière d'une cellule spéciale, on n'y touche pas. Par contre s'il ne l'est pas, on choisit un point dans Σ° et on prend la décomposition simpliciale définie par ce point et la décomposition de la frontière.

Supposons alors que

$$\Sigma^\circ \cap Y_+^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$$

n'est pas vide. Il y a deux possibilitiés:

(1) $\Sigma^\circ \subseteq Y_+^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$;

(2) $\Sigma^\circ \not\subseteq Y_+^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$.

Dans le premier des deux cas l'intersection de l'image réciproque du raffinement de la décomposition de $Y^{\tilde{A},\tilde{B}}$ est une décomposition de Σ dont les cônes ne sont pas nécessairement simpliciaux sauf si Σ appartient à la frontière d'une cellule spéciale car, selon le lemme A.4, Σ est alors contenu dans l'image réciproque d'un cône qui n'est pas raffiné. Si les cônes ne sont pas simpliciaux nous pouvons raffiner cette décomposition de Σ en une décomposition en cônes simpliciaux.

Dans le second cas nous pouvons, encore à cause du lemme A.4, écarter le cas où Σ est spécial ou contenu dans la frontière d'une cellule spéciale. Ensuite en décomposant Σ d'une façon préliminaire (et presqu'arbitraire car les cas importants ont été écartés), nous pouvons supposer qu'il est devenu la réunion de cônes simpliciaux.

Nous décomposons ces nouveaux cônes Θ par récurrence sur leur dimension. Seuls les Θ qui ne sont pas contenus dans une cellule spéciale et dont l'intersection

$$\Theta^\circ \cap Y_+^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$$

n'est pas vide et ne contient pas Θ° posent des problèmes. Dans ce cas nous raffinons la décomposition de

$$\Theta \cap Y_+^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$$

donnée par l'image réciproque de celle de $Y^{\tilde{A},\tilde{B}}$. Ensuite nous utilisons les suspensions des cônes de cette décomposition avec ceux de la frontière de Θ pour obtenir la décomposition définitive de Θ.

En général les plongements toroïdaux sont tels qu'à chaque cône fermé de la décomposition et de n'importe quelle dimension est attachée une sous-variété localement fermée. Par exemple au point $\{0\}$ est attaché le tore lui-même et à un cône ouvert un seul point. Nous dénotons par $W_\Sigma^{A,B}$ la sous-variété de $\mathcal{W}^{A,B}$ attachée au cône Σ.

En particulier chaque cône fermé de la décomposition de $Y^{A,B}$ dont l'intérieur rencontre $Y_+^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$ définit une sous-variété localement fermée de l'éclatement $\mathcal{W}^{A,B}$. Sur cette sous-variété $\exp(e_{i,j}-e_{i',j'})$ est défini si $i\equiv i'(\tilde{A},\tilde{B})$ et $j\equiv j'(\tilde{A},\tilde{B})$ et n'est ni 0 ni ∞. D'ailleurs $\exp e_{i,j}$ est fini sur cette sous-variété si $i\in\tilde{\mathbb{B}}_l'$ et $j\in\tilde{\mathbb{B}}_l''$. (Observons que nous avons ressuscité les coordonnées de $W^{A,B}$ qui n'apparaissent pas dans la définition de $V^{A,B}$.) Si $i\in\mathbb{B}_k$ et $j\in\mathbb{B}_{k'}$ avec $k\neq k'$ alors $\exp e_{i,j}$ est fini et différent de zéro sur cette sous-variété. De plus, $\exp f_i$, $i\in\mathbb{B}_k'$ et $\exp(-f_j)$, $j\in\mathbb{B}_k''$ sont finis.

Les équations $\exp(e_{i,j}-e_{i',j'})=1$, $i\equiv i'(\tilde{A},\tilde{B})$, $j\equiv j'(\tilde{A},\tilde{B})$, $\exp e_{i,j}=-1$, $i\in\mathbb{B}_k'$ et $j\in\mathbb{B}_k''$, $\exp f_i=0$, $i\in\mathbb{B}_k'$, $\exp(-f_j)=0$, $j\in\mathbb{B}_k''$, et enfin pour $k\neq k'$

$$\begin{aligned}
\exp e_{i,j} &= Q(\alpha_k,\alpha_{k'}), && i\in\mathbb{B}_k', \quad j\in\mathbb{B}_{k'}'\\
\exp e_{i,j} &= Q(\alpha_k,\beta_{k'}), && i\in\mathbb{B}_k', \quad j\in\mathbb{B}_{k'}''\\
\exp e_{i,j} &= Q(\beta_k,\beta_{k'}), && i\in\mathbb{B}_k'', \quad j\in\mathbb{B}_{k'}''\\
\exp e_{i,j} &= Q(\beta_k,\alpha_{k'}), && i\in\mathbb{B}_k'', \quad j\in\mathbb{B}_{k'}'
\end{aligned}$$

définissent alors une sous-variété fermée $\mathcal{W}^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$ de $\mathcal{W}^{A,B}$. Elle est fermée parce qu'elle est contenue dans la réunion des W_Σ tels que l'intérieur de Σ rencontre $Y_+^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$.

Il y a une application η de $\mathcal{W}^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$ dans $\mathcal{W}^{\tilde{A},\tilde{B}}$. En effet $\mathcal{W}^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$ est la réunion de sous-variétés ouvertes, chacune attachée à un cône fermé Σ dont l'intérieur rencontre $Y_+^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$. L'intersection

$$\Sigma^\circ \cap Y_+^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$$

est contenue dans l'image réciproque d'un cône fermé $\tilde{\Sigma}$ de $Y^{\tilde{A},\tilde{B}}$.

Nous envoyons la sous-variété de $\mathcal{W}^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$ attachée à Σ dans $W_{\tilde{\Sigma}}^{\tilde{A},\tilde{B}}$ en posant

$$\exp\tilde{e}(\eta(p)) = \exp(e(p)) \tag{A.20}$$

pour chaque élément $\tilde{e}$ de $U^{\tilde{A},\tilde{B}}$ tel que $\tilde{e}(y)\geq 0$ pour tout $y\in\tilde{\Sigma}$. Si

$$\tilde{e}=\sum m_{i,j}e_{i,j}$$

dans $U^{\tilde{A},\tilde{B}}$ alors e est défini par la même somme dans $U^{A,B}$. Quoique e n'est pas unique les valeurs de $\exp e$ sur $W^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B})$ le sont.

Puisque n'importe quelle fonction régulière sur la sous-variété ouverte $W_{\tilde{\Sigma}}$ de $\mathcal{W}^{\tilde{A},\tilde{B}}$ attachée à $\tilde{\Sigma}$ est une combinaison linéaire des fonctions $\exp \tilde{e}$ telles que $\tilde{e}(y) \geq 0$ pour tout $y \in \tilde{\Sigma}$, l'application η est bien définie en sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W^{A,B}(\tilde{A},\tilde{B}) & \xrightarrow{\eta} & W^{\tilde{A},\tilde{B}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ W^{A,B} \times E^{A,B} & \longleftarrow & W^{\tilde{A},\tilde{B}} \times E^{\tilde{A},\tilde{B}} \end{array}$$

est commutatif. Par conséquent le diagramme (A.8) est aussi commutatif.

Nous observons enfin que l'éclatement du deuxième facteur n'implique pas Δ. Par conséquent l'application π_2 du lemme A.1 reste lisse au-dessus des points où elle était lisse après le premier éclatement.

L'importance des cellules spéciales découle du prochain lemme.

Lemme A.6 *Supposons que Δ soit générique. Soit p un point de $C_{\Delta}^{A,B}$ et posons $(z',w') = \varphi(p)$ et $(z'',w'') = \psi(p)$. Supposons que $(z',w') = (z'',w'')$. Alors il existe une cellule spéciale Σ (dans le sens large) telle que W_Σ contient $w' = w''$. Si la cellule spéciale est définie par (D',D'') alors D' est contenu dans l'ensemble des $i \notin \cup\mathbb{B}_k$ tels que $z_i \in \{\alpha_1,\ldots,\alpha_N\}$ et D'' dans l'ensemble des $j \notin \cup\mathbb{B}_k$ tels que $z_j \in \{\beta_1,\ldots,\beta_N\}$.*

Soit $(z,w) = (z',w') = (z'',w'')$ et soient $Z_1, Z_2, \ldots$ les valeurs différentes des coordonnées z_i. Nous écrivons $Z_i \to Z_j$ si

$$Z_j = A(Z_i) = 2\Delta - \frac{1}{Z_i}.$$

Puisqu'il s'agit du cas générique nous pouvons supposer que l'application (A.3) n'a pas de point cyclique d'ordre fini et plus petit ou égal à N, sauf pour les deux points fixes δ_1 et δ_2. Par conséquent l'ensemble $\{Z_k\}$ se décompose dans des sous-ensembles disjoints $\{Z_{i_1},\ldots,Z_{i_n}\}$ tels que

$$Z_{i_1} \to Z_{i_2} \to \ldots \to Z_{i_n}. \tag{A.21}$$

De plus il n'existe aucun k tel que $Z_{i_n} \to Z_k$. L'indice n peut être différent pour des sous-ensembles différents.

Si Z_k et Z_l n'appartiennent pas au même sous-ensemble et $z_i = Z_k$ et $z_j = Z_l$ alors ni $F(z_i,z_j)$ ni $F(z_j,z_i)$ n'est égal à 0 et $w_{i,j}$ n'est ni 0 ni ∞. Cette affirmation reste vraie si Z_k et Z_l appartiennent au même sous-ensemble mais si $Z_k \not\to Z_l$.

Il n'y a donc que deux cas intéressants: ou il y a une suite maximale (A.21) avec $n > 1$; ou il y a un k tel que $Z_k = \delta_i$, $i = 1,2$. Les suites maximales S de longueur deux donnent une paire (D'_S, D''_S) en prenant $D'_S = \{i|z_i = Z_{i_1}\}$, $D''_S = \{j|z_j = Z_{i_2}\}$. Dans ce cas $w_{i,j} = 0$ si $i \in D'_S$ et $j \in D''_S$. Par contre si $i \in D'_S$ et $j \notin D''_S$ alors $w_{i,j}$ n'est ni 0 ni ∞. Il résulte de l'égalité $z'_i = z''_i$ qu'il existe un indice k tel que $Z_{i_1} = \alpha_k$. Pour des raisons semblables il existe un indice k' tel que $Z_{i_2} = \beta_{k'}$. Evidemment on a $k = k'$. Nous posons

$$D' = \cup_S D'_S, \qquad D''_S = \cup D''_S.$$

Supposons qu'il y a une suite maximale pour laquelle $n > 2$. Le même argument montre que $Z_{i_1} = \alpha_k$, et que $Z_{i_n} = \beta_{k'}$. Mais on peut évidemment exiger que dans le cas générique aucun $\beta_{k'}$ ne soit dans l'ensemble engendré par α_k sous des puissances de l'application (A.3). Il en résulte que $n = 2$ et que $k = k'$.

Supposons enfin qu'il y ait une suite maximale avec $n = 1$. Supposons que $Z = Z_{i_1} = \delta_1$. Le cas $Z_{i_1} = \delta_2$ est tout à fait semblable. Si $z \neq \delta_1$ alors

$$F(\delta_1,z) = \delta_1\Big(z - 2\Delta + \frac{1}{\delta_1}\Big)$$
$$F(z,\delta_1) = (\delta_1 - 2\Delta)\Big(z + \frac{1}{\delta_1 - 2\Delta}\Big).$$

Puisque

$$\frac{1}{\delta_1 - 2\Delta} = -\delta_1 = -2\Delta + \frac{1}{\delta_1},$$

le quotient $F(\delta_1, z)/F(z, \delta_1)$ est égal à $-\delta_1^2$. D'autre part

$$\frac{\delta_1 - \alpha_i}{\delta_1 - \beta_i} = \delta_1 \alpha_i$$

parce que

$$\delta_1 - \beta_i = \delta_1 - 2\Delta + \frac{1}{\alpha_i} = \frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{\delta_1} = \frac{\delta_1 - \alpha_i}{\alpha_i \delta_1}.$$

Nous multiplions toutes les équations $z_i' = z_i''$ pour $z_i = Z$ ensemble. D'abord

$$\prod z_i'' = \prod_{z_i = Z, z_j \neq Z} \delta_1^2 = \delta_1^{2s(N-s)},$$

si s est le nombre d'indices i tels que $z_i = Z$, et ensuite

$$\prod z_i' = R(\delta_1)^s = \left(\frac{\delta_1^N \sqrt{(-1)^N \rho}}{\kappa} \right)^s,$$

où ρ est défini par (2.1). Dans le cas générique l'équation

$$\delta_1^{2s(N-s)} = \left(\frac{\delta_1^N \sqrt{(-1)^N \rho}}{\kappa} \right)^s,$$

$0 < s \leq N$, n'est pas satisfaite.

Appendice 2

La fonction R qui définit la correspondance est

$$R(z) = \kappa \frac{\prod (z - \alpha_k)}{\prod (z - \beta_k)}.$$

Comme nous avons déjà remarqué, les auteurs de [TV] permettent la possibilité que la correspondance dégénére en faisant $\kappa \to 0$ tout en gardant Δ et tous les α_k et β_k génériques. Pour pouvoir exploiter cette dégénérescence de la correspondance, il faut le lemme suivant.

Lemme A.7 *Fixons les α_k, les β_k et Δ. Alors lorsque $\kappa \to 0$ tout point fixe de la correspondance reste fini et tend vers une solution des équations*

$$\prod_k (z_i - \beta_k) \prod_{j \neq i} (z_i z_j - 2\Delta z_i + 1) = 0 \qquad (A.22)$$

Supposons que $z_i \to \infty$. Alors $F(z_i, z_j)/F(z_j, z_i)$ reste fini sauf si $z_j \to 0$ et il approche un nombre non-nul sauf si $z_j \to 2\Delta$, donc sauf si $z_j \to A(z_i)$ où A est toujours l'application linéaire $z \to 2\Delta - 1/z$.

Si z_i reste éloigné de tout pôle de R, en particulier si $z_i \to 0$ ou si $z_i \to 2\Delta$ car les β_i et Δ sont génériques, alors $R(z_i) \to 0$. Par conséquent il y a un indice j tel que

$$z_j \to A(z_i).$$

Puisque Δ est générique de sorte que A est d'ordre infini, on arrive enfin à un indice l tel que z_l approche un pôle β_k. En particulier le point de départ n'était pas 0. Le lemme en résulte.

Les solutions de (A.22) ont une structure combinatoire simple qui ressemble beaucoup aux structures déjà rencontrées. Il résulte de la démonstration du lemme que pour une solution (z_i) de (A.22) l'ensemble des z_i tels que $z_i \in \{\beta_1, \dots, \beta_N\}$ n'est pas vide. Appelons ces z_i les racines. Toute autre coordonnée z_j s'obtient d'une racine en appliquant A^{-1} plusieurs fois $z_j = A^{-1}(A^{-1}(\dots(z)\dots))$ où z est une racine. Dans le cas générique ces racines déterminent des sous-ensembles différents, donc des composantes connexes mais dans un sens nouveau. A chaque z_j dans une composante connexe est attaché un entier, sa distance de la racine.

La multiplicité des solutions des équations (A.22) n'est pas nécessairement un. Il est d'abord évident que les équations découplent localement selon les composantes connexes. Donc, pour calculer la multiplicité, on peut supposer qu'il n'y a qu'une seule composante. Si la racine est égale à $\beta = \beta_l$ et si E_k est l'ensemble de z_i à la distance k de la racine, alors localement les équations (A.22) sont équivalentes à

$$\begin{aligned} 0 &= (z_i - \beta), && i \in E_0, \\ 0 &= \textstyle\prod_{j \in E_{k-1}} z_j z_i - 2\Delta z_j + 1, && i \in E_k, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

La multiplicité de la solution $z_i = \beta$ pour $i \in E_0$, $z_j = A^{-1}(z_i)$ pour $i \in E_k$ et $j \in E_{k+1}$ est évidemment

$$\prod_{k=0}^{\infty} |E_k|^{E_{k+1}}.$$

Avec quelques moments de réflexion on se persuade que ce produit est exactement le nombre de réunions d'arbres connexes, enracinés aux racines données et dans lesquels la distance d'un sommet z_j de la racine est k si $j \in E_k$. Nous avons par conséquent retrouvé la structure de [AG].

Appendice 3

Vers la fin de l'article [AG] (qui comme celui-ci a été écrit trop hâtivement pour ne pas trop dépasser l'écheance imposée) quelques coquilles et petites erreurs se sont glissées dans le texte et nous voulons profiter de cette occasion pour les corriger.

D'abord la formule (12) devient

$$N \sum_{E \cup F = D} |\mu(E) - \mu(F)| \mu(E)^{f-1} \mu(F)^{e-1} \tag{A.24}$$

et la formule (14)

$$2 \sum_{E \cup F = D} \min\{\mu(E), \mu(F)\} \mu(E)^{f-1} \mu(F)^{e-1}. \tag{A.25}$$

La formule (15) est fausse et devrait être remplacée par la formule suivante qui est vérifiée dans le corps de cet exposé.

$$\omega\mu(D)^{d-2} = \sum (\mu(E)\omega'' + \mu(F)\omega' + \omega'\omega'')(\mu(E) + \omega')^{f-1}(\mu(F) + \omega'')^{e-1}. \tag{A.26}$$

Il y a enfin la formule (17) qui n'intervient pas dans ce papier et que nous corrigeons en un autre lieu.

Bibliographie

[B] H. Bethe, *Zur Theorie der Metalle,* Zeit. f. Physik, **71**, 205-226 (1931)

[TE] G. Kempf *et al, Toroidal Embeddings I,* Springer Lecture Notes in Mathematics 339 (1973)

[AG] Robert P. Langlands and Yvan Saint-Aubin, *Algebro-geometric aspects of the Bethe equations,* in *Strings and Symmetries,* Lecture Notes in Physics 447, Springer Verlag (1995)

[BL] R. P. Langlands and Y. Saint-Aubin, *Les sommes de Bethe et la formule de Lefschetz,* en préparation.

[TΦ] Л. А. Тахтаджян и Л. Д. Фаддеев, Квантовой метод обратной задачи у XYZ модель Гейзенберга, Успехи Мат. Наух, **34**, вып. 5, 13-63 (1979)

[TV] V. Tarasov et A. Varchenko, *Bases of Bethe vectors and difference equations with regular singular points,* prépublication (1995)