Sur La Mauvaise Réduction D'Une Variété de Shimura*

par

R.P. Langlands

(Princeton)

Parce que les relations entre les représentations automorphes et les variétés algébriques sont encore pour la plupart conjecturales, les mécanismes qui lient ces choses tellement disparates restant inconnus, l'étude des cas particuliers a toujours un intérêt vif, surtout quand elle met ces conjectures à l'épreuve, ou nous décèle des aspects nouveaux. Les exemples les plus abordables sont les variétés de Shimura, et on a commencé à comparer les fonctions zêta de ces variétés avec les fonctions L automorphes, non seulement pour les courbes, mais aussi pour les variétés de dimension plus grande [4]. Plus précisément soient F un corps de nombres algébriques totalement réel et D une algèbre de quaternions sur F totalement non ramifiée à l'infini. Le groupe multiplicatif $D^\times$ est le groupe de points rationels d'un groupe G défini sur $\mathbf{Q}$, et on a considéré les variétés de Shimura attachées à G.

On suppose à présent que D est un corps parce que ces variétés sont alors complètes et les problèmes provenant des pointes n'interviennent pas. Pour fixer la variété S on choisit un sous-groupe ouvert compact K de $G(\mathbf{A})$, $\mathbf{A}$ étant l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$. S est une variété sur $\mathbf{Q}$ et on peut étudier sa cohomologie complexe par les méthodes habituelles [2], [8]. Soit n le degré de F. On trouve que la partie majeure de la cohomologie se trouve dans le degré moyen n, et que les opérateurs de Hecke la découpent en pièces motiviques de dimension 2^n, chacune associée à une représentation automorphe de $G(\mathbf{A})$ de dimension infinie et, en plus, des pièces supplémentaires de dimension $\binom{n}{m}$ si $n = 2m$ est pair, chacune associée à une représentation automorphe de $G(\mathbf{A})$ de dimension 1.

Considérons une des pièces M de dimension 2^n associée à une représentation de dimension infinie π. La projection sur M, qu'on note aussi M, est une combinaison linéaire d'opérateurs de Hecke avec des coefficients algébriques, donc elle opère aussi sur la cohomologie ℓ-adic, prise sur la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_\ell$. Elle commute avec l'action de Gal$(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ et on obtient alors une représentation ρ^M de Gal$(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur l'image de M. Ce sont les relations entre ρ^M et π qui nous intéressent.

* First appeared in Journées de Geómétrie Algébrique de Rennes, Astérisque 65, (1979)

D'habitude on définit le L-groupe ${}^LG$ de G comme un groupe complexe, mais pour nos buts il est préférable de le définir comme un groupe algébrique ou proalgébrique sur $\mathbf{Q}$. ${}^LG$ est le produit semi-direct d'un groupe connexe ${}^LG^\circ$ avec $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{A})$. ${}^LG^\circ$ est le groupe des fonctions h sur $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)\backslash\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ à valeurs dans $\mathrm{GL}(2)$, et σ dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ envoie h sur h' avec $h'(\tau) = h(\tau\sigma)$. Le groupe habituel est le groupe des points complexes de ce ${}^LG$.

Le groupe ${}^LG$ a une représentation r de dimension 2^n plus ou moins évidente. Soit X l'espace vectoriel de dimension deux sur lequel $\mathrm{GL}(2)$ opère et soit $V = \otimes_{\tau\in T}X$, où

$$T = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/G)\backslash\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$$

est l'ensemble des plongements de F dans $\overline{\mathbf{Q}}$. On définit la représentation r en posant

$$\begin{array}{ll} r(h)(\otimes\, x(\tau)) = \otimes\, h(\tau)x(\tau), & h\epsilon\ {}^LG^\circ, \\ r(\sigma)(\otimes\, x(\tau)) = \otimes\, x(\tau\sigma), & \sigma\ \epsilon\ \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}). \end{array}$$

Ce que je voudrais bien pouvoir démontrer est qu'il existe un homomorphisme

$$\xi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \longrightarrow {}^LG(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

tel que la composition de ξ avec la projection de ${}^LG$ sur $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ est l'identité et la composition $r\circ\xi$ est équivalente à ρ^M. Mais je n'ai aucune ideée comment cela se fait.

Soit p un nombre premier différent de ℓ, et soit ρ_p^M la restriction de ρ^M au groupe de décomposition $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$. On peut se demander aussi - et c'est là une question nettement plus facile – s'il existe un homomorphisme

$$\xi_p :\ \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \longrightarrow {}^LG(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

tel que la composition de ξ_p avec la projection de ${}^LG$ sur $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ est le plongement habituel tandis que la composition $r\circ\xi_p$ est équivalente à ρ_p^M. Mais cette question-ci admet une formulation plus précise.

Pour la donner nous rappelons quelques faits locaux. Le sous-groupe d'intertie I du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{mr}/\mathbf{Q}_p)$ de l'extension modérément ramifiée maximale de $\mathbf{Q}_p$ est isomorphe à

$$\lim_{(n,p)=1} \mu_n \simeq \prod\nolimits_{q\neq p} \mathbf{Z}_q.$$

En fait, le groupe $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{mr})$ est le produit semi-direct de I et du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{nr}/\mathbf{Q}_p)$ de l'extension non ramifiée maximale. Si σ est dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, on écrit son image dans $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{mr}/\mathbf{Q}_p)$

comme $\bar{\sigma} \times x(\sigma)$ avec $\bar{\sigma} \in \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{nr}/\mathbf{Q}_p)$ et $x \in I$. L'élément $x(\sigma)$ correspond à $\prod_{q \neq p} x_q(\sigma)$. De plus, σ opère dans I et si x correspond à $\prod x_q$, alors $\sigma(x)$ correspond à $\prod_q a_q(\sigma) x_q$ où $a_q(\sigma)$ est une unité q-adique.

Considérons le produit direct

$$\mathfrak{W} = \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \times W_{\mathbf{Q}_p}$$

qui est intervenu dans [10]. $W_{\mathbf{Q}_p}$ est le groupe de Weil. Supposons que φ soit un homomorphisme continu de $\mathfrak{W}$ dans ${}^LG(\mathbf{C})$ qui satisfasse aux conditions suivantes:

i) La composition de φ avec la projection de ${}^LG$ sur $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ donne le plongement canonique de $W_{\mathbf{Q}_p}$ dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$;

ii) Il existe un élément h dans ${}^LG^\circ(\mathbf{C})$ tel que (a) la restriction de $\varphi' = \mathrm{ad}\ h \circ \varphi$ à $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ est définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$, (b) si $|w|$ est la valeur absolue habituelle de w dans $W_{\mathbf{Q}_p}$, alors pour chaque w

$$\varphi'(\begin{pmatrix} |w|^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |w|^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \times w)$$

est dans ${}^LG(\overline{\mathbf{Q}})$, et, de plus, est semi-simple et ses valeurs propres dans chaque représentation rationnelle de ${}^LG$ sont de la forme $|w|^m \xi$ où m est une entier et ξ une racine de l'unité.

On peut associer à un tel φ un homomorphisme continu $\widetilde{\varphi}$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ dans ${}^LG(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Si $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ est l'image de $w \in W_{\mathbf{Q}_p}$, alors $|w|^{-1} = a_\ell(\sigma)$ est un nombre rationnel et on pose

$$\widetilde{\varphi}(\sigma) = \varphi'(\begin{pmatrix} |w|^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |w|^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \times w)\varphi'(\begin{pmatrix} 1 & x_\ell(\sigma) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

On définit $\widetilde{\varphi}$ en général par continuité. Faute d'une terminologie plus adéquate, nous dirons provisoirement que φ est de type A_0.

Enfin, revenant à la représentation ρ_p^M, nous rappelons qu'elle est attachée à une représentation π de $G(\mathbf{A})$ de dimension infinie. Soit $\pi'(g) = |\det g|^{-\frac{1}{2}}\pi(g)$. Alors π' est aussi une représentation automorphe et comme telle un produit tensoriel $\otimes\pi'_v$ sur les places de $\mathbf{Q}$. D'une façon qui reste à expliquer, on attache - à part quelques difficultés, qui ne se présentent pas dans le cas que nous considerons[1] - à π'_p un homomorphisme $\varphi = \varphi(\pi'_p)$ du groupe $\mathfrak{W}$ dans ${}^LG(\mathbf{C})$. Ce qu'on voudrait démontrer est que φ est de type A_0 et qu'on peut choisir le ξ_p ci-dessus égal à $\widetilde{\varphi}$.

On peut probablement le démontrer sans grande difficulté pour presque tout p en mêlant les méthodes de [8] et [9] et un s'appuyant sur la formule de trace de Lefschetz, mais dans [9] on a supposé carrément qu'aucune ramification n'intervient. C'est Rapoport qui a soulevé le problème des places où la variété se réduit mal, et tout ce qui suit sont les fruits, pas encore mûrs, de nos efforts communs. Il a voulu d'abord généraliser un résultat de Cherednik [5]. En bref, Cherednik a découvert que si $F = \mathbf{Q}$, l'algèbre D est ramifiée en p, et K contient le groupe des unités de $D \otimes \mathbf{Q}_p$, alors l'ensemble des points sur S avec coefficients dans $\mathbf{Q}_p$ est la courbe de Mumford [13] attachée à l'algèbre qu'on obtient en tordant D à l'infini où il devient ramifié et en p où il cesse d'être ramifié. Cette découverte permet en particulier d'étudier la façon dont S se réduit en p (Casselman, Morita, Deligne? des références précises n'existent pas).

Mais une généralisation directe de ce resultat à un corps de degré quelconque ne semble pas exister. Au moins nous n'avons pas su la trouver. Il semble néanmoins que les variétés se réduisent d'une façon intelligible, quoique nous n'ayons examiné que des cas très simples. En fait, pour nous orienter nous avons commencé avec le cas $[F : \mathbf{Q}] = 2$. De plus nous avons supposé que p reste premier dans F, que D est ramifiée en p tandis que p est non ramifié dans F, et que K contient le groupe des unités de $D \otimes \mathbf{Q}_p$.

Même dans ce cas, manquant de temps et de la facilité géométrique requise, nous n'avons encore ni une proposition ni une démonstration complètes, et il me faut donc me contenter d'expliquer ce que nous pouvons presque démontrer et de donner l'ébauche d'une démonstration. J'espère que celle-ci sera assez claire pour que le spécialiste, au contraire de nous, n'ait aucune difficulté à en combler les lacunes.[2]

La démonstration repose sur la théorie des modules de Dieudonné, dont le mérite, pour les mathématiciens de talent modeste, est qu'elle ramène des problèmes difficiles sur des variétés abéliennes aux problèmes élémentaires de l'algèbre linéaire. On peut traiter ceux-ci sans avoir tout à fait compris ni ceux-là ni les liens entre les deux. C'est ce que nous avons fait, et cet article ne prétend à rien, sauf à attirer l'attention des specialistes de la théorie sur le rôle qu'elle pourrait jouer dans l'étude des variétés de Shimura.

Avant d'aborder la discussion purement géométrique, nous rappelons la définition de l'homomorphisme $\varphi = \varphi(\pi'_p)$ attaché à π'_p. Le groupe G sur $\mathbf{Q}$ provient d'un groupe G' sur F par restriction de scalaires, G' étant soit $\mathrm{GL}(2)$ soit une forme tordue de ce groupe. Donc le groupe $G(\mathbf{Q}_p)$ est égal à

$\prod_{v|p} G'(F_v)$, le produit étant pris sur les places de F divisant p. Le L-groupe ${}^LG'$ de G' est le produit direct de $\mathrm{GL}(2)$ et du groupe Gal$(\overline{\mathbf{Q}}/F)$. Pour chaque place v divisant p on introduit la groupe

$$\mathfrak{W}_v = \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \times W_{F_v}.$$

Des homomorphismes φ_v de $\mathfrak{W}_v$ dans ${}^LG'(\mathbf{C})$ étant donnés tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{W}_v \arrow[r, "\varphi_v"] \arrow[dd] & {}^LG'(\mathbf{C}) \arrow[dr] & \\
& & \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \\
W_{F_v} \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif, on construit un homomorphisme φ de $\mathfrak{W}$ dans ${}^LG(\mathbf{C})$, et, plus précisement, dans le L-groupe local, l'image inverse de Gal$(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ dans ${}^LG(\mathbf{C})$. On se rend compte que dans le diagramme on prend $\overline{F} = \overline{\mathbf{Q}}$ et on étend v à $\overline{F}$. Les places divisant p correspondent d'une façon univoque aux doubles classes dans Gal$(\overline{\mathbf{Q}}/F)\backslash$Gal$(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})/Gal(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$. Pour définir $\overline{\mathbf{Q}}_p$ on étend la valuation attachée à la place p à $\overline{\mathbf{Q}}$ et on obtient une extension de la valuation v correspondante à la double classe de σ dans Gal$(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ en prenant la valeur absolue de $\sigma^{-1}(x)$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$, $x \in \overline{F} = \overline{\mathbf{Q}}$. Cela dit, on voit que les éléments d'une double classe correspondent à l'ensemble Gal$(\overline{F}_v/F_v)\backslash$Gal$(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, où $\overline{F}_v = \overline{\mathbf{Q}}_p$.

Pour chaque v on définit le groupe ${}^LG_v$ exactement comme on a défini ${}^LG$, sauf que l'on remplace Gal$(\overline{F}/F)\backslash$Gal$(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ par Gal$(\overline{F}_v/F_v)\backslash$Gal$(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$. Le L-groupe local est l'ensemble des éléments de $\prod_{v|p} {}^LG_v$, dont tous les composants ont la même projection dans Gal$(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$. Il suffit donc pour définir φ de définir $\varphi'_v : \mathfrak{W} \longrightarrow {}^LG_v(\mathbf{C})$.

Si $s \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, alors φ'_v envoie s dans la fonction sur Gal$(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ à valeur constante $\varphi_v(s)$. Pour définir $\varphi'_v(w)$ pour $w \in W_{\mathbf{Q}_p}$, il faut choisir un ensemble U de représentants u des classes dans Gal$(\overline{F}_v/F_v)\backslash$Gal$(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) = W_{F_v}\backslash W_{\mathbf{Q}_p}$. Si $w \in W_{F_v}$ on écrit $\varphi_v(w) = a(w) \times \sigma(w)$ où $\sigma(w)$ est l'image de w dans Gal$(\overline{F}_v/F_v)$ et $a(w)$ est dans $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$. Si $w \in W_{\mathbf{Q}_p}$ et $u \in U$ soit $uw = a_u(w)u'$ avec $u' \in U$ et $a_u(w) \in W_{F_v}$. Alors $\varphi'_v(w) = a'(w) \times \sigma(w)$ où $a'(w)$ est la fonction qui envoie la classe $G(\overline{F}_v/F_v)u$ sur $\varphi_v(a_u(w))$. On vérifie sans peine que φ'_v ainsi défini est un homomorphisme.

Enfin la représentation π'_p de $G(\mathbf{Q}_p)$ est un produit tensoriel $\otimes\, \pi'_v$ où π'_v est une représentation irréductible de $G'(F_v)$. Il est bien connu qu'on peut, en général [14], attacher à π'_v un homomorphisme φ_v de $\mathfrak{W}'_v$ dans ${}^LG'(\mathbf{C})$. On construit $\varphi = \varphi(\pi'_p)$ à partir de ces φ_v de la façon qu'on vient d'expliquer.

Nous ne considérons que le cas où p reste premier dans F, et il n'existe donc qu'une place v divisant p. De plus, la restriction de π'_v au groupe des unités de $D \otimes \mathbf{Q}_p$ doit être triviale. Il suit de là que π'_v est de dimension 1. Si $s \times w \in \mathfrak{W}'_v$, alors, d'après la définition,

$$\varphi_v(s \times w) = s\mu(w) \times \sigma(w),$$

où μ est un caractère complexe de W_{F_v}. Le problème est de démontrer que $\varphi = \varphi(\pi'_p)$ est de type A_0 et que ρ_p^M est équivalent à $r \circ \widetilde{\varphi}$. Si φ_v lui-même est de type A_0, on peut attacher à φ_v, ou, plus précisement, à sa composition avec la projection de ${}^L G'_v$ sur son premier facteur GL(2), une représentation ℓ-adique $\widetilde{\varphi}_v$ de dimension 2 de Gal($\overline{F}_v/F_v$). Cette représentation agit dans l'espace X de dimension 2 et la représentation $r \circ \widetilde{\varphi}$ agit dans $V = X \otimes X$. D'après la définition, $\widetilde{\varphi}_v$ sera réductible mais indécomposable et il existera alors une filtration canonique $0 \subsetneqq X_0 \subsetneqq X_1 = X$ de X. Parce que la restriction de $r \circ \widetilde{\varphi}$ à Gal($\overline{F}_v/F_v$) est $\widetilde{\varphi}_v \otimes \widetilde{\varphi}_v$, la filtration induite sur $V, 0 \subsetneqq V_0 \subsetneqq V_1 \subsetneqq V_2$, est canoniquement attachée à la représentation $r \circ \widetilde{\varphi}$, et si ρ_p^M est équivalent $r \circ \widetilde{\varphi}$, il existe une filtration semblable sur l'espace de ρ_0^M. Pour vérifier que ρ_p^M est équivalent à $r \circ \widetilde{\varphi}$, on commence par établir que cette filtration existe, et le seul but de cet exposé est de décrire sa source géométrique dans le formalisme des cycles évanescents. On note que $dim\, V_0 = 1$, tandis que $dim\, V_1 = 3$.

Pour étudier la représentation de Gal($\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p$) dans la cohomologie de S on peut remplacer S par $S \otimes \mathbf{Q}_p$. Ceci fait une fois pour toutes, on dénote la nouvelle variété par S. Cette variété sera la solution d'un problème de modules qu'on pourra formuler sur $\mathbf{Z}_p$. J'admettrai sans démonstration que le problème a une solution qui est un schéma $\mathfrak{S}$ propre sur $\mathbf{Z}_p$ à fibre générale S et à fibre spéciale S_0.

La théorie des modules de Dieudonné nous permettra de décrire S_0 d'une façon concrète et géométrique, et la théorie des déformations des variétés abéliennes nous permettra d'analyser sa situation dans $\mathfrak{S}$. Enfin, cette connaissance acquise, nous utiliserons le formalisme des cycles évanescents pour construire une suite spectrale, que nous étudierons à l'aide des opérateurs de Hecke pour obtenir la filtration cherchée. Le lecteur est averti encore une fois que je ne donnerai qu'une ébauche de la démonstration parce que les détails font encore défaut.

Nous rappelons d'abord les données pour le probléme de modules résolu par $\mathfrak{S}$. Soit Z_v l'anneau des entiers de F_v, et soit O un ordre de D tel que $O_v = O \otimes Z_v$ est l'ordre maximal de $D_v = D \otimes F_v$. Si $X \longrightarrow$ Spec $\mathbf{Z}_p$ est un schéma sur $\mathbf{Z}_p$ la première donnée est une variété abélienne A sur X de dimension 4 et un homomorphisme ψ de O dans l'algèbre des endomorphismes de A sur X, tel que la trace de $\psi(a)$ sur l'espace tangent à l'identité est la trace réduite de a, ou plutôt son image dans $\Gamma^\circ(\hat{\mathcal{O}}(X))$. Le groupe K est égal à K_pK^p, où K_p est le groupe des unités de D_v et K^p est contenu dans $G(\mathbf{A}_f^p)$, $\mathbf{A}_f^p$ étant l'anneau des adèles finis dont le composant en p est 0. Si n est premier à p, soit A_n le noyau de multiplication par n. K^p opère sur

$$Y = \lim_{\substack{\leftarrow \\ n}} \mathrm{Isom}_O(A_n, O/nO)$$

parce qu'il opère sur O/nO. Pour avoir un ensemble complèt de données, il faut ajouter à A et ψ un élément de Y à K^p près.

Pour étudier la fibre spéciale, on prend $X = \mathrm{Spec}\,\kappa$, où κ est un corps algébriquement clos de caractéristique p. Dans ce cas on attache à A son module de Dieudonné $M = M(A)$, sur lequel O opère à droite parce que M est un foncteur contravariant. Non seulement O, mais aussi l'anneau de Witt $W(\kappa)$ opère sur M et, partant, le produit tensoriel $O_\kappa = W(\kappa) \otimes O$. On a supposé que p reste premier dans F. On peut donc identifier O_κ à l'algèbre des paires de matrices

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ pc_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ pc_2 & d_2 \end{pmatrix} \quad a_i, b_i, c_i, d_i \in W(\kappa).$$

O_v lui-même s'identifie aux paires

$$a : \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^\sigma & b^\sigma \\ pc^\sigma & d^\sigma \end{pmatrix},$$

où a, b, c, d sont contenu dans $W(\mathbf{F}_{p^4})$, et

$$a^{\sigma^2} = d,\ d^{\sigma^2} = a,\ b^{\sigma^2} = c,\ c^{\sigma^2} = b.$$

Le symbole σ dénote le Frobenius habituel sur $W(\kappa)$.

Le produit tensoriel N de M et $\mathbf{Q}_p$ s'identifie à l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{x} & \mathfrak{y} \\ \mathfrak{u} & \mathfrak{v} \end{pmatrix}$$

à coefficients dans le corps quotient $\mathfrak{k}$ de $W(\kappa)$. L'action d'un élément de O_κ envoie cette matrice sur

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{y}_1 \\ \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{y}_2 \\ \mathfrak{u}_1 & \mathfrak{v}_1 \\ \mathfrak{u}_2 & \mathfrak{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ pc_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 \\ pc_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

Le module M lui-même s'identifie aux matrices pour lesquelles $\mathfrak{x} \in K_0, \mathfrak{y} \in L_0, \mathfrak{u} \in K_1, \mathfrak{v} \in L_1$, où K_i, L_i sont des réseaux dans l'espace vectoriel de dimension deux sur $\mathfrak{k}$. Ces réseaux sont assujettis à des contraintes, et cela pour deux raisons. M est un module de Dieudonné, et en tant que tel possède l'opérateur F. De plus, l'espace dual de l'espace tangent à l'identité de A s'identifie à M/FM. Donc la trace de $\mathfrak{a}$ sur M/FM est égale à $a + d + a^\sigma + d^\sigma = a + a^\sigma + a^{\sigma^2} + a^{\sigma^3}$.

En se souvenant que F commute avec O et que $F\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^\sigma F, \mathfrak{a} \in W(\kappa)$, on voit qu'on peut supposer que

$$F\colon \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} d\begin{pmatrix} u_1^\sigma & v_1^\sigma \\ u_2^\sigma & v_2^\sigma \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} x_1^\sigma & y_1^\sigma \\ x_2^\sigma & y_2^\sigma \end{matrix} \end{pmatrix}$$

où d est une matrice à coefficients dans $\mathfrak{k}$. Soient

$$A_i = K_i^{\sigma^{-i}}, \quad A_{i+2} = d^{-\sigma^{-2}} L_i^{\sigma^{-2-i}}, \quad 0 \le i \le 1;$$

définissons A_i pour tout i par

$$A_{i+4} = p^{-1} d^{-\sigma^{-2}} d^{-\sigma^{-4}} A_i^{\sigma^{-4}}.$$

Les conditions sur la trace de $\mathfrak{a}$ impliquent alors que

$$pA_{i+1} \subsetneqq A_i \subsetneqq A_{i+1}$$

pour tout i, et la suite $\{A_i\}$ définit un chemin dans l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{GL}(2, \mathfrak{k})$.

Le module M est invariant par rapport à O et O_v, et par conséquent,

$$pL_i \subseteq K_i \quad K_i \subseteq L_i.$$

Ces relations, qui impliquent à leur tour l'invariance, sont équivalentes à

$$pUA_i \subseteq A_{i+2} \subseteq UA_i$$

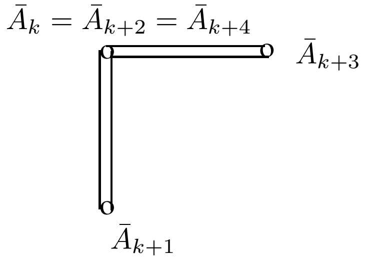
si

$$UA_i = p^{-1} d^{-\sigma^{-2}} A^{\sigma^{-2}}.$$

La longueur du chemin depuis A_i jusqu'à A_{i+4} est 4. Donc le déterminant de d est d'ordre 1, et la distance entre UA_i et A_{i+2} impaire. Nous concluons qu'elle est égale à un. Le choix des coordonnées dans K_0 reste à notre disposition, et nous pouvons remplacer d par $cdc^{-\sigma}$. Donc il n'y a que deux possibilités vraiment distinctes:

$$a) \quad d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}; \qquad b) \quad d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}.$$

Si on identifie deux réseaux dont l'un est un multiple de l'autre, on passe de l'immeuble de $\mathrm{GL}(2, \mathfrak{k})$ à celui de $\mathrm{SL}(2, \mathfrak{k})$. Nous dénotons la classe des réseaux contenant A par $\bar{A}$. Dans le cas a) il y a exactement deux classes $\bar{B}_0, \bar{B}_1$ telles que $\mathrm{dist}(\bar{B}_i, \overline{UB}_i) = 1$, et le chemin $\{\bar{A}_i\}$ est de la forme



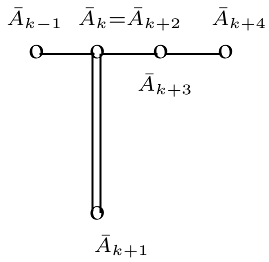
où $\bar{A}_k = \bar{B}_j$ et $\bar{A}_{k+3} = \bar{B}_j$, avec j différent de j'. Nous distinguons deux cas sous-jacents:

$$\text{(a.i)} \quad \bar{A}_{k+1} = \bar{A}_{k+3}; \qquad \text{(a.ii)} \quad \bar{A}_{k+1} \neq \bar{A}_{k+3}.$$

Même avec ces distinctions il y a encore plusieurs possibilités selon le choix de k et j, deux pour a.i) et huit pour a.ii).

Dans le cas b), l'ensemble des $\bar{B}$ tels que $\mathrm{dist}(U\bar{B}, \bar{B}) = 1$ forme un appartement, que nous représentons par une ligne horizontale

L'appartement donné, le chemin $\{\bar{A}_i\}$ a la forme

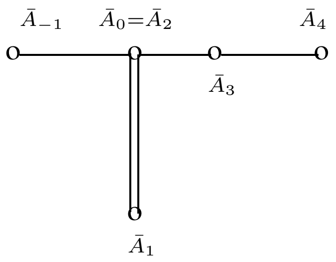


On note l'existence de chemins dégénerés avec $\bar{A}_{k+1} = \bar{A}_{k-1}$ ou $\bar{A}_{k+1} = \bar{A}_{k+3}$, qui seront dits de type b.i), tandis que les chemins non dégenerés seront dits de type b.ii). Le choix de k nous donne quatre possibilités pour le type b.i) et quatre possibilités pour le type b.ii), parce que la possibilité $k = k_0, \bar{A}_{k+1} = \bar{A}_{k+3}$ se confond avec $k = k_0 + 1, \bar{A}_{k+1} = \bar{A}_{k-1}$.

Pour utiliser cette classification des modules de Dieudonné attachés aux points de S_0, il faut lui ajouter une classification plus géométriques des variétés A. Mais d'abord nous observons que le module M étant donné, avec sa représentation par $\{A_k^\circ\}$, on peut construire d'autres modules en remplaçant A_{k+1} par n'importe quel A'_{k+1} contenant A_k et à une distance un de A_k. Un module M' ainsi obtenu est le module de Dieudonné d'une variété abélienne A' isogène à A, l'ordre du noyau de l'isogénie $A \longrightarrow A'$ étant une puissance de p. L'isogénie est défini par l'application $m \longrightarrow pm$ de M dans M'. Pour attacher à A' des données du problème de modules, on observe que O continue à opérer sur A' et que A'_n est isomorphe à A_n si $(n, p) = 1$.

L'ensemble des A'_{k+1} forme un $\mathbf{P}^1(\kappa)$, et nous obtenons une application $\mathbf{P}^1(\kappa) \longrightarrow S_0(\kappa)$; nous admettons sans démonstration qu'elle est définie par un morphisme $\mathbf{P}^1 \longrightarrow S_0$. Il n' y a qu'un de ces $\mathbf{P}^1$ passant par un point de type a.ii) ou b.ii), mais à cause de l'ambiguité du choix de k, deux passant par un point de type b.i) et quatre par un point de type a.i). D'ailleurs, si on prend K^p suffisament petit, on peut supposer que l'application est un plongement.

Ensuite, nous attachons à chaque point de $S_0(\kappa)$ un sous-ensemble de $\{0, 1, 2, 3\}$, l'ensemble de tous les $m, 0 \leq m < 4$, pour lequel il existe un vecteur non nul x dans l'espace tangent tel que $\psi(\alpha)x = \bar{a}^{\sigma^m} x$ pour tout $\alpha \in O$. La barre dénote le résidu modulo p. Cet ensemble se calcule facilement à l'aide du module M. Par exemple, pour le diagramme



les modules M et FM sont les ensembles

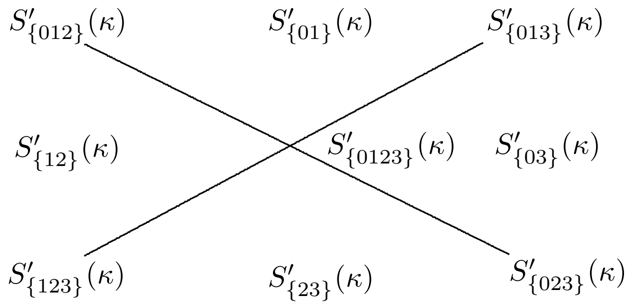
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} * & */p \\ * & * \\ \lambda\epsilon/p + * & */p \\ \lambda/p + * & */p \end{pmatrix} \right\} FM = \left\{ \begin{pmatrix} * & \lambda\epsilon^\sigma/p + * \\ p^* & \lambda + p* \\ * & */p \\ * & * \end{pmatrix} \right\}$$

ϵ est donné mais λ et les astérisques dénotent des éléments arbitraire de $W(\kappa)$. La représentation de O sur M/FM est équivalente à celle donnée par

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^\sigma & b^\sigma \\ pc^\sigma & d^\sigma \end{pmatrix} \right) \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ 0 & \bar{d} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \bar{a}^\sigma & \bar{b}^\sigma \\ 0 & \bar{d}^\sigma \end{pmatrix} \ .$$

L'ensemble attaché à un point de ce type est alors $\{2, 3\}$.

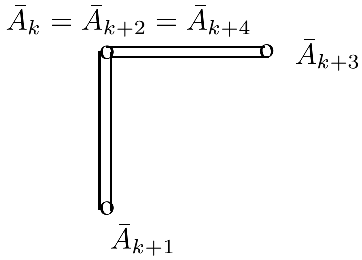
Faisant des calculs semblables pour des autres types, on découvre qu'il n'y a que neuf ensembles possibles. Donc l'ensemble $S_0(\kappa)$ se coupe en neuf morceaux, que nous nous représentons schématiquement:



Le rapport entre les diagrammes et cette partition est le suivant:

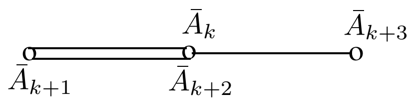
a.i) Un point de type a.i) est contenu dans $S'_{\{0123\}}(\kappa)$.

a.ii) Un point avec le diagramme



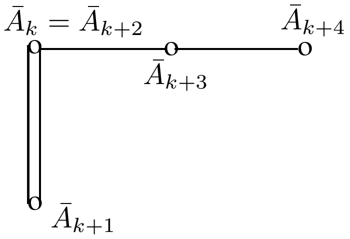
est contenu dans $S'_{\{ij\}}(\kappa)$ si $\{k, k+1, i, j\} \equiv \{0, 1, 2, 3\} (\mathrm{mod}\ 4)$.

b.i) Un point avec le diagramme



est contenu dans $S'_{\{hij\}}(\kappa)$ si $\{k, h, i, j\} \equiv \{0, 1, 2, 3\} (\mathrm{mod}\ 4)$.

b.ii) Un point avec le diagramme



est contenu dans $S'_{\{ij\}}$ si $\{k, k+1, i, j\} \equiv \{0, 1, 2, 3\} (\mathrm{mod}\ 4)$.

Il est intuitivement évident que l'ensemble attaché à des données du problème de modules s'accroît ou reste le même quand ces données se spécialisent, et nous l'admettons sans démon- stration. Par conséquent, $S_X(\kappa)$ est contenu dans $\cup_{Y \subseteq X} S'_Y(\kappa)$, si S_X est la clôture de S'_X pour la topologie de Zariski.

Nous donnerons une esquisse d'une démonstration de la proposition suivante.

Proposition. *La variété S_X est lisse de dimension $4 - |X|$ et $S_X(\kappa) = \cup_{Y \supseteq X} S'_Y(\kappa)$.*

Avec cette proposition, nous pouvons compléter la description de la fibre spéciale, S_0. Elle est la réunion des quatre variétés $S_{\{01\}}, S_{\{12\}}, S_{\{03\}}, S_{\{23\}}$, qui sont lisses, mais pas nécessairement connexes, et de dimension 2. Les variétés $S_{\{ij\}}$ et $S_{\{jk\}}$ se croisent en $S_{\{ijk\}}$. D'ailleurs, par chaque point de $S_{\{ij\}}$ passe un seul des $\mathbf{P}^1$ décrits dessus entièrement contenu dans $S_{\{ij\}}$. Si $\{i, j, k, k'\} = \{0, 1, 2, 3\}$, alors chacun de ces $\mathbf{P}^1$ contient un seul point de $S_{\{ijk\}}$ et un seul point de $S_{\{ijk'\}}$, qui se confondent si et seulement si les points sur le $\mathbf{P}^1$ sont de type a). Donc ces $\mathbf{P}^1$ nous donnent des fibrations $S_{\{ij\}}(\kappa) \longrightarrow S_{\{ijk\}}(\kappa), S_{\{ij\}}(\kappa) \longrightarrow S_{\{ijk'\}}(\kappa)$, dont les fibres sont les $\mathbf{P}^1$ eux-mêmes. Nous admettons que ces fibrations sont définies par des morphismes lisses $S_{\{ij\}} \longrightarrow S_{\{ijk\}}$. Deux courbes distinctes $S_{\{ijk\}}, S_{\{i'j'k'\}}$ se croisent en $S_{\{0123\}}$. Enfin, une composante connexe de S_0 est une réunion $S^\circ_{\{01\}} \cup S^\circ_{\{12\}} \cup S^\circ_{\{23\}} \cup S^\circ_{\{03\}}$ de composantes connexes des $S_{\{ij\}}$, et chaque composante connexe de S_0 contient le même nombre de points de $S_{\{0123\}}$. Pour vérifier ce dernier point, on utilise les correspondances de Hecke, qui agissent transitivement sur les composantes de S_0.

Pour démontrer la proposition, nous considérons le voisinage formel $\mathfrak{S}_s$ d'un point de $S_0(\kappa)$ dans $\mathfrak{S} \otimes_{\mathbf{Z}_p} W(\kappa)$. Il suffit de vérifier les faits suivants.

i) Si $s \in S'_{ij}(\kappa)$, alors $\mathfrak{S}_s$ est isomorphe à Spec $W(\kappa)[[X, Y]]$, avec des indéterminées X et Y.

ii) Si $\{ijk\}$ est un des neuf sous-ensembles il y a exactement deux paires, disons $\{ij\}$ et $\{jk\}$, qui sont contenues dans $\{ijk\}$ et qui se trouvent aussi parmi les neuf sous-ensembles. Si $s \in S'_{\{ijk\}}(\kappa)$, alors $\mathfrak{G}_s$ est isomorphe à Spec $W(\kappa)[[X,Y,U]]/(XU = p)$. Les points donnés par une application

$$\eta : W(\kappa)[[X,Y,U]] \longrightarrow \kappa'$$

avec $\eta(p) = 0$, sont dans $S'_{\{ij\}}(\kappa')$ si $\eta(X)$ est inversible et dans $S'_{\{jk\}}(\kappa')$ si $\eta(U)$ est inversible.

iii) Si $s \in S'_{\{0123\}}(\kappa)$, alors $\mathfrak{G}_s$ est isomorphe à Spec $W(\kappa)[[X_0,X_1,X_2,X_3]]/(X_0X_2 = p, X_1X_3 = p)$. Si

$$\eta : W(\kappa)[[X_0,X_1,X_2,X_3]] \longrightarrow \kappa'$$

et $\eta(p) = 0$, alors η donne un point de $S'_{ij}(\kappa')$ si $\eta(X_i)$ et $\eta(X_j)$ sont inversibles.

Même le lecteur qui ne s'est pas trop fâché de tout que nous avons déjà admis sans démonstrations, ne sera peut-être pas trop convaincu par ce que nous dirons sur la démonstration de ces assertions, parce que nous utiliserons la théorie des déformations des variétés abéliennes (cf. [12], §V) d'une façon qui me semble vraiment inadmissible dans l'état actuel de nos connaissances.

Nous considérons un anneau local $\mathfrak{a}$ à corps quotient κ, et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} W(\kappa) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathfrak{a} \arrow[dl] \\ & \kappa & \end{tikzcd}$$

Puis nous cherchons un sous-module libre $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{m} = M \otimes_{W(\kappa)} \mathfrak{a}$ qui est invariant par rapport à O et tel que sa projection sur $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{a}} \kappa = M \otimes_{W(\kappa)} \kappa = M/pM$ est égal à VM/pM, V étant le décalage. Nous trouverons une solution universelle $\mathfrak{a}, \mathfrak{n}$ de ce problème, et nous admettrons, non sans quelques scrupules, que $\mathfrak{G}_s$ est isomorphe à Spec $\mathfrak{a}$. L'idéal maximal de $\mathfrak{a}$ ne sera même pas un idéal à puissances divisées. La construction de $\mathfrak{a}$ se fait avec des calculs élémentaires, et il suffit de traiter un $s \in S'_{\{0123\}}(\kappa)$.

Supposons que M soit l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} * & */p \\ * & * \\ */p & */p \\ * & */p \end{pmatrix}$$

où un astérisque représente un élément de $W(\kappa)$. On obtient $\mathfrak{m}$ en prenant pour les astérisques des éléments de $\mathfrak{a}$, le dénominateur assumant un sens symbolique. Parce que

$$VM = \begin{pmatrix} * & * \\ p* & * \\ * & */p \\ * & * \end{pmatrix}$$

tandis que $\mathfrak{n}$ est invariant par rapport à O, il existe des éléments x_0, x_1, x_2, x_3 dans l'idéal maximal tels que $\mathfrak{n}$ est l'ensemble des

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu x_2/p \\ \lambda x_0 & \mu \\ \nu x_1/p & \epsilon/p \\ \nu & \epsilon x_3/p \end{pmatrix}$$

où $\lambda, \mu, \nu, \epsilon$ sont des éléments arbitraires dans $\mathfrak{a}$. En plus, l'invariance par rapport à O exige que $x_0 x_2 = p, x_1 x_3 = p$. On obtient $\mathfrak{a}$ en prenant des indéterminées liées par ces relations.

Si on décrit la représentation de O dans $\mathfrak{n}$ par des matrices, utilisant les coordonnées $\lambda, \mu, \nu, \epsilon$, on obtient la somme directe

$$\mathfrak{a} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & bX_0 \\ cX_2 & d \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a^\sigma & b^\sigma X_1 \\ c^\sigma X_3 & d^\sigma \end{pmatrix}.$$

Ceux qui croient que $\mathfrak{G}_s$ est isomorphe à Spec $\mathfrak{n}$ pourront croire aussi que, d'après [11] et [12], le dual de l'espace tangent de l'extension de A à $\mathfrak{G}_s$ est isomorphe à $\mathfrak{n}$. L'affirmation iii) s'ensuit.

Les affirmations i), ii), et iii) nous sont importantes, parce qu'elles sont à la base de nos calculs cohomologiques, et je regrette de ne pouvoir donner pour l'instant une démonstration plus rigoureuse.

Selon [6] - mais on y parle des faisceaux à torsion - il y a une suite spectrale $H^p(S_0, \psi^q)$ qui converge vers la cohomologie ℓ-adique de la fibre générale. La fibre ψ_s^q du faisceau ψ^q au point s de S_0 s'obtient en prenant la q-cohomologie de l'intersection de $\mathfrak{G}_s$ et de la fibre générale S. En nous appuyant sur i), ii), iii) et notre intuition, nous concluons que les ψ_s^q sont donnés par le tableau suivant:

$$\begin{array}{rllll} s \in S'_{\{ij\}} & \psi_s^0 = \mathbf{Q}_\ell & \psi_s^q = 0, \quad q > 0 & & \\ s \in S'_{\{ijk\}} & \psi_s^0 = \mathbf{Q}_\ell & \psi_s^1 = \mathbf{Q}_\ell & \psi_s^q = 0, \quad q > 1 & \\ s \in S'_{\{0123\}} & \psi_s^0 = \mathbf{Q}_\ell & \psi_s^1 = \mathbf{Q}_\ell \oplus \mathbf{Q}_\ell & \psi_s^2 = \mathbf{Q}_\ell & \psi_s^q = 0, \quad q > 2. \end{array}$$

Soient N le nombre des composantes connexes de la fibre spéciale ou de la fibre générale, n le nombre des pointes de $S_{\{0123\}}$ dans une de ces composantes, et g le genre d'une composante connexe d'une des courbes $S_{\{ijk\}}$. Nous allons établir que les dimensions de $H^p(S_0, \psi^q)$ sont données par le tableau suivant:

$$\begin{array}{cccccc}
 & nN & & & & \\
 & 2N & 4gN+2(n-1)N & 4N & & \\
q\uparrow & & & & & \\
 & N & 0 & (n-1)N+4N & 4gN & 4N \\
 & & & p\longrightarrow & &
\end{array}$$

Le N intervient pour une raison évidente et nous pouvons remplacer S_0 dans nos considérations par une composante connexe S_0°. Les valeurs dans la ligne en haut sont évidentes.

Le faisceau ψ^0 est le faisceau constant. Pour calculer les valeurs dans la ligne en bas, nous utiliserons la désingularisation de S_0° qui est la somme directe des $S_{\{ij\}}^\circ$ contenus dans S_0°. Nous calculons les nombres de Betti de $S_{\{ij\}}^\circ$ à l'aide de la suite spectrale associée à la filtration $S_{\{ij\}}^\circ \longrightarrow S_{\{ijk\}}^\circ$, dont les fibres sont des $\mathbf{P}^1$, et obtenons $b_0 = 1, b_1 = g, b_2 = 2, b_3 = g, b_4 = 1$. D'autre part on peut les calculer comme les nombres de Betti du faisceau $R_\varphi^0\mathbf{Q}_\ell$ si $\varphi : \coprod S_{\{ij\}}^\circ \longrightarrow S_0^\circ$. On a une suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathbf{Q}_\ell \longrightarrow R_\varphi^0\mathbf{Q}_\ell \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

Le faisceau E est concentré sur la réunion des courbes $S_{\{ijk\}}^\circ$ et se décrit facilement.

Nous calculons les nombres de Betti du faisceau E, et puis, au moyen de la suite exacte longue, ceux du faisceau constant $\psi^0 = \mathbf{Q}_\ell$. Nous utilisons une fois encore une désingularisation

$$\eta : \coprod S_{\{ijk\}}^\circ \longrightarrow \cup S_{\{ijk\}}^\circ$$

et une suite exacte

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow R_\eta^0\mathbf{Q}_\ell \longrightarrow E' \longrightarrow 0.$$

E' est concentré sur $S_{\{0123\}}$ et ses fibres sont des $\mathbf{Q}_\ell$. Il n'y a qu'une seule condition qu'une section de E sur $\cup S_{\{ijk\}}^\circ - S_{\{0123\}}$ s'étend à $\cup S_{\{ijk\}}^\circ$, et par conséquent, $dim\, H^\circ(E) = 3$. Il s'ensuit que $dim\, H^1(E) = 4g + (n-1)$.

Nous rappelons que les nombres de Betti de la fibre générale peuvent se calculer par les méthodes complexes de [2], et qu'en particulier $dim\, H^1(S(\mathbf{C}), \mathbf{C}) = dim\, H^1(S, \mathbf{Q}_\ell) = 0$. Il résulte de la suite spectrale que $dim\, H^1(\psi^0) = 0$. Nous obtenons alors

$$0 \to H^1(S_0^\circ, R_\varphi^0\mathbf{Q}_\ell) \to H^1(E) \to H^2(\psi^0) \to H^2(S_0^\circ, R_\varphi^0\mathbf{Q}_\ell) \to H^2(E) \to H^3(\psi^0) \to H^3(S_0^\circ, R_\varphi^0\mathbf{Q}_\ell) \to 0,$$

et

$$dim\, H^4(\psi^0) = dim\, H^4(S_0^\circ, R^0_\varphi \mathbf{Q}_\ell) = 4.$$

Il n'y a que les dimensions de $H^2(\psi^0)$ et $H^3(\psi^0)$ qui restent inconnues dans la ligne du bas. Elles sont les nombres donnés si la flèche

$$H^2(S_0^\circ, R^0_\varphi \mathbf{Q}_\ell) \longrightarrow H^2(E)$$

est surjective. On peut expliciter facilement la flèche, et on voit qu'elle est surjective si les classes de cohomologie dans $H^2(S^\circ_{\{ij\}}, \mathbf{Q}_\ell)$ attachées à $S_{\{ijk\}}$ et $S_{\{ijk'\}}$ sont différentes. Si elles ne le sont pas, l'image est de dimension 3, et la ligne en bas devrait être

$$N \qquad 0 \qquad (n-1)N + 5N \qquad 4gN + N \qquad 4N.$$

Pour écarter cette possibilité, il nous faudra faire intervenir les opérateurs de Hecke.

Mais d'abord, considérons la ligne du milieu. Sur la réunion, $\cup S^\circ_{\{ijk\}}$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \varphi^1 \longrightarrow \psi^1 \longrightarrow E'' \longrightarrow 0.$$

où φ^1 est localement constant de dimension 1, et E'', dont les fibres sont des $\mathbf{Q}_\ell$, est concentré sur $S_{\{0123\}}$. La dimension de $H^2(\varphi^1) \simeq H^2(\psi^1)$ est égale à 0 ou à 4, et elle est 4 si et seulement si φ^1 est le faisceau constant. Mais on sait déjà que, dans la suite spectrale qui converge vers $H^*(S, \mathbf{Q}_\ell), dim\, E_2^{4,0} = 4N$, tandis que $dim\, E_\infty^{4,0} = N$. La dimension ne peut tomber qu'en passant de $E_2^{4,0}$ à $E_3^{4,0}$, et, par conséquent, $dim\, E_2^{2,1} \geq 3N$: c'est-à-dire que $dim\, H^2(\psi^1) \geq 3$. Nous concluons que φ^1 est le faisceau constant, et, puisqu'il est alors intuitivement évident que $dim\, H^2(\psi^1) = 2$, nous pouvons ensuite calculer toutes les dimensions dans la ligne au milieu. Des dimensions données pour les $E_2^{p,q}$, même si on tient compte des deux possibilités pour la ligne en bas, il résulte que la dimension de $H^2(S, \mathbf{Q}_\ell)$ est $4(n-1)N + 2N$, car les dimensions nous permettent de calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré.

La suite spectrale nous donne une filtration de $H^2(S, \mathbf{Q}_\ell)$. Les opérateurs de Hecke agissent non seulement sur S mais aussi sur $\mathfrak{S}$ et la fibre spéciale et, par conséquent, sur la suite spectale. La découpant suivant les valeurs propres des opérateurs de Hecke, nous obtenons de toutes petites suites spectrales qui convergent vers les espaces sous-jacents aux représentations ρ_p^M, et qui nous donnent la filtration cherchée de ces espaces.

Pour construire le tableau des dimensions, il nous a fallu construire les $E_2^{p,q}$ à partir des espaces $H^0(S_0) \simeq H^0(S), H^0(S_{\{0123\}})$, et $H^1(S_{\{ijk\}})$. On peut décider facilement où ces espaces interviennent dans le tableau, parce que $H^1(S_{\{ijk\}})$ contribue gN aux dimensions, tandis que $H^0(S)$ contribue N, et $H^0(S_{\{0123\}})$ contribue nN.

Les valeurs propres dans $H^0(S)$ sont celles provenant de N représentations automorphes de dimension 1 de $G(\mathbf{A})$ qui sont triviales sur K. Soient D_{--} l'algèbre de quaternions obtenue en tordant D aux deux places infinies, et G_{--} le groupe sur $\mathbf{Q}$ associé à D_{--}. Parce que les variétés abéliennes définissant les pointes de $S_{\{0123\}}$ sont isogènes à un produit de deux courbes elliptiques super-singulières, nous pouvons identifier $S_{\{0123\}}$ avec la réduction modulo p de la variété de Shimura attachée à G et au groupe $K_{--} = K \subseteq G(\mathbf{A}_f) = G_{--}(\mathbf{A}_f)$. C'est une variété de dimension 0.

Les valeurs propres des opérateurs de Hecke sur $H^0(S_{\{0123\}})$ sont celles provenant des représentations de $G_{--}(\mathbf{A})$ qui sont triviales sur $G_{--}(\mathbf{R})$, et qui contiennent la représentation triviale de K_{--}. D'après §16 de [7], il y a un plongement de l'ensemble des représentations automorphes de $G(\mathbf{A})$ ou de $G_{--}(\mathbf{A})$ dans l'ensemble des représentations automorphes de $\mathrm{GL}(2, \mathbf{A}_F)$, qui donne un plongement de l'ensemble des représentations automorphes de $G_{--}(\mathbf{A})$ dans l'ensemble de celles de $G(\mathbf{A})$. Les représentations de dimension 1 de $G_{--}(\mathbf{A})$ s'envoient sur celles de dimenion 1 de $G(\mathbf{A})$, et les autres, au moins celles qui contiennent la représentation triviale de K_{--}, sur les représentations de $G(\mathbf{A})$ auxquelles sont attachés les ρ^M. Les valeurs propres des opérateurs de Hecke sont conservées par le plongement. Les représentations de dimension infinie et celles de dimension 1 donne des valeurs propres différentes.

Supposons que nous puissions vérifier que les valeurs propres sur les $H^1(S_{\{ijk\}})$ sont encore différentes. Alors de la suite spectrale totale, nous obtenons les pièces suivantes.

i) N suites, attachées chacune à une représentation de $G(\mathbf{A})$ de dimension 1,

$$E_2^{p,q}: \quad \begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 2 & 0 & 4 & & \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 4. \end{array}$$

Tenant compte des égalités: $E_3^{2,1} = E_\infty^{2,1} = 0, E_3^{0,1} = E_\infty^{0,1} = 0$, et $dim\, E_3^{4,0} = 1$, nous déduisons le tableau suivant pour les dimensions des $E_3^{p,q}$

$$E_3^{p,q}: \quad \begin{array}{ccccc} 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1. \end{array}$$

Par conséquent, la suite dégénère ici. Il faut se souvenir, d'ailleurs, que nous avons trouvé une autre possibilité pour la ligne en bas, qui donnerait:

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & & & & \\ E_2^{p,q}: & 2 & 0 & 4 & & \\ & 1 & 0 & 5 & 1 & 4. \end{array}$$

Avec ces dimensions, ou bien $E_2^{3,0}$ ou bien $E_2^{2,1}$ survivrait jusqu'à la limite, ce qui est impossible.

ii) $(n-1)N$ suites, attachées chacune à une représentation de dimension infinie:

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & & & & \\ E_2^{p,q}: & 0 & 2 & 0 & & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0. \end{array}$$

La suite dégénère, et donne la filtration cherchée.

iii) Ce qui reste est:

$$\begin{array}{rccccc} & 0 & & & & \\ E_2^{p,q}: & 0 & 4gN & 0 & & \\ & 0 & 0 & 0 & 4gN & 0. \end{array}$$

Si elle donnait de la cohomologie, elle en donnerait en degré 3, et, par conséquent, tous les $E_3^{p,q}$ sont 0.

Les valeurs propres donnant les suites spectrales ii) sont celles définies par des représentations π de dimension infinie, dont la représentation correspondante Π de $\mathrm{GL}(2, \mathbf{A}_F)$ a une composante locale Π_v qui est spéciale, v étant la place de F qui divise p. Pour vérifier que les valeurs propres intervenant dans les $H^1(S_{\{ijk\}})$ ne sont pas imbriquées avec celles des cas i) et ii), il suffit de démontrer qu'elles sont définies par des représentations automorphes Π de dimension infinie de $\mathrm{GL}(2, \mathbf{A}_F)$ qui ont une composante locale Π_v non ramifiée, car on peut alors appliquer le théorème fort de multiplicité 1 [3].

Soit D_{+-} l'algèbre de quaternions obtenue en tordant D à une des places infinies de F et en v, et soit G_{+-} le group correspondant. Nous pouvons identifier $G_{+-}(\mathbf{A}_f^p)$ à $G(\mathbf{A}_f^p)$, tandis que $G_{+-}(\mathbf{Q}_p) = \mathrm{GL}(2, F_v)$. Soit $K_{+-} \subseteq G_{+-}(\mathbf{A}_f)$ le produit d'un sous-goupe compact maximal de $\mathrm{GL}(2, F_v)$ et du groupe K^p. La veriété de Shimura S_{+-} attachée à G_{+-} et K_{+-} est une courbe définie sur F, et on anticipe qu'elle a bonne réduction en v. Les opérateurs de Hecke définis par les éléments de $G(\mathbf{A}_f^p) = G_{+-}(\mathbf{A}_f^p)$ agissent sur $H^1(S_{+-})$ et les valeurs propres sont celles définies par des représentations automorphes $\prod$ de $\mathrm{GL}(2, \mathbf{A}_F)$ dont la composante locale $\prod_{\vee}$ est non ramifiée, et qui contient la représentation triviale de $K_{+-} \cap G_{+-}(\mathbf{Q}_p)$.

Il suffirait de vérifier qu'il y a un isomorphisme de $S_{\{ijk\}}$ avec la réduction de S_{+-} en v qui respecte les opérateurs de Hecke. Le corps de définition de l'isomorphisme n'est pas important. Heureusement, on peut se débrouiller avec moins. La variété S_{+-} ne provient pas d'un problème de modules, mais elle est une sous-variété ouverte d'une telle variété de Shimura, disons $\tilde{S}_{+-}$. Nous ne changeons pas beaucoup les opérateurs de Hecke en élargissant la variété, et il suffit de comparer la fibre spéciale de $\tilde{S}_{+-}$ et les courbes sur la fibre spéciale d'un élargissement analogue $\tilde{S}$ de S.

Le lecteur ne s'étonnera pas qu'il s'agisse encore de calculs et d'idées que nous n'avons qu'esquissés, et je me contenterai de les présenter d'une façon très brève. On examine le module de Dieudonné d'une variété abélienne A définissant un point de la fibre spéciale de $\tilde{S}_{+-}$, et on trouve qu'en divisant A par un sous-groupe dont l'ordre est une puissance de p on obtient des données pour le problème résolu par $\tilde{S}$. Donc nous obtenons un morphisme de la fibre spéciale de $\tilde{S}_{+-}$ dans celle de $\tilde{S}$. Parce que l'étude des modules de Dieudonné se fait comme ci-dessus, je m'arrêterai après que j'aie décrit les problm̀es de modules auxquels $\tilde{S}$ et $\tilde{S}_{+-}$ sont attachés.

Nous choissons une extension quadratique totalement imaginaire E de F contenue dans D, et dans laquelle p reste premier. Soit O_E l'intersection de E et O. Soit $\langle u, v\rangle$ la forme hermitienne sur D, un espace vectoriel sur E, donnée par $\langle u, v\rangle = \operatorname{trace}_{F/\mathbf{Q}}\operatorname{trace}_{D/F}\check{v}Tu$, où $v \to \check{v}$ est l'involution canonique sur D, et $T \in E$ satisfait l'équation: $T^v = -T$. Soit $\varpi \in O$ un générateur de l'idéal maximal de O_v, et supposons que $\langle u, v\rangle \in \mathbf{Z}_p$ pour tout $v \in O_v$ si et seulement si $\varpi \in O_v$. Une telle forme existe. Soit

$$\tilde{G} = \{g \in \mathrm{Isom}_E(D) \mid \langle gu, gv\rangle \equiv \lambda(g)\langle u, v\rangle, \lambda(g) \in G_m\}.$$

Fixons un sous-groupe compact $\tilde{K}$ ouvert de $\tilde{G}(\mathbf{A}_f)$. Les données pour $\tilde{S}$ sont:

i) une variété abélienne de dimension 4.

ii) un homomorphisme ψ de O_E dans l'agèbre des endormorphismes de A, tel que la trace de $\psi(\alpha)$ sur l'espace tangent est $\operatorname{trace}_{E/\mathbf{Q}}(\alpha)$.

iii) une polarisation $\lambda : A \to \check{A}$, qui induit $\psi(x) \to \psi(\check{x})$ dans $\psi(O_E)$, et dont le noyau est un sous-groupe de A_p. λ est donné à un élément de $F^\times$ près.

iv) Un ensemble de O_E-isomorphismes compatibles de A_n avec $O/nO,\ (n, p) = 1$, dénotés φ_n et donnés à $\tilde{K}$ près. Les φ_n sont assujettis à la condition

$$\langle x, \lambda(y)\rangle = \langle c_n\varphi_n(x), \varphi_n(y)\rangle, \qquad c_n \in (O_F/nO_F)^\times.$$

Nous supposons que $\tilde{K} = \tilde{K}_p\tilde{K}^p$, où $\tilde{K}_p$ est un sous-groupe compact maximal de $\tilde{G}(\mathbf{Q}_p)$ et $\tilde{K}^p \subseteq \tilde{G}(\mathbf{A}_f^p)$. Les données pour $\tilde{S}_{+-}$ sont analogues.

Nous remplaçons D par D_{+-}, et nous plongeons E dans D_{+-}. Nous remplaçons O par un ordre O' de D_{+-} qui est isomorphe à O en dehors de v et maximal en v, et T par T', pour obtenir $\{u, v\}$ au lieu de $\langle u, v\rangle$. Nous supposons que $\{u, v\} \in \mathbf{Z}_p$ pour tout $v \in O'_v$ si et seulement si $u \in O'_v$. La condition sur la trace de $\psi(\alpha)$ change. La trace de $\psi(\alpha)$ doit être égale à $2\psi_1(\alpha) + \psi_2(\alpha) + \psi_3(\alpha)$, où ψ_2 et ψ_3 sont les plongements de E dans $\overline{\mathbf{Q}} \subseteq \mathbf{C}$ au dessus de la place infinie de F où D est déployé, et ψ_1 est un des plongements au dessus de l'autre place.

Ajouté en février, 1979

1. D'ailleurs, d'après des résultats récents de Kutzko, ces difficultés n'existent plus.
2. J'ai reçu en janvier, 1979 une lettre, envoyée en octobre, 1978, de Thomas Zink à Berlin, qui donne des démonstrations rigoureuses d'une grande partie de ce que j'ai raconté dans cette conférence. Mail il lui a fallu modifier légèrement quelques énoncés.

Références

1. A. Borel, *Automorphic L-functions*, à paraître dans Proc. A.M.S. Summer Institute, Corvallis.

2. ——— et N. Wallach, *Seminar on continuous cohomology*, à paraître dans les Annals of Math. Studies.

3. W. Casselman, *On some results of Atkin and Lehner*, Math. Ann. t. 201 (1973).

4. ———, *The Hasse-Weil zeta-function of some moduli varieties*, à paraître dans Proc. A.M.S. Summer Institute, Corvallis.

5. I.V. Cherednik, *L'uniformisation des courbes algébriques par des sous-groupes arithmétiques de $PGL_2(k_w)$ à quotient compact* (en russe), Mat. Sbor., t. 100 (1976).

6. P. Deligne, *Exposé* I *de* SGA7.I, Springer Lecture Notes 288.

7. H. Jacquet et R.P. Langlands, *Automorphic forms on $GL(2)$*, Springer Lecture Notes 114.

8. R.P. Langlands, *Modular forms and ℓ-adic representations*, dans *Modular functions of one variable* II, Springer Lecture Notes 349.

9. ———, *On the zeta-functions of some simple Shimura varieties*, à paraître dans le Jour. Can. des Math.

10. ———, *Automorphic representations, Shimura varieties, and motives*, à paraître dans Proc. A.M.S. Summer Institute, Corvallis.

11. B. Mazur et W. Messing, *Universal extensions and one-dimensional crystalline cohomology*, Springer Lecture Notes 370.

12. W. Messing, *The crystals associated to Barsotti-Tate groups, with applications to abelian schemes*, Springer Lecture Notes 264.

13. D. Mumford, *An analytic construction of degenerating curves over complete local rings*, Comp. Math., t. 24 (1972).

14. J. Tunnell, *On the local Langlands conjecture for* GL(2), *Inv. Math., t. 46 (1978).*