LAUDATIO

Es ist mir eine große Freude, diese Laudatio zum Anlaß der Verleihung des Christian von Staudt-Preises an Günter Harder halten zu dürfen, denn ich bin seit mehr als dreißig Jahren mit ihm befreundet und verehre ihn sehr, nicht allein als Mathematiker sondern auch als Menschen.

Zu sagen, Günter Harder ist Mathematiker, ist ja wahr aber unvollständig. Er ist Zahlentheoretiker; er beschäftigt sich also mit den tieferen Eigenschaften der natürlichen Zahlen, $1, 2, 3, 4$, usw. Obwohl es übertrieben wäre, hinzuzufügen, die Zahlentheorie ist der Kern der Mathematik, weil die Geometrie oder die Infinitesimalrechnung in demselben Grad zentral sind, ist es doch meines Erachtens wahr, daß, wenn in der Mathematik ein Geheimnis steckt, das so tiefliegend ist wie in der Physik die Quantenmechanik, dann liegt es in der Zahlentheorie. Die Quantentheorie lehrt, daß die allgegenwärtigen, sogar alltäglichen Erfahrungen und Ereignisse unserer Welt nur durch Gesetze und Prinzipien zu erklären und zu verstehen sind, die auf den ersten Blick, und gar auch auf den zweiten, überhaupt keine, einem normalen Menschen verständliche Beziehung haben zu dem, was er in seiner Umgebung oder sogar in seinem Labor sieht und hört. So scheint es jetzt, nach mehr als zweitausend Jahren Erfahrung, auch in der Mathematik zu sein, obwohl wir immer noch weit davon entfernt sind, die einfachen, in den letzten Jahrzehnten durch allerhand Entdeckungen und Vermutungen nahegelegten Prinzipien ergründet zu haben. Da Günter Harder ein moderner Zahlentheoretiker ist, dessen Ziel es war und bleibt, diese Luftschlösser in feste Lustschlösser oder, wenn dies Wort als zu frivol Ihnen mißfällt, stattliche Wohnsitze des menschlichen Geistes zu verwandeln, muß ich einen wesentlichen Teil dieser Laudatio einer Einführung in die moderne Zahlentheorie widmen.

Ich hole weit aus, zur Zeit Platons oder sogar Pythagoras, aber greife auch sofort weit nach vorn, ganz zum Ende des zwanzigsten Jahrhunderts, indem ich zwei Ihnen bekannte Gleichungen hinschreibe,

$$x^2 = 2, \tag{1}$$

$$x^n + y^n = z^n. \tag{2}$$

Wir betrachten zuerst die Gleichung (1), die für die Entwicklung der altgriechischen Mathematik, und zwar der Mathematik überhaupt, von ungeheuerer Bedeutung war. Diese Gleichung hat keine ganzzahlige Lösung. Wie den Pythagoreern bekannt war, und wie wir auch ohne große Mühe zeigen könnten, gibt es sogar keinen Bruch

x, der diese Gleichung erfüllt. Das heißt, um ein modernes Wort und ein modernes Zeichen zuverwenden, die Lösung $\sqrt{2}$ dieser Gleichung ist irrational. Diese Zahl muß in der Mathematik, besonders in der Geometrie, zugelassen werden, denn sie ist die Länge der Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge 1. Folglich, zunächst zum Leidwesen der alten Griechen obwohl es letztendlich auch zu ihrem Glanz beigetragen hat, führt die Untersuchung der einfachsten Gleichungen nicht allein zur Untersuchung ihrer rationalen Lösungen sondern unvermeidlich zur Untersuchung ihrer irrationalen Lösungen.

In seinem Aufsatz *Theaitetos* zeigt Platon, der die Mathematik liebte und achtete, so daß sie an vielen Stellen in seinen Schriften vorkommt, deutlich seine Bewunderung der Entdeckung des Irrationalen, indem er den jungen Theaitetos, einen der ersten Forscher des Irrationalen, als Gesprächspartner des Sokrates, bei dessen Versuch das Wesen der Kenntnis an den Tag zu bringen, wählt.

Bei der Gleichung (2) ist die Beziehung des Irrationalen zum Rationalen viel tiefer. Erstens ist in der Gleichung n eine vorgegebene positive ganze Zahl, und es werden drei ganze positive oder negative Zahlen x, y und z gesucht, die die Gleichung erfüllen. Allgemeiner können wir Brüche

$$x = \frac{a}{b}, \quad y = \frac{c}{d}, \quad z = \frac{e}{f}$$

suchen, aber wenn wir diese Zahlen mit ihrem größten gemeinsamen Nenner multiplizieren, bekommen wir eine ganzzahlige Lösung. Zweitens ist eine Lösung mit einer der drei Zahlen gleich Null trivial und uninteressant, zum Beispiel, $x = m$, $y = 0$, $z = m$, wobei m eine beliebige ganze Zahl ist. Drittens ist der Fall, $n = 1$ auch uninteressant, denn $z = x + y$ ist ganzzahlig, wenn x und y es sind.

Der Fall $n = 2$ ist auch atypisch, denn in diesem Fall können wir gemäß einem Satz, der bei Euklid steht, alle Lösungen explizit aufschreiben. Bis auf die Reihenfolge ist

$$x = m(k^2 - l^2), \qquad y = 2mkl, \qquad z = m(k^2 + l^2),$$

wobei k, l und m ganze Zahlen sind.

Dagegen, wie Fermat im siebzehnten Jahrhundert vermutet hat, gibt es für $n > 2$ überhaupt keine nichttriviale Lösung. Fermat selbst hat anscheinend diese Aussage für $n = 4$ und wohl auch $n = 3$ beweisen können. In seinen Beweisen treten nur ganze Zahlen auf. Trotzdem, bei den allgemeineren Beweisen und gewiß für die volle Lösung des Problems ist die Betrachtung verschiedener aus der Gleichung abgeleiteter irrationaler Zahlen unentbehrlich.

Die vollständige Lösung vollzieht sich über einen Umweg. Wenn es für $n > 2$ eine nichttriviale Lösung gebe, dann existiere auch eine *elliptische Kurve* besonderer Art, und, wenn wir gewisse dieser Kurve zugehörige irrationale Zahlen betrachten, dann sehen wir ein, daß eine *automorphe Form* mit unmöglichen Eigenschaften, so daß es sie überhaupt nicht geben kann, zu Tage tritt. Folglich hat die Gleichung (2) für $n > 2$ keine nichttriviale Lösung. Auf diesen Beweis wollen wir hier nicht näher eingehen, aber zwei Worte sind auch aufgetreten, die Ihnen wohl noch unbekannt waren, die aber in der Arbeit Günter Harders oft vorkommen: automorphe Form und elliptische Kurve.

Beispiele von elliptischen Kurven finden wir in einer allen zum Lesen zu empfehlenden Rede Harders vor der Rheinisch-Westfälischen Akademie der Wissenschaften im Jahr 1983. Er beschreibt eine wichtige Vermutung für elliptische Kurven an Hand der Kurven

$$(3) \qquad y^2 = x^3 + Dx, \qquad D \text{ ganz},$$

für die rationale Lösungen gesucht werden, oder was auf dasselbe ankommt, ganzzahlige Lösungen von $y^2z = x^3 + Dxz^2$. Die einfache Lösung $x = y = 0$ wird beiseite gelassen. Als Beispiel erwähnt er, daß für $D = 4721^2$, einer seiner Schüler die Lösung

$$x = \left(\frac{39 \cdot 89}{80}\right)^2, \qquad y = \frac{39 \cdot 89 \cdot 32527841}{80^3}$$

zu (3) gefunden hat. Aus seiner Rede können wir schließen: Erstens, daß es zumindest sehr schwer ist, zu erkennen, ob eine vorgegebene Gleichung eine ganzzahlige oder rationale Lösung besitzt, und zweitens, daß es viel schwerer wäre, eine Formel für alle Lösungen, ähnlich der für die Lösungen der Gleichung (2) mit n=2, anzugeben. Die Rede läßt aber die Hoffnung zu, daß in einem tieferen Sinn und in einer sehr entfernten Zukunft es möglich sein wird, sämtliche Lösungen einer vorgegeben diophantischen Gleichung zu überblicken.

Günter Harder, der zum Nachdenken neigt, hat inzwischen, auf Grund seiner früheren Erfahrung mit der Theorie der automorphen Formen, über diesen Problemkreis viel nachgedacht. Um Ihnen klar zu machen, was er überlegen mußte, mache ich Sie zunächst auf die geometrischen, analytischen und topologischen Möglichkeiten aufmerksam, die elliptische Kurven, und implizit auch andere Gleichungssysteme, in sich bergen. Nachher möchte ich Harders eigene Entwicklung und den historischen Boden, auf dem sie zustandegekommen ist, kurz beschreiben.

Die Gleichung (3) definiert eine Kurve entweder in der gewöhnlichen Ebene, in der die Koordinaten reell sind oder in einer, für viele mathematische Zwecke geeigneteren komplexen Ebene, in der die Koordinaten komplex sein dürfen und die eigentlich keine Ebene ist. Geometrisch gesehen ist die Kurve selbst dann zwei-dimensional, eine Riemannsche Fläche. In den Bildern sind die Kurven sowie die Flächen mit den darauf liegenden Kurven gezeigt, sowohl für $D > 0$ wie auch für $D < 0$. Wie sehr früh in der Theorie der Kegelschnitte gezeigt wurde, ist es für unseren Zweck günstig, einen Punkt im Unendlichen zur Kurve oder zur Fläche hinzuzufügen, so daß topologisch gesehen die Kurve eine Schlinge oder zwei Schlingen bildet.

Diese Schlingen können auf der Fläche nicht zu einem Punkt zusammengezogen werden. Sie sind gewiß nicht die einzigen Schlingen dieser Art. Es gibt auch viele andere, die zunächst nur eine topologische, aber keine unmittelbare algebraische Bedeutung haben. Ihre gegenseitigen Beziehungen sind für die Arithmetik, nämlich die Zahlentheorie, auf der Kurve sehr wichtig. Das betreffende Stichwort, das Ihnen gleich begegnen wird, wenn Sie die lehrreiche Monographie Harders mit dem wenig ansprechenden Titel *Eisensteinkohomologie und die Konstruktion gemischter Motive* lesen, ist *Betti-Kohomologie*.

Andererseits gibt es auch auf der Kurve, oder auf der Fläche, Integrale, z. B.

$$\int_a^z \frac{dx}{y} = \int_a^z \frac{dx}{\sqrt{x^3 + Dx}}.$$

Diese sind rein algebraische Gegenstände, die Sie gewiß kennen, wenn Sie Ingenieur oder Physiker sind, denn diese elliptischen Integrale sind in der Praxis von großer Wichtigkeit. Für uns ist das Stichwort jetzt, *de Rham-Kohomologie*, das die Bedeutung dieser Integrale für die Arithmetik und die Geometrie hervorhebt.

Schließlich, wenn man die Fläche ansieht, bemerkt man, daß sie wie ein Schlauch aussieht, so daß es möglich ist, Überlagerungen der Fläche einzuführen, zwei-, drei-, oder mehrfache Ärmel, die man über die Fläche anzieht, und die dann selbst Flächen oder, algebraisch gesehen, Kurven sind, die auch durch eine Gleichung definiert werden können. Die Gleichungen sind aber oft wesentlich komplizierter als die Gleichung der elliptischen Kurve selbst und werden irrationale Koeffizienten haben. Sie besitzen also gleichzeitig eine zahlentheoretische und eine topologische Bedeutung. Das dritte, sie betreffende, Stichwort ist *étale Kohomologie*. Es ist das Zusammenspiel dieser drei Kohomologien, das uns erlauben soll, die Struktur der ganzzahligen Lösungen einer gegebenen Gleichung oder eines gegebenen Gleichungssystems vorherzusagen.

Insbesondere ist es möglich ihnen Funktionen zuzuordnen, die L-Funktionen oder ζ-Funktionen heißen und deren Werte an gewissen Stellen ein wesentlicher Teil der Vorhersage bilden. Ich will auf ihre Definition nicht eingehen, da sie von den irrationalen Koeffizienten, die bei den Überlagerungen vorkommen, in einer nur schwer übersichtlichen Weise abhängen. Ich möchte nur des Namensgebers der heute verliehenen Preise gedenken, indem ich Sie an den von Staudt-Clausen-Satz erinnere, der die einfachste dieser Funktionen, die Riemannsche ζ-Funktion, betrifft und der auf den letzten Seiten der erwähnten Monographie Harders vorkommt.

Wenn die einfache Funktion

$$\frac{x}{e^x - 1}$$

als Potenzreihe entwickelt wird, erhalten wir die Bernoullizahlen,

$$B_1 = 1/6,\ B_2 = 1/30,\ B_3 = 1/42 = \dots.$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_1}{2!}x^2 - \frac{B_2}{4!}x^4 + \frac{B_3}{6!}x^6 - = \dots$$

Der von Staudt-Clausen-Satz besagt, daß die Differenz zwischen $(-1)^k B_k$ und der Summe der Brüche $1/p$ über alle Primzahlen p, für die $p-1$ die Zahl $2k$ teilt, eine ganze Zahl ist. Zum Beispie

$$-B_1 = -\frac{1}{6} = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -1 + \sum_{p-1|2} \frac{1}{p},$$

oder

$$B_2 = \frac{1}{30} = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = -1 + \sum_{p-1|4} \frac{1}{p}.$$

Harders eigene Überlegungen beziehen sich nicht unmittelbar auf elliptische Kurven, sondern auf verwandte Probleme. Soweit ich weiß, ist er in derselben Lage wie jeder Forscher auf dem Gebiet. Was er macht ist ohne Zweifel zentral, aber ob es die Lösungen einer Gleichung wie (3) unmittelbar berührt ist noch ungewiß. Ich bin selbst überzeugt, daß wenn die Menschheit nicht untergeht und ihr die Neigung zu harten geistigen Anstrengungen nicht abhanden kommt, sie einst die hehre Gegend der Zahlentheorie in ihrem vollen Glanz in dieser Art wird überblicken können

Hinsichtlich der Theorie der diophantischen Gleichungen erinnert die heutige Lage an die Lage der Theorie der algebraischen Irrationalitäten am Ende des achtzehnten Jahrhunderts. Viel wurde geahnt und nichts war klar. Mit Gauß' Entdeckung der Konstruktion des Siebzehnecks mit Lineal und Zirkel am Ende des Jahrhunderts waren diese Ideen herangereift. Obwohl diese Entdeckung, die nicht allein den Mathematikern, sondern der ganzen geistigen Welt in dem unter anderen von Goethe und Schiller ausgegebenen Intelligenzblatt der Allgemeinen Literatur-Zeitung angeboten wurde, oft als Leistung eines schlichten Wunderkinds dargestellt ist, ist es eigentlich nicht so. Gauss war zu der Zeit mit achtzehn Jahren gewiß sehr jung, aber schon ein gebildeter Mathematiker mit Zugang zu einer sehr gut ausgestatteten Bibliothek, den er reichlich nutzte, so daß er gewiß eine gute Kenntnis der Literatur des Jahrhunderts hatte, zum Beispiel, der Schriften von Lagrange, Legendre oder Vandermonde. Seine Leistung war fast nur nebenbei eine Leistung in der elementaren Geometrie. Sie war eigentlich ein großer Beitrag zur Zahlentheorie und zur Theorie der irrationalen Zahlen, der für die herrlichen Beiträge der großen deutschen Zahlentheoretiker des neunzehnten Jahrhunderts grundlegend war, so daß nach meiner Meinung und trotz allem die deutsche Sprache noch heute die selbstverständliche Sprache für die algebraische Zahlentheorie bleibt.

Diese Entwicklung endete, wenigstens vorübergehend, vor dem Zweiten Weltkrieg, um dann später, erst anderswo, wieder aufgenommen zu werden. Aber eine zweite Entwicklung, deren Ursprung sich auch bei den Leistungen des jungen Gauss findet, die Theorie der quadratischen Formen und folglich auch die Theorie der algebraischen Gruppen, deren allgemeinen Bedeutung für alle Gebiete der Zahlentheorie erst, meines Erachtens, Carl-Ludwig Siegel erkannte, fand im zwanzigsten Jahrhundert statt. Günter Harder ist mit der arithmetischen Theorie der algebraischen Gruppen aufgewachsen und hat dazu viel beigetragen, zur Reduktionstheorie, zur Galoiskohomologie und zur Kohomologie der diskreten Gruppen. Er hat als einer der ersten, aber nur allmählich, erkannt, wie groß die Tragweite der arithmetischen Theorie der algebraischen Gruppen sein könnte, und im Rahmen der Shimuravarietäten, die mittels dieser Gruppen eingeführt werden können und denen wichtige diophantische Probleme und wichtige Gleichungssysteme zugeordnet sind, die schönen, wichtigen und allgemeinen Vermutungen, die ich am Anfang flüchtig schilderte, nachgeprüft. Es wäre schön, Ihnen sogar die einfachsten seiner Beispiele zu erklären, denn darin sind viele erleuchtende mathematische Begriffe und Einfälle enthalten. Es wäre aber für heute zu anstrengend.

Obwohl ich in meiner Beschreibung Günter Harders Beiträge zur Mathematik die Leistung seiner späteren Jahren hervorhebe, weil ich den Mut, die Unermüdlichkeit und die Begeisterung, die er noch heute bewahrt, so sehr bewundere, möchte ich, bevor ich zu meinen letzten Worten komme, einige der früheren Beiträge würdigen, nicht alle, weil uns die Zeit und mir die nötigen Kenntnisse fehlen.

Insbesondere übergehe ich die vielen Beiträge zur Topologie der Shimuravarietäten, um zwei einflußreiche Untersuchungen aus seinen jungen Jahren zu erwähnen. Die erste führte zu dem Beweis des Hasse-Prinzips für alle einfach zusammenhängenden halbeinfachen algebraischen Gruppen mit Ausnahme der Gruppe E_8. Obwohl er diesen einen Fall beiseite lassen mußte und der Beweis die Behandlung vieler spezieller Fälle verlangte, erlaubten die von ihm und Anderen erzielten Ergebnisse in der Galoiskohomologie uns, in der Theorie der automorphen Formen, wie Harish-Chandra es in der Darstellungstheorie getan hatte, allgemein zu denken. Man kann die Wichtigkeit dieser Möglichkeit nicht überschätzen.

Die Beziehung zwischen automorphen Formen und Vektorbündeln, die oft in Zusammenhang mit den Namen Drin'feld oder Lafforgue hervortritt und die jetzt in rein geometrischer Hinsicht sehr wichtig geworden ist, hat Harder als einer der allerersten untersucht, erst allein und später zusammen mit Narasimhan. Obwohl ihr Ziel, analytische Ergebnisse als Hilfsmittel in der Geometrie zu verwenden, anders war, haben ihre Methode, besonders die Harder-Narasimhan Filtrierung, eine breite Spur in der rein geometrischen Theorie hinterlassen.

Die von Gauß bei seiner ersten großen Entdeckung untersuchten Zahlen bilden, was wir noch heute einen Kreisteilungskörper nennen. Obwohl man Gauß dank seiner Gedanken über die Krümmung des Weltraums zu den Philosophen zählen muß, sind, so weit ich weiß, seine Entdeckungen in der Kreisteilungstheorie nie in der Philosophie oder der schöngeistigen Literatur gewürdigt worden, so wie Platon Theaitetos' Entdeckungen würdigte. Sie verdienen es, obgleich ich sofort zugeben muß, daß sich die Mathematiker, vom Glanz Galois' erblindet, des Schönen und des Einschneidenden an Gauß' Methoden nicht immer bewußt sind.

Es war jedoch anmaßend, unsere Zeit in der Mathematik mit dem achtzehnten Jahrhundert zu vergleichen. Es ist aber so, daß auch wir viel vermuten und viel ahnen, so daß unserer Mathematik eine Unvollständigkeit anhaftet. Wie viele von uns in der gegenwärtigen Mathematik, hat Günter Harder vielleicht mitunter das Gefühl, er ist nur Vorkämpfer. Der Sieg, wenn er kommt, wird andern gehören. Er wird aber auch glorreich und des Lobes der Philosophen würdig sein. Als unseren Trost füge ich hinzu, Pionierarbeit bei einem großartigen Unternehmen ist auch keine geringe Sache.

Ich habe Günter Harders Beiträge zum mathematischen Leben in Deutschland nicht erwähnt. Obwohl ich weiß, wie viel Mühe er sich darum gegeben hat, und oft gesehen habe, wie seine Schüler und andere junge Mathematiker ihn ehren und lieben, steht es mir als Ausländer vielleicht nicht zu, seine Verdienste in dieser Hinsicht einzeln zu würdigen. Es ist aber in der modernen Welt eine große Gunst, Freunde in der Ferne zu haben. Für mich ist Günter Harder einer der ersten gewesen. Er hat mir viel beigebracht, unter anderem die deutsche Sprache, die ich leider nicht so gut beherrsche wie ich möchte. Es ist ein großes Privileg, heute anwesend zu sein, um meinen Dank und meine Bewunderung auszudrücken und ihn mit Ihnen zu ehren.

Robert Langlands