Dualität bei endlichen Modellen der Perkolation*

Helmut Koch zum Anlaß seines sechzigsten Geburtstages gewidmet

Inhaltsverzeichnis

* Appeared in Math. Nachr. Bd. 160 (1993).

I. Einleitung

Obwohl der Zweck dieser Arbeit ist, einige elementare und anschauliche Begriffe einzuführen, und ihre grundlegenden geometrischen Eigenschaften zu untersuchen, liegt im Hintergrund ein ferneres Ziel, ohne das die vorliegenden Untersuchungen vielleicht amüsant wären, aber nichts weiter. Die Physiker haben in dem Begriff der Universalität und die dynamische Erklärung ihrer Ursprüng den Mathematikern ein großartiges Problem geschenkt, denn es fehlt dieser Erklärung nicht nur das nötige technische Fundament, sondern in mancher Hinsicht jedes strenge mathematische Verständnis.

Obwohl sich die Universalität auf weiten Gebieten der Physik und der Technologie zeigt, treten die wesentlichen Probleme schon bei reinen mathematischen Modellen der statistischen Mechanik auf. In dieser Einleitung handelt es sich nur um die Perkolation, wo man fast sofort auf diese Probleme, und zwar in reiner Form, stößt.

Wir betrachten ein Schachbrett, jedoch nicht notwendigerweise mit 8×8 Quadraten sondern mit $n \times n$, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist. Ein Zustand s auf dem Brett ist eine Färbung der Quadraten, wobei jedes Quadrat entweder schwarz oder weiß angestrichen wird. Dieser Zustand läßt eine horizontale Überquerung zu, wenn es möglich ist, an der linken Seite auf einem schwarzen Quadrat anfangend, zu der gegenüberliegenden Seite, der rechten, überzugehen, indem man auf schwarzen Quadraten bleibt, und von einem Quadrat zu einem anderen nur dann übertritt, wenn die beiden gleichfarbig sind und aneinander längs einer gemeinsamen Seite angrenzen.

Es sei $0 \leq p \leq 1$ eine reelle Zahl. Wir führen eine Wahrscheinlichkeit π auf die Menge aller Zustände ein, indem wir $\pi(s)$ gleich $p^a(1-p)^b$ setzen, wenn der Zustand s aus a schwarzfarbigen Quadraten und b weißfarbigen Quadraten besteht. Die Wahrscheinlichkeit $\pi_h^{(n)}(p)$ einer horizontalen Überquerung ist dann die Summe der Wahrscheinlichkeiten $\pi(s)$ derjenigen Zustände, die eine horizontale Überquerung zulassen. Die folgende Aussage ist ein Hauptsatz der mathematischen Theorie, den wir Kesten und anderen Mathematikern verdanken ([1])

Satz. *Es existiert eine Zahl $0 < p_c < 1$, die kritische Wahrscheinlichkeit, so daß:*

(1) *wenn $p < p_c$, gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \pi_h^{(n)}(p) = 0;$$

(2) *wenn $p > p_c$, gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \pi_h^{(n)}(p) = 1;$$

(3) *wenn $p = p_c$, gilt*

$$0 < \varliminf_{n\to\infty} \pi_h^{(n)}(p) \leq \varlimsup_{n\to\infty} \pi_h^{(n)}(p) < 1$$

Die erste Frage, die sich stellt, und die wir zur Zeit nicht beantworten können, ist ob

$$\lim_{n\to\infty} \pi_h^{(n)}(p_c) \tag{1.1}$$

existiert. Es sei $A^{(n)}$ die Ableitung der Funktion $\pi^{(n)}$ von p am Punkt p_c. Eine zweite Frage ist, ob es eine Konstante ν gibt, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^{(n)}}{n^{\frac{1}{\nu}}} \tag{1.2}$$

existiert. Der Grund dieser Frage liegt nicht auf der Hand. Sie ist von der Erfahrung mit allerlei physikalischen und mathematischen Untersuchungen, sowie von numerischer Forschung der Perkolation selbst, nahegelegt.

Man erwartet eine bejahende Antwort nicht allein auf diese zwei Fragen, sondern auch auf eine dritte, die aber nur einen Sinn hat, wenn die Grenzwerte (1.1) und (1.2) existieren. Wir haben der Einfachheit halber nur die Perkolation auf einem rechteckigen Gitte eingeführt, und die Wahrscheinlichkeit eines Zustandes durch eine möglichst einfache Formel definiert. Der Satz gilt jedoch für jede vernünftige Definition der zwei-dimensionalen Perkolation, und wir können erwarten, daß die Antwort auf die zwei Fragen (1.1) und (1.2) auch allgemein positiv sein wird. Die dritte Frage wäre dann, ob ν unabhängig vom Modell ist, und das wird auch erwartet. Obwohl wir diese Fragen eine nach der anderen gestellt haben, als ob eine beantwortet werden muß, bevor wir die nächste stellen könnten, liegt es nahe, sie alle gleichzeitig zu behandeln. Die Renormierungsgrupperklärung dieses Phänomens verlangt sogar, daß wir auf diese Weise verfahren.

Diese Erklärung ist dynamisch, und bezieht sich auf einen Raum, eine Abbildung dieses Raumes in sich selbst, und einen Fixpunkt der Abbildung. Leider erweisen sich gewöhnlicherweise diese Gegenstände als schlüpfrig, so daß sie kaum mathematisch anfaßbar sind. Insbesondere der Raum, der, wie ein Unkundiger denken könnte, allem zugrunde liegt, wird kaum erwähnt. Der Raum muß allerdings unendlich-dimensional sein. In dieser Arbeit werden Gegenstände dieser Art eingeführt, die als endlich-dimensionale Annäherungen zu dem gesuchten dynamischen System dienen sollten. Ich leiste jedoch keine Gewähr, daß sie sich als zweckmäßig herausstellen werden. Die Probleme der strengen mathematischen Begründung der Renormierungsgrupperklärung können nicht auf Anhieb gelöst werden. Sie müssen von vielen Seiten angegriffen werden. Außerdem überzeugt man sich nur mit Mühe, daß die eingeführten Begriffe den Tatsachen wirklich entsprechen. In dieser Hinsicht sind die numerischen Untersuchungen der Arbeit ([2]) ermunternd, besonders weil sie Eigenschaften der Grenzwerte $\lim \pi^{(n)}(p_c)$ ans Licht gebracht haben, die vorher, wenn geahnt, kaum beachtet wurden. Diese Eigenschaften werden zur Zeit von mir und meinen Kollegen, Philippe Pouliot und Yvan Saint-Aubin in Montreal, untersucht. Die entsprechenden numerischen Unterlagen, sowie die Ergebnisse anderer numerischen Untersuchungen, die die Zweckmäßigkeit der in der vorliegenden Arbeit angegebenen Definitionen belegen, hoffen wir innerhalb kurzer Zeit zu veröffentlichen.

Trotz solcher großen Ziele ist mein gegenwärtiger Zweck viel bescheidender, eine vielleicht nützliche Dualität der endlichen Modelle zu begründen. Ich möchte dennoch, bevor wir uns diesen endlichen Modellen zuwenden, erklären in welchem Sinn, sie eventuell alle Fragen beantworten sollen.

Im Abschnitt II führen wir eine Aufteilung des Rands eines Quadrats Q der Seitenlänge 1 in $4l$ Intervalle der gleichen Länge ein. Die Menge dieser Intervalle nennen wir $\mathfrak{A}_l$ Es sei n eine ganze Zahl, die durch l teilbar ist, und betrachten ein $n \times n$ Brett. Die Quadrate, die entlang einer Seite liegen, sind dann natürlicherweise in l Mengen mit $\frac{n}{l}$ Elementen aufgeteilt. Also jedem der $4l$ Intervalle ist eine Menge von $\frac{n}{l}$ Quadraten zugeordnet. Zwei dieser Mengen können sich nur an den Ecken schneiden. Es sei M_α, die dem Intervall α zugeordnete Menge. Wir ordnen jedem Zustand s eine Funktion y_s auf $\mathfrak{A}_n \times \mathfrak{A}_n$ mit Werten aus $\{0, 1\}$ zu. Es ist $y_s(\alpha, \alpha) = 1$ für jedes α, und $y_s(\alpha, \beta)$ ist 0, wenn α und β benachbart sind. Es ist sonst $y_s(\alpha, \beta) = 1$, dann und nur dann wenn aus einem schwarzen Quadrat in M_α man ein schwarzes Quadrat in M_β erreichen kann, ohne die oben beschriebenen Spielregeln zu verletzen. Man tritt also von einem schwarzen Quadrat zu einem längs einer gemeinsamen Seiten benachbarten schwarzen Quadrat, und bricht sich auf diese Weise von Quadrat zu Quadrat eine Bahn.

Es sei $p = p_c$ und sei π die entsprechende Wahrscheinlichkeit auf die Menge der Zustände. Wir definieren eine Wahrscheinlichkeit π_l^n auf die Menge $\mathfrak{Y}_l$ der möglichen Funktionen, indem wir setzen,

$$\pi_l^n(y) = \sum_{y_s = y} \pi(s).$$

Wir können erwarten, daß für jedes y

$$\lim_{n\to\infty} \pi_l^n(y) = \eta_l(y) \tag{1.3}$$

existiert. Auf diese Weise erhalten wir ein Wahrscheinlichkeitsmaß η_l im Raum Π_l, der im nächsten Abschnitt eingeführt wird. Es ist klar, daß $\eta_k = \Gamma^l_k(\eta_l)$, wenn Γ^l_k die in demselben Abschnitt eingeführten Vergröberung ist.

Wir werden auch Abbildungen Θ_l definieren, und ein zentrales Problem, das in dieser Arbeit nicht berührt wird, ist, zu zeigen, daß Θ_l einen Fixpunkt ν_l in Π_l besitzt. Die Punkte ν_l sollen die Punkte η_l annähern, und zwar in dem Sinn, daß für jedes k

$$\lim_{l\to\infty} \Gamma^l_k(\nu_l) = \eta_k \tag{1.4}$$

ist. Es ist in dieser Gleichung einverstanden, daß l nur durch k teilbare Werte annimmt. Da diese Gleichung für jedes Modell gelten sollen, werden man daraus schließen können, daß die Maße η_k unabhängig vom Modell sind. Man will die Gleichung (1.4) sogar verwenden, um die Existenz der Grenzwerte in (1.3) zu zeigen.

Die Gültigkeit der Gleichung (1.2) wird dann aus der Eigenschaften der Tangentialabbildungen $d\Theta_l$ am Punkt ν_l abgeleitet werden. Diese sind jedoch zur Zeit alle nur verwegenen Hoffnungen, und ich begnüge mich in der vorliegenden Arbeit mit dem Beweis einiger einfacher formeller Eigenschaften der Abbildungen Θ_l. Ab jetzt wird nicht mehr von der wahren Perkolation die Rede sein, nur von den endlichen Modellen. Insbesondere bezieht sich die ganze Zahl n nicht mehr auf das Schachbrett.

Wenn den in dieser Arbeit dargelegten Ideen alle Klarheit nicht mangelt, ist es dank vielen Besprechungen mit Claude Pichet, Philippe Pouliot, und Yvan Saint-Aubin in Montreal. Ich danke ihnen.

II. Beschreibung der Modelle

II.A. Die Mengen und die Wahrscheinlichkeiten. Jeder natürlicher Zahl l ist eins unserer Modelle zugeordnet. Die grundlegenden Gegenstände im Modell sind eine endliche Menge $\mathfrak{Y}_l$ und eine geschlossene Untermenge Π_l der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathfrak{Y}_l$, sowie Abbildungen $\Theta_l = \Theta_l^{(n)}$ von Π_l in sich selbst. Die Zahl n ist auch eine natürliche Zahl, die wir nicht jedesmal in der Bezeichnung explizit erwähnen, damit Platz für andere Indexes übrigbleibt. Es ist jedoch nicht die Zahl n der Einleitung. Zum Zweck der Dualität, der diese Arbeit hauptsächlich gewidmet ist, führt man eine zweite Abbildung Θ_l^* ein. Das Hauptziel ist in der Tat, zu zeigen, daß diese Abbildungen wirklich dual sind. Wir nehmen allerdings gleichzeitig die Gelegenheit wahr, einige zu weiteren Untersuchungen nötige Definitionen anzugeben.

Es sei $\mathfrak{Q}$ ein Quadrat der Seitenlänge 1. Wir teilen jede Seite in l Intervalle der gleichen Länge $\frac{1}{l}$ auf, um, da das Quadrat vier Seiten hat, eine Menge $\mathfrak{A}_l$ zu bekommen mit $4l$ Elementen. Diese Intervalle nennen wir Strecken. Ein Element aus der Menge $\mathfrak{Y}_l$ wird eine Menge von Verbindungen zwischen Paaren von Strecken sein, also eine Funktion auf $\mathfrak{A}_l \times \mathfrak{A}_l$, die nur die Werte 0 und 1 nimmt. Bevor wir die Bedingungen beschreiben, die diesen Funktionen auferlegt werden, führen wir einige Terminologie ein.

Es sei $\mathfrak{R}$ der Rand des Quadrats $\mathfrak{Q}$. Auf $\mathfrak{R}$ sind zwei Orientierungen möglich. Eine Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ heißt zyklisch, falls diese Strecken alle verschieden sind, und man ihnen in der gegebenen Reihenfolge begegnet, wenn man den Rand in der durch eine der Orientierungen, gleich welche gegebenen, Richtung durchläuft. Ein offenes Intervall (α, β) ist die Menge aller Strecke außer α und β selbst, denen man begegnet, wenn man der Rand in einer gegebenen Richtung von α bis β durchläuft. Das Intervall ist folglich nicht eindeutig bestimmt. Um eins der zwei möglichen Intervalle zu bestimmen, kann man eine Strecke angeben, die es enthält. Ein geschlossenes Intervall $[\alpha, \beta]$ wird ähnlich definiert, nur daß es auch α und β enthält. Halboffene Intervalle sind auch möglich.

Definition II.A.1. *Die Menge $\mathfrak{Y}_l$ ist die Menge aller Funktionen y auf $\mathfrak{A}_l \times \mathfrak{A}_l$ mit Werten aus $\{0, 1\}$, die die folgende Bedingungen erfüllen:*

(1) *Für jedes $\alpha \in \mathfrak{A}_l$ gilt $y(\alpha, \alpha) = 1$.*

(2) *Für alle α und β gilt $y(\alpha, \beta) = y(\beta, \alpha)$.*

(3) *Wenn α und β benachbart sind, gilt $y(\alpha, \beta) = 0$.*

(4) *Wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zyklisch ist, α und β nicht benachbart sind, und wenn darüber hinaus $y(\alpha, \gamma) = y(\beta, \delta) = 1$, dann gilt $y(\alpha, \beta) = 1$.*

Die Bedingung (3) ist etwas künstlich, aber ohne sie wäre die dynamischen Eigenschaften der Abbildung Θ_l nicht die erwünschten. Die Bedingung (4) hat einen offensichtlichen geometrischen Ursprung in der zweidimensionalen Perkolation. Zwei Wege müssen sich durchschneiden, wenn einer von α nach γ führt, und der andere von β nach δ. Wenn man alle möglichen Permutationen der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in Betracht zieht, folgert man leicht aus der Bedingung (4) daß jedes nicht benachbarte Paar aus der Reihe verbunden ist.

Als erste Begründung dieser Definition ist gezeigt worden, daß die unten eingeführte Abbildung $\Theta_2^{(2)}$ einen Fixpunkt ν_2 besitzt, der nicht allzuweit vom Punkt η_2 liegt. Die dazu nötigen numerischen Untersuchungen sind jedoch etwas umständlich, und werden in dieser Arbeit nicht besprochen werden.

Es sei $\Pi(\mathfrak{Y}_l)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathfrak{Y}_l$. Diese Menge ist allerdings ein topologischer Raum. Das dynamische System, das die Renormalisierungsgruppe für die Perkolation in einem endlichdimensionalen Raum annähernd nachahmen sollte, will man zuerst mittels einer Abbildung auf den ganzen Raum $\Pi(\mathfrak{Y}_l)$ definieren. Aber diese allzu einfache Definition erweist sich als nicht zweckmäßig, weil die Folgen der wichtigen FKG-Ungleichung dabei verlorengehen. Um diese zu behalten, schränken wir uns vom Anfang an auf einen Unterraum Π_l von $\Pi(\mathfrak{Y}_l)$ ein, und prüfen nach, daß unsere Abbildungen den Rahmen dieses Raumes nicht sprengen.

Die Menge $\mathfrak{Y}_l$ ist geordnet. Es gilt $y \geq y'$, wenn für jedes Paar α und β gilt, $y(\alpha, \beta) \geq y'(\alpha, \beta)$. Eine Funktion f auf $\mathfrak{Y}_l$ heißt *zunehmend*, wenn $f(y) \geq f(y')$ ist, jedesmal daß $y \geq y'$ ist.

Definition II.A.2. *Der topologische Raum Π_l ist der Unterraum aller Wahrscheinlichkeitsmaße π aus $\Pi(\mathfrak{Y}_l)$ der Art, daß für alle zunehmenden Funktionen f und g auf $\mathfrak{Y}_l$ gilt*

$$\int fg\, d\pi \geq \int f\, d\pi \int g\, d\pi. \tag{2.a.1}$$

Es ist klar, daß wenn die Bedingung (2.a.1) für zunehmende Funktionen gilt, dann gilt sie auch für abnehmende Funktionen. Außerdem, wenn a und b zwei Konstante mit demselben Vorzeichen sind und die Bedingung für f und g gilt, dann gilt sie auch für $f + a$ und g sowie für af und bg.

Der Raum Π_l enthält zwei einfach definierbare Maße. Es seien y_+ die Funktion, für die $y_+(\alpha, \beta) = 1$ für jedes nicht benachbarte Paar, und y_- die Funktion, für die $y_-(\alpha, \beta) = 0$ ist, wenn $\alpha \neq \beta$. Das Maß π_+ ist auf y_+ konzentriert, und π_- auf y_-.

Hilfsatz II.A.3. *Es seien $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ und $\alpha + \beta = 1$. Wenn π in Π_l liegt, dann liegen $\alpha\pi_+ + \beta\pi$ und $\alpha\pi_- + \beta\pi$ auch in Π_l.*

Es sei $\nu = \alpha\pi_\pm + \beta\pi$. Die Differenz

$$\int fg\, d\nu - \int f\, d\nu \int g\, d\nu$$

ist größer oder gleich der Summe der folgenden Ausdrücke

$$\alpha \int f\, d\pi_\pm \int g\, d\pi_\pm + \beta \int f\, d\pi \int g\, d\pi$$

und

$$-\alpha^2 \int f\, d\pi_\pm \int g\, d\pi_\pm - \alpha\beta \int f\, d\pi \int g\, d\pi_\pm - \alpha\beta \int f\, d\pi \int g\, d\pi_\pm - \beta^2 \int f\, d\pi \int g\, d\pi$$

Weil $\alpha - \alpha^2 = \beta - \beta^2 = \alpha\beta$ ist, ist die Summe gleich $\alpha\beta$ mal

$$f(y_\pm)g(y_\pm) - f(y_\pm) \int g\, d\pi - g(y_\pm) \int f\, d\pi + \int f\, d\pi \int g\, d\pi.$$

Wir vereinfachen diesen Ausdruck und erhalten

$$\int \{f(y_\pm) - f\}\, d\pi \int \{g(y_\pm) - g\}\, d\pi \geq 0.$$

II.B. Die Abbildungen. Die Abbildungen werden anfangs auf dem Niveau der Mengen $\mathfrak{Y}_l$ eingeführt, und dann auf die Räume Π_l übertragen. Die Übertragung auf die Räume $\Pi(\mathfrak{Y}_l)$ ist ohne weiteres möglich, für die Räume Π_l muß die Bedingung (2.a.1) jedesmal nachgeprüft werden. Es seien k und l zwei natürliche Zahlen der Art, daß $k|l$. Wir definieren eine Vergröberung $\Gamma = \Gamma_k^l$, die $\mathfrak{Y}_l$ in $\mathfrak{Y}_k$ schickt. Jede Strecke α' aus $\mathfrak{A}_l$ ist in einer eindeutig bestimmten Strecke α aus $\mathfrak{A}_k$ enthalten. Es sei y' eine Funktion aus $\mathfrak{Y}_l$. Wir definieren $y = \Gamma y'$ durch die Bedingung, daß $y(\alpha, \beta)$ dann und nur dann gleich 1 ist, wenn α und β nicht benachbart sind, und es Strecken $\alpha' \subset \alpha$ und $\beta' \subset \beta$ gibt, so daß $y'(\alpha', \beta') = 1$. Der nächste Hilfsatz braucht kaum erwähnt zu werden, da sein Beweis klar ist. Wir bemerken nur, wenn $\alpha' \subset \alpha$, $\beta' \subset \beta$, $\gamma' \subset \gamma$, und $\delta' \subset \delta$, und wenn ferner $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zyklisch ist, dann ist auch $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ zyklisch.

Hilfsatz II.B.1. *Die Funktion y gehört zu $\mathfrak{Y}_k$*

Diese Abbildung ergibt auch in der üblichen Weise eine Abbildung der Menge $\Pi(\mathfrak{Y}_l)$ in $\Pi(\mathfrak{Y}_k)$, die wir auch mit $\Gamma = \Gamma_k^l$ bezeichnen. Der nächste einfache Hilfsatz erlaubt uns, sie als eine Abbildung von Π_l in Π_k zu betrachten.

Hilfsatz II.B.2. *Das Bild von Π_l liegt in Π_k.*

Es sei π das Bild von π'. Wenn f und g zwei zunehmende Funktionen auf $\mathfrak{Y}_k$ sind, dann sind ihre Urbilder f' und g' zunehmende Funktionen auf $\mathfrak{Y}_l$. Es gilt folglich,

$$\int fg\,d\pi = \int f'g'\,d\pi' \geq \int f'\,d\pi' \int g'\,d\pi' = \int f\,d\pi \int g\,d\pi.$$

Wir führen auch eine Abbildung $\Phi = \Phi^l_{nl}$ ein, die das n^2-fache Produkt $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Y}_l \times \ldots \times \mathfrak{Y}_l$ in $\mathfrak{Y}_{nl}$ abbildet. Da jedes Wahrscheinlichkeitsmaß π' auf $\mathfrak{Y}_l$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß π'' auf $\mathfrak{Z}$ definiert, weil $\mathfrak{Z}$ ein Produktraum ist, können wir dem Maß π' ein Maß π zuordnen,

$$\pi(y) = \sum_{\Phi(y'')=y} \pi''(y'').$$

Wir setzen $\Phi(\pi') = \Phi^l_{nl}(\pi') = \pi$. Die Abbildung

$$\Phi: \quad \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Y}_{nl}$$

läßt sich aber nicht ohne Umstand definieren.

Wir stellen uns vor, das große Quadrat $\mathfrak{Q}$ sei aufgeteilt in n^2 kleinen Quadraten $\mathfrak{Q}_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. Der Raum $\mathfrak{Z}$ kann definiert werden als

$$\mathfrak{Z} = \prod_{i,j=1}^{n} \mathfrak{Y}^{(i,j)},$$

wobei $\mathfrak{Y}^{(i,j)} = \mathfrak{Y}_l$ für alle i und j. Ein Element von $\mathfrak{Z}$ ist folglich ein Punkt,

$$y' = (y_{i,j} | 1 \leq i, j \leq n).$$

Es sei $\mathfrak{A}_{i,j} = \mathfrak{A}_l$, nur daß es jetzt als eine Menge von Strecken auf dem Rand von $\mathfrak{Q}_{i,j}$ betrachtet werden sollte. Als solche gehören sie entweder zum Inneren von $\mathfrak{Q}$ oder zu seinem Rand. Wir nennen sie deswegen entweder innere oder äußere Strecken. Jede der vier Seiten des Randes ist folglich mittels dieser kleinen Strecken aufgeteilt in nl Intervallen der gleichen Länge. Die Menge der $4nl$ Strecken, die auf dem Rand liegen, ist mit $\mathfrak{A}_{nl}$ identifiziert.

Um das Bild $\Phi(y')$ zu definieren, führen wir zusätzliche Mengen $\bar{y}_{i,j}$ ein. Wenn α und β in $\mathfrak{A}_{i,j}$ liegen und nicht benachbart sind, dann ist $\bar{y}_{i,j}(\alpha,\beta) = y_{i,j}(\alpha,\beta)$. Wenn sie benachbart sind, gilt $\bar{y}_{i,j}(\alpha,\beta) = 1$, dann und nur dann, wenn entweder α oder β inner ist, und es einen Zyklus $(\alpha,\gamma,\beta,\delta)$ gibt, für den $y_{i,j}(\alpha,\gamma) = y_{i,j}(\beta,\delta) = 1$.

Hilfsatz II.B.3. *Es sei $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ einen Zyklus in $\mathfrak{A}_{i,j}$ der Art, daß $\bar{y}_{i,j}(\alpha,\gamma)=\bar{y}_{i,j}(\beta,\delta)=1$. Wenn α und β nicht benachbart sind, oder wenn eine dieser beiden Strecken eine innere Strecke ist, gilt $\bar{y}_{i,j}(\alpha,\beta)=1$*

Da weder α und γ noch η und δ benachbart sein können, ist die Aussage klar. Es seien α und β zwei Strecken aus $\mathfrak{A}_{nl}$. Ein zulässiger Weg, der von α nach β führt ist eine Reihe,

$$(i_0,j_0),(i_2,j_2)\ldots,(i_{2r},j_{2r}),$$

und eine Reihe,

$$\alpha_{-1},\alpha_1,\ldots,\alpha_{2r+1},$$

die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(2.b.1) Für $0\le k<r$ seien $i'=i_{2k}$, und $i''=i_{2k+2}$. Es seien j',j'' ähnlicherweise definiert. Dann ist α_{2k+1} in $\mathfrak{A}_{i',j'}$ und in $\mathfrak{A}_{i'',j''}$ enthalten. Es gilt ferner $\alpha_{-1}=\alpha\in\mathfrak{A}_{i_0,j_0}$ und $\alpha_{2r+1}=\beta\in\mathfrak{A}_{i_{2r},j_{2r}}$.

(2.b.2) Für $0\le k<r$ ist α_{2k+1} eine innere Strecke.

(2.b.3) Für $0\le k\le r$ gilt $\bar{y}_{i,j}(\alpha_{2k-1},\alpha_{2k+1})=1$

Es sei $\bar{y}$ die Funktion auf $\mathfrak{A}_{nl}$, die so definiert wird, daß $\bar{y}(\alpha,\beta)=1$, dann und nur wenn es einen zulässigen Weg gibt, der von α nach β führt. Die Funktion y wird definiert, indem man $y(\alpha,\beta)=\bar{y}(\alpha,\beta)$ setzt, für nicht benachbarte α und β, und $y(\alpha,\beta)=0$, wenn α und β benachbart sind.

Satz II.B.4 *Die Funktion y gehört zu $\mathfrak{Y}_{nl}$.*

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des Satzes III.A.1, des Abschnitts III.

Wenn wir diesen Satz annehmen, können wir die Abbildung Φ auf $\mathfrak{Z}$ definieren, $\Phi(y')=y$, und folglich die Abbildung Φ von $\Pi(\mathfrak{Y}_l)$ in $\Pi(\mathfrak{Y}_{nl})$.

Hilfsatz II.B.5 *Das Bild von Π_l liegt in Π_{nl}.*

Wenn die Bedingung (2.a.1) für π'' gilt, dann gilt sie auch für π. Es genügt also, zu beweisen, wenn sie für π' gilt, dann gilt sie auch für π''. Da $\mathfrak{Z}$ ein Produkt ist, ist das eine sofortige Folge des nächsten Hilfsatzes und eines einfachen Induktionsarguments.

Hilfsatz II.B.6 *Es seien π_1 und π_2 Maße auf geordneten Mengen $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$. Wenn die Ungleichung (2.a.1) für π_1 und π_2 gilt, dann gilt sie auch für das Produkt $\pi=\pi_1\times\pi_2$.*

Es seien f und g zwei zunehmende Funktion auf $\mathfrak{X}_1\times\mathfrak{X}_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int fg\,d\pi &= \int f(x_1,x_2)g(x_1,x_2)\,d\pi_1 d\pi_2\\ &= \int\left\{\int f(x_1,x_2)g(x_1,x_2)\,d\pi_1\right\}d\pi_2.\end{aligned}$$

Weil $f(x_1, x_2)$ und $g(x_1, x_2)$ für gegebenes x_2 zunehmende Funktion von x_1 sind, ist der Ausdruck rechts größer denn oder gleich

$$\int \left\{ \int f(x_1, x_2)\, d\pi_1 \right\} \left\{ \int g(x_1, x_2)\, d\pi_1 \right\} d\pi_2 = \int F(x_2) G(x_2)\, d\pi_2,$$

wobei die Definition der zwei Funktionen F und G klar ist. Da sie auch zunehmend sind, gilt

$$\int F(x_2) G(x_2)\, d\pi_2 \geq \int F(x_2)\, d\pi_2 \int G(x_2)\, d\pi_2 = \int f\, d\pi \int g\, d\pi.$$

Die Abbildungen, die von Hauptinteresse sind, weil sie die Menge Π_l in sich selbst abbilden, sind

$$\Theta = \Theta_l = \Theta_l^{(n)} = \Gamma_l^{nl} \cdot \Phi_{nl}^l.$$

II.C. Dualität. Für gewisse Zwecke braucht man einen Begriff der Dualität, und das Hauptziel dieser Arbeit ist, die Grundzüge der Dualität zu beschreiben, und insbesondere die Existenz einer zu Θ dualen Abbildung Θ^* zu zeigen. Wir führen zunächst eine Dualität auf die Menge $\mathfrak{Y}_l$ ein. Es sei $y \in \mathfrak{Y}_l$. Wir definieren eine Funktion $\hat{y}$ auf $\mathfrak{A}_l \times \mathfrak{A}_l$, indem wir $\hat{y}(\alpha, \gamma) = 1$ setzen, dann und nur dann wenn es keinen Zyklus $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ gibt, für den $y(\beta, \delta) = 1$. Sonst ist $\hat{y}(\alpha, \gamma) = 0$. Folglich gilt $\hat{y}(\alpha, \gamma) = 1$, dann und nur dann wenn α von γ durche keine Verbindung aus y getrennt wird. Insbesondere ist $\hat{y}(\alpha, \alpha) = 1$ für jedes α. Die Funktion $\hat{y}$ gehört der Menge $\mathfrak{Y}_l$ nicht, da $\hat{y}(\alpha, \beta)$ immer gleich 1 ist, wenn α und β benachbart sind. Deshalb führen wir eine zweite zusätzliche Funktion y^* ein, indem wir $y^*(\alpha, \beta)$ gleich $\hat{y}(\alpha, \beta)$ setzen, wenn α und β nicht benachbart sind, und sonst gleich 0. Die Funktion y^* heißen wir zur Funktion y dual.

Satz II.C.1

(1) *Die Funktion y^* gehört zu $\mathfrak{Y}_l$.*

(2) *Die zu y^* duale Funktion ist y.*

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des Satzes III.B.1. Es sei $\Delta = \Delta_l$ die Abbildung, die y nach $y*$ schickt. Dem Satz zufolge ist Δ eine Involution der Menge $\mathfrak{Y}_l$. Wenn $y_1 \geq y_2$ ist, ist $\Delta(y_1) \leq \Delta(y_2)$, so daß die zugeordnete Abbildung von $\Pi(\mathfrak{Y}_l)$ in sich selbst die Menge Π_l in sich selbst abbildet. Wir betrachten $\Delta = \Delta_l$ hauptsächlich als eine Abbildung auf Π_l.

Hilfsatz II.C.2 *Es gilt $\Gamma_k^l \Delta_l = \Delta_k \Gamma_k^l$.*

Die Gleichung dieses Hilfsatzes, der die Verträglichkeit der Vergröberung mit der Dualität behauptet, schreiben wir normalerweise der Kürze halber $\Gamma\Delta = \Delta\Gamma$. Es sei $y' \in \mathfrak{Y}_k$. Wir setzen $y = \Gamma(y')$. Wir betrachten $y^* = \Delta(y)$ einerseits und $z = \Gamma\Delta(y')$ anderseits und zeigen, daß $z = y^*$.

Es seien α und β zwei Strecken aus $\mathfrak{A}_k$. Wir nehmen an, daß $\alpha \neq \beta$ ist, und daß α und β nicht benachbart sind, denn die Gleichung $z(\alpha, \beta) = y^*(\alpha, \beta)$ ist sonst trivial. Wenn $z(\alpha, \beta) = 1$, existieren zwei Intervalle $\alpha' \subset \alpha$

und $\beta' \subset \beta$, für die $\Delta(y')(\alpha',\beta') = 1$. Wenn aber $\alpha,\gamma,\beta,\delta$ zyklisch ist, und $\gamma' \subset \gamma$, $\delta' \subset \delta$, dann ist $\alpha',\gamma',\beta',\delta'$ auch zyklisch, und folglich $y'(\gamma',\delta') = 0$. Hieraus folgt, weil γ' und δ' beliebige Unterstrecken von γ und δ sind, daß $y(\gamma,\delta) = 0$. Da $\alpha,\gamma,\beta,\delta$ eine beliebige zyklische Reihe, in der α und β getrennt sind, sein kann, gilt ferner $y^*(\alpha,\beta) = 1$

Auf der anderen Seite wenn $z(\alpha,\beta) = 0$ ist, dann ist $\Delta(y')(\alpha',\beta') = 0$ für jedes Paar $\alpha' \subset \alpha$ und $\beta' \subset \beta$. Folglich existiert eine zyklische Reihe $\alpha',\gamma',\beta',\delta'$ der Art, daß $y'(\gamma',\delta') = 1$. Wir brauchen jedoch mehr, insbesondere sind γ' und δ' zu unserem Zweck untauglich, wenn eins oder das andere in α oder β enthalten ist. Wir brauchen ein Paar $\{\gamma',\delta'\}$, das diese Gleichung erfüllt und der Art, daß $\alpha',\gamma',\beta',\delta'$ für jedes $\alpha' \subset \alpha$ und jedes $\beta' \subset \beta$ zyklisch ist. Denn γ' ist dann in einer Strecke γ aus $\mathfrak{A}_k$ enthalten, und δ' in einer Strecke δ, und die Reihe $\alpha,\gamma,\beta,\delta$ ist notwendigerweise zyklisch. Weil $y(\gamma,\delta) = 1$ ist, gilt $y^*(\alpha,\beta) = 0$.

Um das Paar $\{\gamma',\delta'\}$ zu erhalten, fixieren wir β' und wählen ein provisorisches Paar $\{\gamma',\delta'\}$ der Art, daß $y'(\gamma',\delta') = 1$ ist, und so daß die Menge aller $\alpha' \subset \alpha$, die zusammen mit β', γ' und δ' eine zyklische Reihe $\alpha',\gamma',\beta',\delta'$ bilden, maximal ist. Die Vereinigung aller dieser α' ist offensichtlich ein zusammenhängendes Intervall. Wenn sie nicht α selbst ist, dann ist entweder γ' oder δ' in α enthalten und an der Vereinigung angrenzend. Dies gelte für γ'. Wir wenden die Bemerkung des vorhergenden Absatzes auf das Paar $\{\gamma',\beta'\}$ an, um die Existenz eines Paares $\{\gamma_1',\delta_1'\}$ zu folgern, für das $y'(\gamma_1',\delta_1') = 1$ ist, und die Reihe $\gamma',\gamma_1',\beta',\delta_1'$ zyklisch ist. Wir können das offene Interval (γ',β') so wählen, das es jedes in Betracht kommende α' sowie δ' und δ_1' enthält. Die Strecke γ_1' liegt dann außerhalb dieses Intervalls. Wenn $\gamma_1',\gamma',\delta_1',\delta'$ zyklisch ist, gilt $y'(\gamma_1',\delta') = 1$ wegen der Definition II.A.1, so daß wir δ_1' durch δ' ersetzen können. Wir können folglich unter allen Umständen annehmen, daß δ_1' im Intervall $[\delta',\beta')$ enthalten ist. Dann ist jedoch für das Paar $\{\gamma_1',\delta_1'\}$ die Menge der zugelassenen α größer als die entsprechende Menge für $\{\gamma',\delta'\}$, was unserer provisorischen Wahl widerspricht. Die Vereinigung ist daher α. Um das Argument zu beenden, wählen wir nochmals ein provisorisches $\{\gamma',\delta'\}$ mit $y'(\gamma',\delta') = 1$, aber so daß die Menge aller $\beta' \subset \beta$ der Art, daß $\alpha',\gamma',\beta',\delta'$ zyklisch für alle $\alpha' \subset \alpha$ ist, maximal ist. Dann beweist man wie vorher, daß die Vereinigung dieser β' gleich β ist. Somit wird der Hilfsatz bewiesen.

Das Analogon des Hilfsatzes für die Abbildung Φ ist leider nicht gültig, und wir sind genötigt, eine zweite Abbildung Φ^* zu definieren, die mit der Gleichung $\Phi^*\Delta = \Delta\Phi$ im Sinn formuliert wird. Zwecks der Definition dieser Abbildung führen wir einige zusätzliche Begriffe ein. Die ganzen Zahlen l und n sind wieder vorgegeben, und Φ^* soll zunächst eine Abbildung der Menge $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{Y}_{nl}$ sein. Da Δ eine Involution ist, ist es uns erlaubt, nicht $\Phi^*((y_{i,j}))$ direkt zu definieren sondern $\Phi^*((y^*_{i,j}))$. Die Funktionen $y_{i,j}$ bleiben trotzdem die zentralen Gegenstände, und nicht $y^*_{i,j}$ sondern $\hat{y}_{i,j}$ die im Vordergrund zu behaltenden dualen Gegenstände. Alle diese Begriffe werden auch später in leicht abgeänderter Gestalt und in einem leicht abgeänderten Rahmen vorkommen.

Schleifen. Eine Schleife ist eine vier-tupel $(\alpha,\alpha',\beta,\beta')$ aus einem der Menge $\mathfrak{A}_{i,j}$, in dem α und β die Hauptgegenstände sind, und α' und β' nur zusätzlich. Die Strecken α und β müssen beide inner sein. Es sind ferner α und α' sowie β und β' benachbarte Paare. Eine Schleife heißt zulässig, wenn α und α' mit β und mit β' durch

$\hat{y}_{i,j}$ verbunden sind. Es sind nur die zulässigen Schleifen, die im folgenden gebraucht werden. Die Strecken in einem Paar $\{\alpha, \alpha'\}$ oder $\{\beta, \beta'\}$ werden oft *gespannt* geheißen.

Enden. Ein Ende besteht aus drei Strecken $\{\alpha, \alpha', \beta\}$, und α und α' bilden darin ein gespanntes Paar. Sie müssen benachbart sein. Das Element β ist eine äußere Strecke. Das Element α muß dagegen eine innere sein. Zulässige Enden sind von zweien Arten.

(a) Alle drei Strecken liegen in demselben $\mathfrak{A}_{i,j}$. Es gilt $\hat{y}_{i,j}(\alpha, \beta) = \hat{y}_{i,j}(\alpha', \beta) = 1$.

(b) Die Strecke α gehört gemeinsam zu zweien aneinander angrenzenden Quadraten $\mathfrak{Q}_{i,j}$ und $\mathfrak{Q}_{i',j'}$. Die Strecke α' liegt in $\mathfrak{A}_{i',j'}$ und ist eine äußere. Die Strecke β ist ein Nachbar von α in $\mathfrak{A}_{i,j}$. Der Fall, daß $(i', j') = (i, j)$, ist auch möglich, aber von keinem Interesse. Dann ist $\beta = \alpha'$, und solche Ende erweisen sich als überflüssig.

Knoten. Ein Knoten $\{\alpha, \alpha', \beta, \beta'\}$ besteht aus vier Strecken. Es sind wieder beide Paare $\{\alpha, \alpha'\}$ und $\{\beta, \beta'\}$ benachbart. Knoten sind alle zulässig und von dreien Arten.

(a) Alle vier Strecken im Knoten sind innere, und entweder $\alpha = \beta$ und $\alpha' = \beta'$ oder $\alpha = \beta'$ und $\alpha' = \beta$.

(b) Die Strecken α und β sind innere, und $\alpha = \beta$. Die sind zwei aneinander angrenzenden Quadraten $\mathfrak{Q}_{i,j}$ und $\mathfrak{Q}_{i',j'}$ gemeinsam. In entarteten Fällen können diese Quadrate gleich sein. Die Strecke α' gehört zum Quadrat $\mathfrak{Q}_{i,j}$ und β' zum Quadrat $\mathfrak{Q}_{i',j'}$.

(c) Alle vier Strecken sind innere. Die Strecken α und α' gehören zu einem Quadrat $\mathfrak{Q}_{i,j}$, und die Strecken β und β' gehören zu einem zweiten Quadrat $\mathfrak{Q}_{i',j'}$, das das erste an eine Ecke berührt, so daß die beiden Quadrate einen einzigen gemeinsamen Punkt besitzen. Dieser Punkt gehört zu allen vier Strecken.

Mittels dieser zusätzlichen Begriffe definieren wir jetzt die Abbildung Φ^*. Wir führen den Begriff eines breiten zulässigen Weges ein, der von einer Strecke α aus $\mathfrak{A}_{nl}$ zu einer Strecke β führt. Wir setzen $\hat{y}(\alpha, \beta) = 1$, dann und nur dann daß es einen zulässigen breiten Weg gibt, der von α nach β führt. Aus $\hat{y}$ leiten wir y^* ab, indem wir Verbindungen zwischen benachbarten Punkten aufheben, und setzen $\Phi^*((y^*_{i,j})) = y^*$. Ein breiter zulässiger Weg, der von α nach β führt ist eine Reihe

$$C_{-1}, \dots, C_{2r+1},$$

in der jedes Glied eine Schleife, ein Ende, oder ein Knoten ist, außer wenn $r = -1$ ist.

Wenn $r = -1$ ist, gehören α und β zu demselben Quadrat $\mathfrak{Q}_{i,j}$. In diesem Fall ist $C_{-1} = \{\alpha, \beta\}$ und es wird verlangt, daß $\hat{y}_{i,j}(\alpha, \beta) = 1$. Das erste Glied der Reihe ist sonst ein zulässiges Ende

$$C_{-1} = \{\alpha = \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha'_0\}.$$

Die Glieder C_{2i}, $0 \le i \le r$, sind alle Knoten,

$$C_{2i} = \{\alpha_{2i}, \alpha'_{2i}, \alpha_{2i+1}, \alpha'_{2i+1}\}.$$

Die Glieder C_{2i+1}, $0 \leq i < r$, sind zulässige Schleifen,

$$C_{2i+1} = \{\alpha_{2i+1}, \alpha'_{2i+1}, \alpha_{2i+2}, \alpha'_{2i+2}\}.$$

Es ist schließlich C_{2r+1} ein zulässiges Ende,

$$C_{2r+1} = \{\alpha_{2r+1}, \alpha'_{2r+1}, \alpha_{2r+2} = \beta\}.$$

Die Definition von y^* haben wir schon erklärt. Der Wert von $y^*(\alpha, \beta)$ ist gleich $\hat{y}(\alpha, \beta)$, außer wenn α und β benachbart sind. Der nächste Satz ist zusammen mit dem Satz II.B.4 das Hauptergebnis dieser Arbeit.

Satz II.C.3 *Die Funktion y^* gehört zu $\mathfrak{Y}_{nl}$ und ist der Funktion $\Phi((y_{i,j}))$ dual.*

Diese Behauptung ist eine unmittelbare Folge des Satzes III.A.4. Die Abbildung Θ^* von $\mathfrak{Y}_l$ in sich selbst ist die Verkettung $\Gamma \cdot \Phi^*$. Die Abbildung Φ kann auch als eine Abbildung der Menge $\Pi(\mathfrak{Y}_l)$ in $\Pi(\mathfrak{Y}_{nl})$ betrachtet werden. Der nächste Hilfsatz wird genau wie der Hilfsatz II.B.5 bewiesen.

Hilfsatz II.C.4 *Das Bild von Π_l unter Φ^* liegt in Π_{nl}.*

II.D. Beispiele. Obwohl alle in den Begriff der Dualität eingehenden Definitionen elementar sind, sind sie auch leicht mißverständlich. Folglich ist es nützlich, sie sowie ihren Zweck an Hand einiger Beispiele zu veranschaulichen. Auf der Abbildung 1 wird ein einfacher zugelassener breiter Weg gezeigt. Es ist klar, wie er alle möglichen Wege von unten nach oben blockiert. Das wesentliche Glied ist die Schleife im inneren Quadrat, an die zwei Enden gebunden werden. Ein Weg, der von unten ankommt, kann zum Beispiel die Strecke α erreichen. Diese Strecke ist jedoch im inneren Quadrat B mit keiner Strecke oberhalb des Paares $\{\alpha, \delta\}$ verbunden, und im linken Quadrat A mit keiner Strecke oberhalb des Paares $\{\alpha, \epsilon\}$, so daß der Weg nicht weiter nach oben hin eindringen kann, und zunächst nach unten zurückkehren muß, um anderswo eine wirkliche Bresche zu suchen. Wenn ein zulässiger Weg über äußere Strecken führen könnte, findet sich vielleicht an ϵ oder η eine Bresche. Da solche Wege nicht zugelassen werden, brauchen wir in A und C nur Enden und nicht Schleifen.

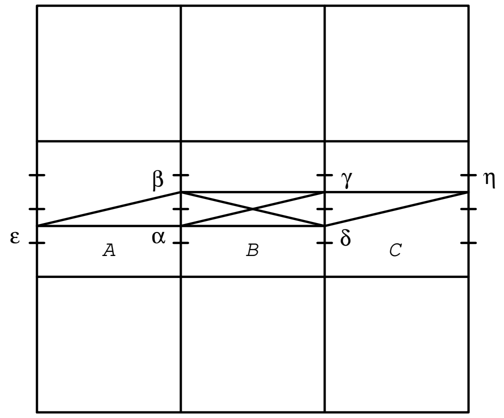

Abbildung 1

Obgleich in der Definition einer Schleife, eines Endes oder eines Knotens die zwei Strecken α und α' nicht symmetrisch auftreten, spielen sie in der Tat dieselben Rollen, denn $\{\alpha, \alpha', \alpha', \alpha\}$ ist eine zulässige Schleife, die α und α' umtauscht.

Obgleich wir Verbindungen zwischen benachbarten Strecken ausgeschlossen haben, sind einige fast entartete Schleifen sehr wichtig. Das sind Schleifen $\{\alpha, \alpha', \beta, \beta'\}$, für die $\alpha = \beta$ und α' und β' die zwei Nachbarn von α sind. Auf der Abbildung 2.a werden fünf Strecken auf einer inneren Seite abgebildet. Obwohl die Strecken α, γ, und ϵ mit außerhalb des Bilds liegenden Strecken im ersten Quadrat A verbunden sind, und β und δ mit Strecken derselben Art in B, besteht keine Möglichkeit diese Strecken über die im Bild gezeigten Strecken zu verbinden. Dementsprechend kann ein Teil eines breiten zugelassen Weges angelegt werden, wie auf der Abbildung 2.b. Es ist jedoch wohl möglich, daß dieser Teilweg, der sich zwischen den sich nicht einander berührenden, von außen ankommenden Verbindungen schlängelt, nicht bis zum Rand ausgebaut werden kann.

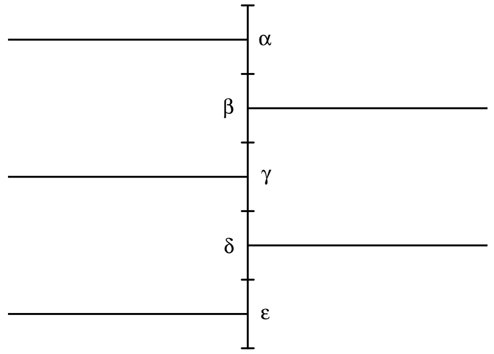

Abbildung 2.a

Auf der Abbildung 2.b werden drei Schleifen A, B, C gezeigt. Die werden aneinander angebunden mittels Knoten der Art (a), und der zustande kommende breite Weg führt vom gespannten Paar $\{\alpha, \beta\}$ zum gespannten Paar $\{\delta, \epsilon\}$.

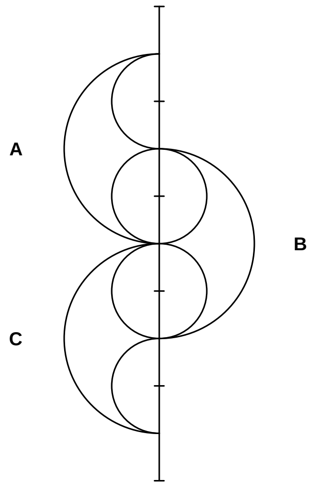

Abbildung 2.b

Um den Grund zu erklären, warum die anderen Arten von Knoten und Enden eingeführt werden, betrachten wir den Fall $l = 1$. Die Menge $\mathfrak{Y}_1$ besteht aus vier Elementen. Die werden wir gewöhnlicherweise wie auf der Abbildung 3 zeichnen. Das erste Elemente (3.a) enthält keine nichttriviale Verbindung. In (3.b) und (3.c) ist eine einzige nichttriviale Verbindung vorhanden, die einander gegenüber liegende Strecken verbindet. In

(3.d) sind alle einander gegenüber liegenden Strecken verbunden. Also im Gegensatz zu (3.b) und (3.c) sind zwei nichttriviale Verbindungen vorhanden statt einer einzigen. Nur im Fall (3.d) ist die Funktion $\bar{y}$ ungleich der Funktion y. Die Funktion (3.d) ist zur Funktion (3.a) dual. Die Funktionen (3.b) und (3.c) sind dagegen selbstdual.

Wir betrachten die Abbildung $\Phi = \Phi_2^1$. Auf der Abbildung (4.a) werden die vier Zustände $y_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 2$, gezeigt. Das Bild $y = \Phi((y_{i,j}))$ enthält offensichtlich keine nichttriviale Verbindung. Die dualen Zustände werden auf der Abbildung (4.b) gezeigt. Es muß gezeigt werden, warum Φ^* angewandt auf diese Zustände die Funktion liefert, die alle nichtbenachbarten Strecken verbindet. Wenn dagegen Φ auf diese Zustände angewandt wird, erhalten wir diejenige Funktion, die folgende nichttriviale Verbindungen enthält und keine andere: (γ, η'); (γ, δ'); (δ, ϵ); (δ, γ'). Wenn der Satz II.C.3 gilt, muß Φ^* und (4.a) eine Funktion liefern, die alle nichtbenachbarten Paare außer (δ', η) und (γ', ϵ'), die wenigstens eine der vier senkrechten Strecken γ, γ', δ, δ' enthalten, verbindet, die aber keine Verbindung von ungleichen waagerechten Strecken enthält.

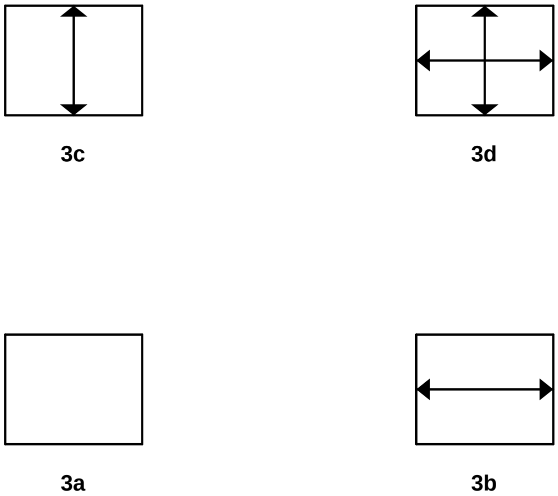

Abbildung 3

Wir behandeln zunächst Φ^* und (4.a) und erklären wie die horizontalen Verbindungen entstehen. Weil γ und α' sowie δ und β benachbart sind, sind $\{\alpha, \alpha', \gamma\}$ und $\{\beta, \beta', \delta\}$ zulässige Enden. Die werden gebunden durch den Knoten $\{\alpha, \alpha', \beta, \beta'\}$ der Art (c). Folglich sind γ und δ verbunden. Um γ mit δ' zu verbinden, legen wir einen breiten Weg an, der mit dem Ende $\{\gamma, \alpha, \alpha'\}$ beginnt. Mittels des Knotens $\{\alpha, \alpha', \beta, \beta\}$ binden wir dieses Ende an die zulässige Schleife $\{\beta', \beta, \beta, \delta\}$. Da δ eine äußere Strecke ist, und β inner, ist $\{\delta, \beta, \delta'\}$ ein zulässiges Ende, das wir durch einen entarteten Knoten eine der Art (b) an die Schleife $\{\beta', \beta, \beta, \delta\}$ binden können. Folglich sind γ und δ' verbunden. Daß die Verbindung von δ mit γ' auch vorhanden ist, wird ähnlich gezeigt. Eine letzte horizontale Verbindung, die noch fraglich ist, ist die von δ' mit γ'. Von δ' aus erreichen wir auf dem Weg nach γ das gespannte Paar $\{\alpha, \alpha'\}$. Dieses Paar ist auch in der zulässigen Schleife $\{\alpha, \alpha', \alpha', \gamma\}$ gespannt. Mittels des entarteten Knotens $\{\gamma, \alpha', \gamma, \alpha'\}$ der Art (b) wird diese Schleife an das Ende $\{\gamma', \alpha', \gamma\}$ gebunden.

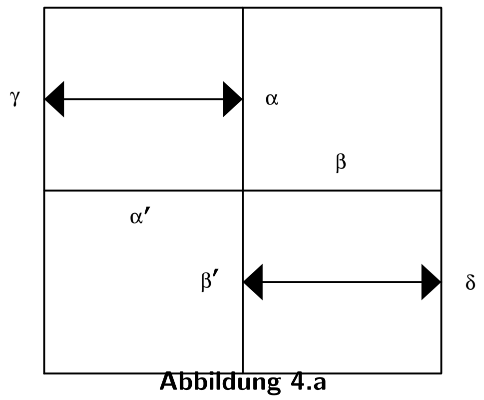

Abbildung 4.a

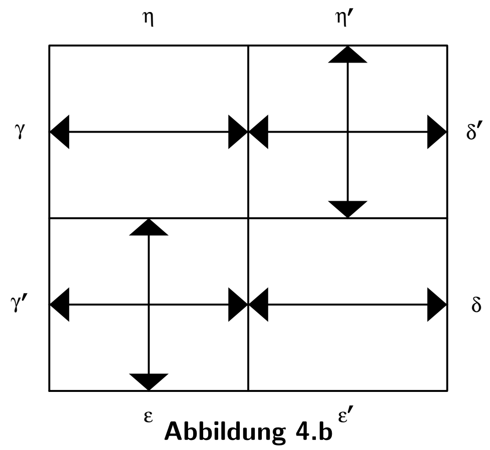

Abbildung 4.b

Die Verbindung von γ mit η' entsteht, indem man mit dem Ende $\{\gamma, \alpha, \eta\}$ beginnt, und es mittels des trivialen Knotens $\{\alpha, \eta', \alpha, \eta'\}$ an das Ende $\{\alpha, \eta, \eta'\}$ bindet. In derselben Weise erhält man die Verbindung von δ mit ϵ

Damit eine gegebene äußere Strecke Glied einer nichttrivialen Verbindung sei, muß sie entweder schon in dem sie enthaltenden Quadrat nicht trivial mit einer zweiten Strecke verbunden sein, was bei $l = 2$ ausgeschlossen ist, oder zu einem Ende gehören. Die waagerechten Strecken in (4.a) gehören nur zu zulässigen Enden der Art (b). Für die Strecken ϵ' und η kann das entsprechende Ende nicht fortgesetzt werden. Für η' und ϵ kann es auf nur eine Weise fortgesetzt werden, und führt dann entweder zu γ oder jeweils zu δ

Wenn wir Φ^* auf (4.b) anwenden, bekommen wir alle Verbindungen die bei (4.a) vorhanden sind. Darüber hinaus bekommen wir wegen der Symmetrie bezüglich der zweien Richtungen, der horizontalen und der vertikalen, alle vertikalen Verbindungen. Wenn wir (4.b) in einer der mittleren Achsen spiegeln, enthalten die vier sich daraus ergebenden Elemente aus $\mathfrak{Y}_1$ alle Verbindungen, die in (4.a) vorhanden sind. Folglich sind im größeren äußeren Quadrat alle Verbindungen zwischen nichtbenachbarten horizontalen und vertikalen Strecken auch vorhanden.

Da der Fall $l = 1$ und $n = 2$ zu Mißverständnissen führen kann, weil wir besonders bei der Anwendung von Φ^* auf (4.a) alle entstehenden Verbindungen aus fast gar nichts aufgebaut haben, betrachten wir auch den Fall $l = 1, n = 3$ und Funktionen $(y_{i,j})$, $1 \leq i, j \leq 3$, die denen in (4.a) und (4.b) ähnlich sind. Die werden in den Abbildungen (5.a) und (5.b) aufgezeichnet.

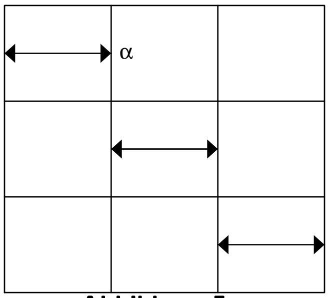

Abbildung 5.a

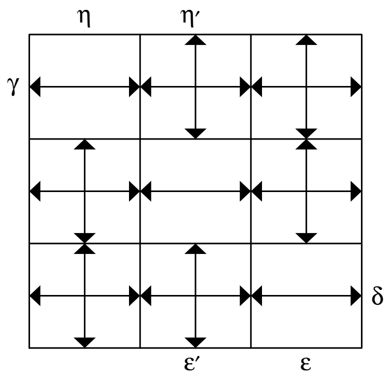

Abbildung 5.b

Die Abbildung $\Phi = \Phi_3^1$ bildet (5.a) an die Funktion ab, die keine nichttriviale Verbindung enthält. Das Bild von (5.b) ist dagegen die Funktion, die alle möglichen Verbindungen enthält, außer denen, die ϵ oder η mit einer anderen Strecke verbinden. Folglich nach dem Satz II.B.3 enthält das Bild von (5.a) bezüglich Φ^* nur die Verbindungen zwischen γ und η' und zwischen δ und ϵ' und sonst keine nichttriviale Verbindung. Die Verbindung von η' mit γ entsteht, indem man mit dem Ende $\{\eta', \alpha, \eta\}$ der Art (b) beginnt, und mittels eines trivialen Knotens es an das Ende $\{\gamma, \eta, \alpha\}$ bindet. Im Gegensatz zu (4.a) und Φ_2^1 kommen keine andere Verbindungen zustande. Daß Φ^* angewandt auf (5.b) die Funktion ergibt, die alle nichttrivialen Verbindungen enthält ist weniger erstaunlich, und leicht einzusehen.

III. Zusätzliche theoretische Entwicklungen

III.A. Unregelmäßiges Aufhäufen. Dem quadratischen Aufhäufen, das verwendet wird, um Θ zu definieren, fehlt eine gewisse Geschmeidigkeit, da es sich als günstig erweist, die Beweise mittels eines Induktionsarguments durchzuführen. Zu diesem Zweck wollen wir die kleinen Quadrate einzeln dem großen Haufen hinzufügen. Wir stellen uns vor, die ganze Ebene sei regelmäßig aufgeteilt in Quadraten, so daß um jeden ganzzahligen Gitterpunkt in der Ebene ein zunächst leeres Quadrat der Seitenlänge 1 liegt, in das wir eine Fliese einlegen können. Eine endliche Anzahl solcher eingelegten Fliesen, oder die entsprechende Vereinigung von Quadraten, wird einfach zusammenhängend genannt, wenn sie erhalten wird, indem man mit einem gedeckten Quadrat beginnt, und gewisse zu beschreibende Gesetze einhaltend die anderen eins nach dem anderen hinzufügt. Diese Gesetze schreiben vor, wie die neue Fliese der alten Konfiguration von Fliesen angelegt werden kann. Im wesentlichen wird es verlangt, daß der Rand des Haufens bei jedem Schritt eine einfach zusammenhängende Kurve bleibt, wie er beim ersten Schritt, bei dem der Haufe aus einem einzigen Quadrat besteht, ist. Wir beschreiben alle zugelassenen Hinzufügungen eines Quadrats einer schon vorhandenen zugelassenen Konfiguration. Damit wir leicht auf diese Beschreibung hinweisen können, stellen wir uns vor, daß die neue Fliese um den Punkt $(0,0)$ eingelegt wird, und die Möglichkeiten nur bis auf Drehungen und Spiegelungen beschreiben. Dann können wir annehmen, daß das Quadrat um den Punkt $(-1,0)$ schon besetzt ist.

(i) Keins der drei Quadrate an den Punkten $(0,1)$, $(1,0)$, und $(0,-1)$ ist schon besetzt. Dann gibt es zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten.

(a) Weder $(-1,1)$ noch $(-1,-1)$ ist schon von einer Fliese gedeckt.

(b) Der Punkt $(-1,-1)$ ist gedeckt, und der Punkt $(-1,1)$ nicht gedeckt.

(c) Beide Punkte $(-1,\pm 1)$ sind schon gedeckt.

(ii) Der Punkt $(0,1)$ ist schon gedeckt, aber weder das Quadrat an dem Punkt $(1,0)$ noch das am Punkt $(0,-1)$ ist schon besetzt.

(a) Weder der Punkt $(-1,-1)$ noch der Punkt $(1,1)$ ist schon von einer Fliese gedeckt.

(b) Der Punkt $(-1,-1)$ ist schon von einer Fliese gedeckt; der Punkt $(1,1)$ aber nicht.

(c) Beide Punkte $(-1,-1)$ und $(1,1)$ sind schon gedeckt.

(iii) Die Punkte $(0,1)$ und $(0,-1)$ sind schon gedeckt; der Punkt $(1,0)$ aber nicht gedeckt.

(a) Weder der Punkt $(1,-1)$ noch der Punkt $(1,1)$ ist schon gedeckt.

(b) Der Punkt $(1,-1)$ ist schon von einer Fliese gedeckt, der Punkt $(1,1)$ aber nicht.

(c) Beide Punkte $(1,-1)$ und $(1,1)$ sind schon gedeckt.

Es muß bei jeder neu eingelegten Fliese bewiesen oder verlangt werden, daß der Rand einfach zusammenhängend bleibt, und insbesondere, daß keine Fliesen einander allein an einer Ecke berühren, ohne daß wenigstens eins der anderen zwei Quadrate, zu denen diese Ecke gehört, auch schon besetzt ist. Deshalb wird es vorausgesetzt oder leicht bewiesen in den einzelnen Fällen:
(i) Keiner der zweien Punkte $(1, \pm 1)$ ist schon gedeckt.
(ii) Der Punkt $(1, -1)$ ist noch nicht gedeckt. Der Punkt $(-1, 1)$ ist dagegen notwendigerweise, da wir bisher die Gesetze eingehalten haben, schon gedeckt.
(iii) Die Quadrate an den Punkten $(-1, \pm 1)$ müssen schon besetzt sein.
Es ist klar, daß wir das ursprüngliche quadratische Aufhäufen von n^2 Quadraten auf diese Weise erhalten können.

Das neu besetzte Quadrat hat vier Seiten, die wir nach einem offensichtlichen Prinzip mit S_o, S_u, S_l und S_r bezeichnen. Einige dieser Seiten gehören zum Rand des alten Haufens. In jedem Fall wird eine zusammenhängende Menge dieser Seiten an ein Intervall aus dem Rand des alten Haufens geklebt, und der Rand des neuen Haufens besteht aus der Vereinigung der übriggebliebenen Teilen der Ränder des Quadrats und des alten Haufens. Er ist folglich eine einfach zusammenhängende Kurve. Wie bei dem quadratischen Aufhäufen stellen wir uns vor, daß der Rand jedes Quadrats $\mathfrak{Q}$ im Haufen aufgeteilt in $4l$ Strecken der gleichen Länge ist. Es sei $\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$ die Menge dieser Strecken. Der Begriff einer äußeren oder einer inneren Strecke ändert sich bei dem Übergang vom alten Haufen $\mathfrak{H}$ zum neuen $\mathfrak{H}'$. Damit wir die Entwicklung der Wege und insbesondere der breiten Wege dabei verfolgen können, müssen wir im voraus vorschreiben, welche Strecken in den Rändern der verschiedenen Quadrate bei wiederholter Hinzufügung noch eines Quadrats innere Strecken des Haufens werden können. Zu diesem Zweck sei für jedes $\mathfrak{Q}$ eine Untermenge $I_{\mathfrak{Q}}$ von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$ vorgegeben. Wir nehmen an, daß bei jedem Schritt die zusammengeklebten Strecken alle in der Vereinigung

$$\cup_{\mathfrak{Q}} I_{\mathfrak{Q}}$$

liegen. Folglich können nur Strecken aus dieser Vereinigung innere werden. Für ein quadratisches Aufhäufen ist jedes $I_{\mathfrak{Q}}$ implizit als die Menge aller inneren Strecken aus $\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$ definiert. Wir werden an den entsprechenden Stellen den Zweck der Menge $I_{\mathfrak{Q}}$ genauer erklären.

Für einen gegebenen Haufen $\mathfrak{H}$ sei S die Vereinigung aller Strecken aus allen $\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$, $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{H}$, die zum Rand gehören, also die Vereinigung aller äußeren Strecken. Es sei I_S die Menge aller Strecken die gleichzeitig äußere sind und zu einer der Mengen $I_{\mathfrak{Q}}$, $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{H}$ gehören. Wir nehmen an, daß für jedes $\mathfrak{Q}$ im Haufen eine Funktion $y_{\mathfrak{Q}}$ in $\mathfrak{Y}_l$ vorgegebenen ist. Sie wird als Funktion auf $\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$ betrachtet. Mittels dieser vorgegeben Funktionen werden vier Funktionen y_S, $\bar{y}_S$, $\hat{y}_S$, und y_S^* auf $S \times S$ mit Werten in $\{0, 1\}$ definiert. Die Funktion y_S wird aus $\bar{y}_S$ abgeleitet, indem man den Wert von $\bar{y}_S$ allein an benachbarten Paaren abändert, wo er dann 0 wird. Genau so wird auch y_S^* aus $\hat{y}_S$ abgeleitet, so daß in der Tat nur zwei Funktionen definiert werden müssen.

Wir definieren $\bar{y}_S$ mittels der Menge $\{\bar{y}_{\mathfrak{Q}} | \mathfrak{Q} \subset \mathfrak{H}\}$, in genau derselben Weise, wie wir $\Phi(y')$ durch $\{\bar{y}_{i,j}\}$ definierten. Die Funktionen $\bar{y}_{\mathfrak{Q}}$ werden aber etwas anders definiert. In der Tat sind die Mengen $I_{\mathfrak{Q}}$ zu nichts anderem als zu diesem Zweck eingeführt worden. Die Funktion $\bar{y}_{\mathfrak{Q}}$ unterscheidet sich von der Funktion $y_{\mathfrak{Q}}$ nur an benachbarten Paaren. Damit $\bar{y}_{\mathfrak{Q}}(\alpha, \beta) = 1$ muß entweder α oder β in $I_{\mathfrak{Q}}$ liegen, und ferner muß es einen Zyklus $(\alpha, \gamma, \beta, \delta)$ geben, für den $y_{\mathfrak{Q}}(\alpha, \gamma) = 1$ und $y_{\mathfrak{Q}}(\beta, \delta) = 1$. Die Funktionen $\bar{y}_{\mathfrak{Q}}$ sind folglich definiert nicht allein mit Bezug auf den zu betrachtenden Haufen sondern auch auf weitere vergrößerte Haufen. Es ist $\bar{y}_S(\alpha, \beta) = 1$, dann und nur dann wenn es einen zulässigen Weg gibt, der von $\alpha \in S$ nach $\beta \in S$ führt. Um den nächsten Satz auszudrücken, brauchen wir eine Definition, die erst im nächsten Abschnitt angegeben wird.

Satz III.A.1 *Die Funktion $\bar{y}_S$ erfüllt die Bedingungen (3.b.1) und (3.b.4). Die Funktion y_S ist folglich eine Menge von Verbindungen im Sinne des nächsten Abschnitts.*

Die Funktion $\hat{y}_S$ wird mit Hilfe des Begriffes eines zugelassenen breiten Weges eingeführt. Wie bei einem quadratischen Aufhäufen werden breite Wege aus Schleifen, Enden, und Knoten zusammengesetzt. Diese Begriffe müssen jedoch leicht abgeändert werden, damit wir ein Induktionsverfahren durchführen können. Insbesondere müssen die Mengen $I_{\mathfrak{Q}}$ in Betracht gezogen werden. Da ähnliche Begriffe nochmals im nächsten Abschnitt eingeführt werden müssen, begnügen wir uns damit, daß wir die Unterschiede hervorheben.

Schleifen. Eine Schleife $\{\alpha, \alpha', \beta, \beta'\}$ besteht jetzt aus Strecken, die zu einem gemeinsamen $\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$ gehören. Die zusätzliche Bedingung ist, daß die Schleife nur dann zugelassen wird, wenn $\bar{y}_{\mathfrak{Q}}(\alpha, \alpha') = 0$ und $\bar{y}_{\mathfrak{Q}}(\beta, \beta') = 0$ sind.

Enden. In einem Ende $\{\alpha, \alpha', \beta\}$ muß $\bar{y}_{\mathfrak{Q}}(\alpha, \alpha') = 0$

Knoten. Sie sind wieder von drei Arten. Für die Arten (a) und (b) kommt keine neue Bedingung hinzu. Für einen Knoten der Art (c) bilden die vier Strecken die Arme eines Kreuzes, und α ist zu α' orthogonal, sowie β zu β'. Es müssen allerdings wenigstens drei der dieses Kreuz berührenden Quadrate zum Haufen gehören, aber es ist gleichgültig welche. Im Gegensatz zum quadratischen Aufhäufen gehören vielleicht nicht alle vier das Kreuz umgebenden Quadrate zum Haufen. Es wird jedoch verlangt, daß α und α' zu einem gemeinsamen Quadrate $\mathfrak{Q}$ gehören, und β und β' zu einem gemeinsamen $\mathfrak{P}$.

Um diese Definition teilweise zu erklären, beweisen wir einen einfachen Hilfsatz.

Hilfsatz III.A.2 *Es sei $y \in \mathfrak{Y}_l$. Es seien α und β zwei benachbarte Strecke aus $\mathfrak{A}_l$, die durch $\hat{y}$ mit einem gemeinsamen γ verbunden sind. Dann gibt es kein Paar $\{\gamma, \delta\}$ der Art, daß $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ ein Zyklus ist, und $y(\alpha, \delta) = 1$ und $y(\beta, \delta) = 1$.*

Wir nehmen an, es existiert ein solches Paar. Man beweist den Hilfsatz, indem man bemerkt, daß β und δ einerseits in dem Intervall $[\alpha, \gamma]$ enthalten werden müssen, das β enthält, und andererseits in dem Intervall $[\beta, \gamma]$, das α enthält. Dies ist ein Widerspruch. Als unmittelbare Folge dieses Lemmas bekommen wir ein zweites.

Hilfsatz III.A.3 *Es seien $\mathfrak{Q} \in \mathfrak{H}$ und α und β zwei benachbarte Strecken in $\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$. Sei vorausgesetzt, daß es eine Strecke $\epsilon \in \mathfrak{Q}$, die ungleich α und β ist, gibt, für die die Gleichungen $\hat{y}_{\mathfrak{Q}}(\epsilon, \alpha) = 1$ und $\hat{y}_{\mathfrak{Q}}(\epsilon, \beta) = 1$ gelten. Dann ist $\bar{y}_{\mathfrak{Q}}(\alpha, \beta) = 0$.*

Wenn $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ ein Zyklus ist, dann ist entweder $\epsilon \neq \gamma$ oder $\epsilon \neq \delta$. Wenn zum Beispiel $\epsilon \neq \gamma$, gibt es eine Reihenfolge, in der die Menge $\{\alpha, \beta, \gamma, \epsilon\}$ ein Zyklus wird. Diese Hilfsätze erlauben uns, alle Konstruktionen für ein quadratisches Aufhäufen als spezielle Fälle derselben Konstruktionen für ein unregelmäßiges Aufhäufen zu betrachten. In der Tat sind die zusätzlichen Bedingungen für Schleifen und Enden überflüssig. Sie erweisen sich nur im nächsten Abschnitt als unentbehrlich. Wir haben es dennoch vorgezogen, sie an dieser Stelle einzuführen

Diese neuen Definitionen gestatten uns eine neue Definition eines breiten zugelassen Weges, und schließlich der Funktion $\hat{y}_S$. Bei der Aussage des nächsten Satzes greifen wir zu den Definitionen des nächsten Abschnitts vor.

Satz III.A.4 *Die Funktion $\hat{y}_S$ ist zur Funktion y_S dual.*

Der Satz selbst wird als Folge des Satzes III.B.3 im Abschnitt III.C bewiesen werden. Wir schließen sofort aus dem Satz, daß y_S^* eine Menge von Verbindungen im Sinn des nächsten Abschnitts ist.

III.B. Mengen von Verbindungen. Wir betrachten einen Kreisrand oder allgemeiner eine einfach geschlossene Kurve. Diese Kurve teilen wir in geschlossenen Intervallen auf, die wir Strecken nennen. Es sei S die Menge der Strecken. Es wird immer angenommen, daß S wenigstens zwei Elemente enthält. Normalerweise durchschneiden sich zwei Strecken entweder überhaupt nicht oder in einem einzigen Punkt. Wenn ausnahmsweise S nur zwei Strecken enthält, dann haben diese Strecken zwei Endpunkte gemeinsam.

Der Begriff eines Zyklus aus S ist klar. Er bedeutet eine Reihe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ von vier Strecken aus S in der Reihenfolge, in der man ihnen begegnet, wenn man die Kurve in einer oder der anderen Richtung durchläuft. Eine Menge von Verbindungen in S ist eine Funktion y_S auf $S \times S$ mit folgenden Eigenschaften:

(3.b.1) Jede Strecke ist mit sich selbst verbunden, so daß $y_S(\alpha, \alpha) = 1$.

(3.b.2) Keine Strecke ist mit einem Nachbarn verbunden, so daß $y_S(\alpha, \beta) = 0$, wenn α und β benachbart sind.

(3.b.3) Wenn $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ ein Zyklus ist, und $y_S(\alpha, \gamma)$ sowie $y_S(\beta, \delta)$ gleich 1 sind, dann ist $y_S(\alpha, \beta) = 1$, außerdem wenn α und β benachbart sind.

Jeder Menge von Verbindungen y_S können wir eine duale Menge $\hat{y}_S$ zuordnen. Wie vorher, setzen wir $\hat{y}_S(\alpha, \gamma)$ gleich 1 dann und nur dann, wenn es keinen Zyklus $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ gibt, in dem $y_S(\beta, \delta) = 1$ ist. Anschaulicher ausgedrückt besagt diese Bedingung, daß α und γ durch keine Verbindung aus y_S getrennt werden. Die Funktion $\hat{y}_S$ selbst ist nicht die duale Funktion, da es vielleicht die zweite Bedingung einer Menge von

Verbindungen nicht erfüllt. Die duale Funktion selbst, y_S^*, erhalten wir, indem wir alle Verbindungen von benachbarten Strecken aufheben. Es gilt also $y_S^*(\alpha,\beta) = \hat{y}_S(\alpha,\beta)$, wenn α und β nicht benachbart sind. Dagegen gelten für ein benachbartes Paar die Gleichungen,

$$\hat{y}_S(\alpha,\beta) = 1,$$
$$y_S^*(\alpha,\beta) = 0.$$

Wir ziehen es jedoch vor, mit $\hat{y}_S$ zu arbeiten, und werden oft von ihm als von der zu y_S dualen Menge reden. Der nächste Satz wird im Abschnitt IV bewiesen werden.

Satz III.B.1

(1) *Die Funktion y_S^* ist eine Menge von Verbindungen.*

(2) *Die zu y_S^* duale Menge ist y_S.*

Es ist gewöhnlicherweise vorteilhaft, einer Menge von Verbindungen ein zweites und ein drittes Datum hinzuzufügen. Der in dieser Weise zustande kommende Gegenstand wird auch eine Menge von Verbindungen genannt. Um die neuen Objekte von den alten zu unterscheiden, statten wir das entsprechende Symbol mit einem Querstrich aus. Das erste Datum ist eine Untermenge I_S von S; das zweite ist eine Menge z_S von Kurzverbindungen. Diese Menge z_S ist eigentlich eine Funktion auf $S \times S$ der Art, daß $z_S(\alpha,\beta) = 0$ ist, außer wenn α und β benachbart sind. Die Kurzverbindungen verbinden deshalb nur benachbarten Strecken. Außer dieser ersten Bedingung ist der Menge z_S eine zweite Bedingung auferlegt. Es sei $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ ein Zyklus, für den $y_S(\alpha,\gamma) = y_S(\beta,\delta) = 1$ ist. Wenn α und β benachbart sind und eine in I_S liegt, dann verlangen wir, daß $z_S(\alpha,\beta) = 1$. Die Menge $\bar{y}_S$ erhält man, indem man den Verbindungen in y_S die Verbindungen in z_S hinzufügt. Die Funktion $\bar{y}_S$ erfüllt die folgende Bedingung:

(3.b.4) Wenn $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ ein Zyklus ist, und $\bar{y}_S(\alpha,\gamma)$ sowie $\bar{y}_S(\beta,\delta)$ gleich 1 sind, dann ist $\bar{y}_S(\alpha,\beta) = 1$, außerdem wenn α und β benachbart sind, und beide außerhalb I_S liegen.

Sie erfüllt dagegen die Bedingung (3.b.2) nicht. In gewisser Hinsicht ist es vorteilhaft nur mit der Menge $\bar{y}_S$ zu arbeiten. Ihr werden nur die triviale Bedingung (3.b.1) sowie die Bedingung (3.b.4) auferlegt. Ihre Werte auf benachbarten Elementen sind beliebig bis auf die Beschränkungen, die aus Bedingung (3.b.4) folgen. Die Bedingung (3.b.2) ist für die Perkolation wichtig, den kombinatorischen Konstruktionen dagegen eher nützlos und lästig. Alle in y_S und z_S enthaltene Auskunft ist auch in $\bar{y}_S$ enthalten.

Wir stellen uns einen Kreis vor, in dem ein Durchmesser ausgezeichnet ist. Die Enden des Durchmessers schneiden den Kreisrand in zwei Kurvenbogen auf. Die Vereinigung des Durchmessers und eines Bogens ist eine einfach geschlossene Kurve. Es sei S und T Aufteilungen der beiden in dieser Weise zustande kommenden geschlossenen Kurven. Wir nehmen an, daß der Durchmesser selbst eine Vereinigung von Strecken ist, die gleichzeitig zu S und zu T gehören. Es seien $Q = S \cap T$ die Menge dieser gemeinsamen Strecken und R die

Menge der Strecken, die im Rand enthalten sind. Dann ist $R = S \triangle T$. Die Strecken aus Q nennen wir *innere*, und die aus R nennen wir *äußere*. Die Menge R ergibt eine Aufteilung des Randes.

Es seien $\bar{y}_S$ und $\bar{y}_T$ zwei Mengen von Verbindungen. Wir wollen diese zwei Mengen zusammenkleben, um eine dritte Menge y_R auf R zu bilden. Statt y_R unmittelbar zu definieren, definieren wir $\bar{y}_R$. Aus dieser Menge bekommen wir y_R, indem wir alle Verbindungen von Nachbarn aufheben, und z_R, indem wir nur die Verbindungen von benachbarten Elementen in Betracht ziehen. Wir setzen voraus, daß die Menge Q zu dem Durchschnitt $I_S \cap I_T$ gehört. Die Menge I_R sei $I_S \triangle I_T$.

Es seien α und β zwei Strecken aus R. Ein zulässiger Weg, der von α nach β führt ist eine Reihe

$$\alpha = \alpha_0, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1} = \beta,$$

in der $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ alle inner sind. Ferner muß jedes Paar $\{\alpha_i, \alpha_{i+1}\}$, $0 \leq i \leq r$, entweder durch $\bar{y}_S$ oder durch $\bar{y}_T$ verbunden sein. Für $i = 0$ oder $i = r$, ist die Verbindung in $\bar{y}_S$ oder $\bar{y}_T$ je nachdem, ob die entsprechende Strecke α oder β in S oder T liegt. Es ist auch möglich, daß $r = 0$. Dann ist der Weg eine unmittelbare Verbindung zwischen α und β aus einer der zweien Mengen $\bar{y}_S$ und $\bar{y}_T$. Der nächste Satz wird in V.D bewiesen.

Satz III.B.2 *Die Funktion $\bar{y}_R$ erfüllt die Bedingung (3.b.1) und die Bedingung (3.b.4) bezüglich der Menge I_R.*

Wir wollen die zwei Mengen $\hat{y}_S$ und $\hat{y}_T$ unabhängig zusammenkleben. Die zu diesem Zweck nötige Definition ist leider etwas umständlich und verlangt die Einführung einiger zusätzlicher Definitionen, mit denen wir in einem anderen Zusammenhang schon vertraut sind, so daß wir nicht weiter versuchen werden, die Begriffe anschaulich zu machen. Die zusätzlichen Bedingungen sind jetzt unentbehrlich.

Schleifen. Eine Schleife ist eine vier-tupel $\{\alpha, \alpha', \beta, \beta'\}$ aus S oder T, in dem α und β die Hauptgegenstände sind, und α' und β' nur zusätzlich. Die Strecken α und β müssen beide innere sein. Es sind ferner α und α' sowie β und β' benachbarte Paare. Wenn $\bar{y}_S$ und $\bar{y}_T$ vorgegeben sind, heißt eine Schleife zulässig, wenn α und α' mit β und β' verbunden sind, entweder durch $\hat{y}_S$ oder $\hat{y}_T$, je nachdem ob das jeweilige Paar in S oder in T liegt. Es müssen ferner die Gleichungen $\bar{y}_P(\alpha, \alpha') = 0$ und $\bar{y}_P(\beta, \beta') = 0$ gelten, wobei P gleich S oder T ist, je nach der Lage des Paares. Es sind die zulässigen Schleifen, die von Hauptinteresse sind. Die Elemente in einem Paar $\{\alpha, \alpha'\}$ oder $\{\beta, \beta'\}$ werden oft *gespannt* geheißen.

Enden. Ein Ende besteht aus drei Strecken $\{\alpha, \alpha', \beta\}$, und α und α' bilden darin ein gespanntes Paar. Sie sind benachbart. Das Element β ist ein äußeres. Das Element α muß dagegen ein inneres sein. Zulässige Enden sind von zweierlei Arten. Es sei P gleich S oder T, je nachdem wo β liegt.

(a) Es gilt $\hat{y}_P(\alpha, \beta) = \hat{y}_P(\alpha', \beta) = 1$. Es gilt $\bar{y}_P(\alpha, \alpha') = 0$.

(b) Die Strecke α' ist eine äußere und β ist ein Nachbar von α. Wenn $\beta \neq \alpha'$ sind diese zwei Strecken in R notwendigerweise benachbart, bis auf den Fall, daß α die einzige innere Strecke ist. Dann wird diese Bedingung zusätzlich verlangt.

Der Fall, daß $\beta = \alpha'$ ist, ist von geringem Interesse, denn dieses Ende erweist sich als überflüssig. Obwohl bei den Enden sowie bei den Schleifen α und α' oder β und β' nicht symmetrisch auftreten, wird die Symmetrie wieder hergestellt mittels der Definition eines Knotens.

Knoten. Ein Knote $\{\alpha, \alpha', \beta, \beta'\}$ besteht aus vier Strecken. Es sind wieder beide Paare $\{\alpha, \alpha'\}$ und $\{\beta, \beta'\}$ benachbart. Knoten sind alle zulässig und von zweien Arten.

(a) Alle vier Strecken im Knoten sind innere, und entweder $\alpha = \beta$ und $\alpha' = \beta'$ oder $\alpha = \beta'$ und $\alpha' = \beta$.

(b) Die Strecken α und β sind innere, und $\alpha = \beta$. Die Strecken α' und β' sind dagegen äußere.

Es seien α und β zwei äußere Strecken. Ein breiter zulässiger Weg, der von α nach β führt, ist zunächst eine Reihe

$$C_{-1}, \ldots, C_{2r+1},$$

der gewisse näher zu beschreibende Bedingungen auferlegt werden. Es bestehen zwei Möglichkeiten. Eine ist trivial. Die ganze Zahl $r = -1$, die Strecken α und β liegen beide entweder in $R \cap S$ oder in $R \cap T$, und sie sind verbunden durch die jeweilige Menge $\hat{y}_P$ von Verbindungen, wobei P gleich S oder T ist. Es gilt also $\hat{y}_P(\alpha, \beta) = 1$. Das einzige Element C_{-1} der Reihe ist das Paar $\{\alpha, \beta\}$. Wir reden von einer unmittelbaren Verbindung. Sonst ist $r \geq 0$. Das erste Glied der Reihe ist ein zulässiges Ende

$$C_{-1} = \{\alpha = \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_0'\}.$$

Die Glieder C_{2i}, $0 \leq i \leq r$, sind alle Knoten,

$$C_{2i} = \{\alpha_{2i}, \alpha_{2i}', \alpha_{2i+1}, \alpha_{2i+1}'\}.$$

Die Glieder C_{2i+1}, $0 \leq i < r$, sind zulässige Schleifen,

$$C_{2i+1} = \{\alpha_{2i+1}, \alpha_{2i+1}', \alpha_{2i+2}, \alpha_{2i+2}'\}.$$

Es ist schließlich C_{2r+1} ein zulässiges Ende,

$$C_{2r+1} = \{\alpha_{2r+1}, \alpha_{2r+1}', \alpha_{2r+2} = \beta\}.$$

Diese Beschreibung eines zulässigen breiten Weges ist etwas umständlich, und es ist normalerweise einfacher statt allen Schleifen, Enden, und Knoten, die Reihe,

$$\alpha = \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_0', \ldots, \alpha_{2i}, \alpha_{2i}', \alpha_{2i+1}, \alpha_{2i+1}', \ldots, \alpha_{2r+1}, \alpha_{2r+1}', \alpha_{2r+2} = \beta$$

anzugeben. Wir setzen $\hat{y}_R(\alpha,\beta)=1$, dann und nur dann, wenn es einen breiten zulässigen Weg gibt, der von α nach β führt. Es wäre nach wie vor genauer von einem von $\hat{y}_S$, $\hat{y}_T$, $\bar{y}_S$, und $\bar{y}_T$ zugelassenen Weg, oder wenigstens von einem von y_S und y_T zugelassenen, zu reden. Wir erlauben uns jedoch etwas Nachlässigkeit in den Redewendungen.

Als Beispiel eines etwas entarteten breiten Weges, betrachten wir zwei benachbarte äußere Strecken, $\alpha \in S$ und $\beta \in T$. Es sei γ ihr gemeinsamer Nachbar in Q. Dann ist

$$\begin{aligned} C_{-1} &= \{\alpha,\gamma,\beta\} \\ C_0 &= \{\gamma,\alpha,\gamma,\beta\} \\ C_1 &= \{\alpha,\gamma,\beta\} \end{aligned}$$

ein breiter zugelassener Weg, der von α nach β führt. Folglich sind zwei solche Elemente immer durch $\bar{y}_R$ verbunden. Allgemeiner gilt

Satz III.B.3 *Die Menge $\hat{y}_R$ ist zur Menge y_R dual.*

Dieser Satz wird in V.D bewiesen. Damit wir diesen Satz sowie die vorhergehenden auf das Aufhäufen verwenden können, brauchen wir zwei Hilfsätze. In diesen Hilfsätzen wird der Begriff einer Schleife leicht abgeändert. Eine Schleife oder Ende im schwachen Sinn erfüllte dieselben Bedingungen wie eine Schleife oder ein Ende, nur daß im zweiten gespannten Paar beide Elemente äußere sein können. Übertriebenerweise nennen wir $\{\alpha,\alpha',\beta,\beta'\}$ eine zulässige Schleife im sehr schwachen Sinn, wenn beide gespannte Paare nur äußere Elemente enthalten. Diese ungeschickt benannten Begriffe werden sehr selten verwendet. Nichtsdestoweniger sind die nächsten zwei Hilfsätze den Beweisen der Hauptergebnisse unentbehrlich, und ermöglichen das Verwenden des Induktionsverfahrens. Sie erklären die Einführung der Mengen I_S und I_T und die Bedingung, die einem gespannten Paar in einer zugelassenen Schleife oder in einem zugelassenen Ende auferlegt wird. Ein zugelassenes Ende oder eine zugelassene Schleife in R wird aufgebaut als Kette von zugelassenen Schleifen, Enden, und Knoten in S und T.

Hilfsatz III.B.4 *Es seien α, β, und β' drei Strecken aus R. Es sei vorausgesetzt, daß es einen zulässigen Weg,*

$$C_{-1},\dots,C_{2r+1},$$

gibt, der von α nach β führt, sowie einen zulässigen Weg

$$D_{-1},\dots,D_{2s+1},$$

der von α nach β' führt. Es sei weiter angenommen, daß $\bar{y}_R(\beta,\beta')=0$. Es werden zwei Möglichkeiten unterschieden:

(1) *Die Strecken β und β' gehören beide entweder zu I_S oder zu I_T. Dann existiert eine Reihe,*

$$E_{-1}, \ldots, E_{2t+1},$$

die genau so gebildet ist, wie ein zulässiger breiter Weg, der am Punkt α anfängt, nur daß das letzte Glied E_{2t+1} nicht ein Ende sondern eine Schleife, zulässig im schwachen Sinn,

$$E_{2t+1} = \{\gamma_{2t+1}, \gamma'_{2t+1}, \beta, \beta'\},$$

oder in Ausnahmefällen, daß $t = -1$, ein zulässiges Ende, wieder im schwachen Sinn,

$$E_{2t+1} = \{\gamma_{-1}, \beta, \beta'\},$$

ist. Es ist $\gamma_{-1} = \alpha$.

(2) *Die Strecke β gehört zu I_S und die Strecke β' zu I_T. Es sei γ der zu β und β' gemeinsame Nachbar in Q. Dann existiert eine Reihe ähnlicher Art, in der das letzte Glied eine zulässige Schleife*

$$E_{2t+1} = \{\gamma_{2t+1}, \gamma'_{2t+1}, \gamma, \beta\}$$

oder

$$E_{2t+1} = \{\gamma_{2t+1}, \gamma'_{2t+1}, \gamma, \beta'\}$$

ist, und im Ausnahmefall $t = -1$, ein Ende

$$E_{-1} = \{\gamma_{-1}, \gamma, \beta\}$$

oder

$$E_{-1} = \{\gamma_{-1}, \gamma, \beta'\}$$

Wir betonen, daß im ersten Teil des Hilfsatzes, wenn zum Beispiel β und β' beide zu S gehören, dann ist $\bar{y}_S(\beta, \beta') = 0$, und ferner im zweiten Teil ist $\bar{y}_S(\gamma, \beta) = 0$ oder $\bar{y}_{S'}(\gamma, \beta') = 0$, je nachdem welches Paar $\{\gamma, \beta\}$ oder $\{\gamma, \beta'\}$ in E_{2t+1} auftritt. Der zweite Hilfsatz unterscheidet sich kaum vom ersten. Da er dem gesamten Beweis so wichtig ist, schreiben wir ihn trotzdem vollständig auf.

Hilfsatz III.B.5 *Es seien α, α', β, und β' vier Strecken aus R. Es seien α und α' sowie β und β' benachbart. Es gelten folgende Gleichungen:*

$$\hat{y}_R(\alpha, \beta) = \hat{y}_R(\alpha', \beta) = \hat{y}_R(\alpha, \beta') = \hat{y}_R(\alpha', \beta') = 1;$$
$$\bar{y}_R(\alpha, \alpha') = \bar{y}_R(\beta, \beta') = 0$$

(1) *Wenn α und α' zu einem gemeinsamen I_P, $P = S$ oder $P = T$, und β und β' zu einem gemeinsamen $I_{P'}$ gehören, existiert eine Reihe,*

$$E_{-1}, \ldots, E_{2t+1},$$

die genau so gebildet wird, wie ein zulässiger breiter Weg, bis auf das erste und das letzte Glied. Diese sind zulässige Schleifen im schwachen Sinn und folgenderweise gestaltet:

$$E_{-1} = \{\alpha, \alpha', \gamma_0, \gamma_0'\};$$
$$E_{2t+1} = \{\gamma_{2t+1}, \gamma_{2t+1}', \beta, \beta'\}.$$

Ausnahmsweise, wenn $t = -1$, ist E_{-1} eine Schleife im sehr schwachen Sinn.

(2) *Wenn die Strecke β zu I_S gehört und die Strecke β' zu I_T, und die Strecken α und α' dagegen zu derselben Menge S, sei γ der zu β und β' gemeinsame Nachbar in Q. Dann existiert eine Reihe ähnlicher Art, in der das letzte Glied eine zulässige Schleife*

$$E_{2t+1} = \{\gamma_{2t+1}, \gamma_{2t+1}', \gamma, \beta\}$$

oder

$$E_{2t+1} = \{\gamma_{2t+1}, \gamma_{2t+1}', \gamma, \beta'\}$$

ist, und im Ausnahmefall $t = -1$, eine Schleife

$$E_{-1} = \{\gamma_{-1}, \gamma_{-1}', \gamma, \beta\}$$

oder

$$E_{-1} = \{\gamma_{-1}, \gamma_{-1}', \gamma, \beta'\}$$

zulässig im schwachen Sinn

Es kommt allerdings noch ein dritter Fall vor, wenn α und β zu S gehören und α' und β' zu T. Die Aussage muß dann entsprechend geändert werden. Dies überlassen wir dem Leser. Es stellt sich heraus, daß wir noch was beweisen müssen, um das Induktionsverfahren erfolgreich durchzuführen. Obwohl wir y_R, $\bar{y}_R$ und I_R eingeführt haben, haben wir die Funktion y_R mit Hilfe der Funktion $\bar{y}_R$ definiert, und nicht umgekehrt wie für $\bar{y}_{\mathfrak{Q}}$. Es erweist sich, daß die durch y_R und I_R definierte Funktion nicht immer die durch zulässige Wege definierte Funktion ist, auch wenn vorausgesetzt wird, daß $\bar{y}_S$ und $\bar{y}_T$ durch y_S, y_T, I_S, und I_T definiert werden. Ein einfaches Beispiel wird auf der Abbildung 6 gezeigt. Es gehören α und β zu I_R, und $y_R(\gamma, \delta)$ ist 0, wenn $\gamma \neq \delta$. Der Weg von α nach β kann bei wiederholten Zusammenklebung wichtig werden, Die Abweichung der beiden Definitionen von $\bar{y}_R$ voneinander wird uns in der Mitte des nächsten Abschnitts einige Schwierigkeit bereiten. Die folgende Bedingung ist leider beim Zusammenkleben nicht erhalten, und wir brauchen einen Ersatz.

(3.b.5) Es sei $\bar{y}_S$ eine Menge von Verbindungen und I_S eine zusätzliche Menge in S. Es sei $\{\beta, \beta'\}$ ein benachbartes Paar aus S mit $\beta \in I_S$. Es sei ferner α ungleich β oder β', und $\hat{y}_S(\alpha, \beta) = 1$ und $\hat{y}_S(\alpha, \beta') = 1$. Dann gilt $\bar{y}_S(\beta, \beta') = 0$. Es gilt auch $\bar{y}_S(\beta, \beta') = 0$, wenn weder β noch β' zu I_S gehört.

Wenn wir y_S aus $\bar{y}_S$ ableiten, dann hat diese Bedingung zur Folge, daß $\bar{y}_S$ wiederum aus y_S und I_S abgeleitet werden kann.

Hilfsatz III.B.6 *Es sei die Anzahl der Elemente in S wenigstens 4, und es gelte die Bedingung (3.b.5) für das Paar $\{\beta, \beta'\}$ und jedes α. Wenn $\bar{y}_S(\alpha, \beta) = 1$, existiert ein Zyklus $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ in S, für den $y_S(\alpha, \beta) = 1$ und $y_S(\gamma, \delta) = 1$.*

Auf der einfach zusammenhängenden Kurve, die S aufteilt, beginnen wir am Nachbarn zu α auf der β gegenüber liegenden Seite, und gehen wir von α weg, bis wir die letzte Strecke δ erreichen, für die $\hat{y}_S(\alpha, \delta) = 1$. Die Strecke γ wird bezüglich β ähnlich definiert. Wenn $\bar{y}(\alpha, \beta) = 1$ ist, folgt es aus der Bedingung (3.b.5), daß die Reihe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ zyklisch ist. Da y_S und $\hat{y}_S$ dual sind, gelten folgende Gleichungen

$$y_S(\alpha, \delta) = y_S(\alpha, \gamma) = y_S(\beta, \gamma) = y_S(\beta, \delta) = 1.$$

Somit wird der Hilfsatz bewiesen.

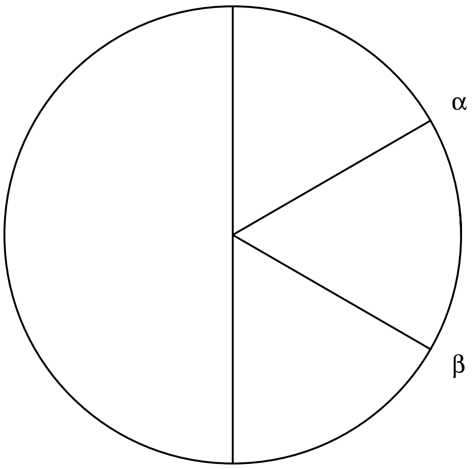

Abbildung 6

Um uns auf die Aussage des nötigen Hilfsatzes, der einen Ersatz zur Bedingung (3.b.5) liefert, vorzubereiten, wollen wir zu einer genauen geometrischen Vorstellung der breiten Wege, die in den zweien Hilfsätzen III.B.4 und III.B.5 auftreten, gelangen. Diese Vorstellung ist auch nützlich für einen Haufen, auf den wir bald zurückkommen werden. Eine (schwach) zulässige Schleife hat zwei natürlich definierte Seiten. Es seien $\{\alpha, \alpha'\}$ und $\{\beta, \beta'\}$ die zwei gespannten Paare der Schleife. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß sie nicht berücksichtigt, welche Strecken inner und welche äußer sind. Es wird vielmehr verlangt, daß $\{\alpha, \alpha', \beta', \beta\}$ zyklisch ist. Dann ist eine

Seite $\{\alpha, \beta\}$ und die andere $\{\alpha', \beta'\}$. Wir stellen uns also die Schleife als ein Band vor, das sich vom Paar $\{\alpha, \alpha'\}$ zum Paar $\{\beta, \beta'\}$ streckt. Die den Schleifen aus einer Reihe

$$W = E_{-1}, \ldots, , E_{2t+1}$$

entsprechenden Bänder werden in einer natürlicher Weise ausgefüllt von den Knoten, oder eigentlich von den Knoten der Art (b) und (c), denn die Knoten der Art (a) tragen nichts bei. Das Ergebnis ist ein langes Band mit zwei Rändern.

Ein Knoten der Art (b) trägt ein eingesetzes Dreieck mit Ecken $\alpha = \beta$, α', und β' dem Band bei. Die Seiten der zwei Schleifen, die die gemeinsame innere Strecke $\alpha = \beta$ enthalten, werden zusammengenäht, und zwischen die Seiten, die α' und β' enthalten, wird die Seite α', β' des Dreiecks eingenäht. Die Seiten (α, α') und (β, β') des Dreiecks werden also direkt an die entsprechenden Enden der Schleifen angenäht. Ein Knoten der Art (c), der nur für Haufen auttritt, trägt dem Band ein rechteckiges Stück bei. Die Strecken seien, in zyklischer Reihenfolge um ihren gemeinsamen Punkt, die Strecken α, α', β', β. Die Seiten (α, α') und (β, β') werden an die Enden der zwei Schleifen angenäht, und die freien Seiten sind (α, β) und (α', β'). Wenn, wie beim zweiten Teil des Hilfsatzes III.B.4, die letzte Schleife das Paar $\{\beta, \beta'\}$ nicht erreicht, so daß, zum Beispiel, das letzte angespannte Paar in E_{2t+1} gleich $\{\gamma, \beta\}$ ist, dann nähen wir noch ein Stück an das Band, ein Dreieck (β, β', γ), Die Seiten (β, β') und (γ, β') bleiben frei, und die Naht ist an der Seite (γ, β).

Auf diese Weise ergibt der breite Weg W im Satz III.B.5 ein Band mit zwei Rändern und zwei Enden. Die Enden sind (α, α') und (β, β'). Ein breiter Weg, wie der, der im Hilfsatz III.B.4 beschrieben ist, ergibt dagegen ein Band, dessen eines Ende in einen Zipfel an der Strecke α entartet. Wir betonen, daß bei dieser geometrischen Denkweise die Strecken als Punkte vorzustellen sind, so daß das Band nur mit Vorsicht als ein Gegenstand in derselben Ebene wie die Quadrate dargestellt werden kann. In beiden Fällen bestimmt das Band eine zyklische Reihenfolge auf der Menge der Strecken in seinem vollständigen Rand. Außerdem ist der Begriff von zweien benachbarten Strecken auf diesem Rand klar. Intuitiv ist es klar, daß $\bar{y}_R$-Verbindungen ein auf diese Weise gebildetes Band nicht durchqueren können. Insbesondere wenn $\{\alpha, \alpha'\}$ ein gespanntes Paar an einem Ende des Bandes ist, gilt $\bar{y}_R(\alpha, \alpha') = 0$. Diese Aussage ist der Inhalt des Hilfsatzes III.B.7; sie ist leider keine Folge des Satzes III.B.3, und muß zusätzlich bewiesen werden.

Bei den Hilfsätzen III.B.4 und III.B.5 kommen zwei Arten breiter Wege vor. Bei der ersten ist $\bar{y}_S(\beta, \beta') = 0$ oder $\bar{y}_T(\beta, \beta') = 0$, denn die Schleife

$$E_{2t+1} = \{\gamma_{2t+1}, \gamma'_{2t+1}, \beta, \beta'\}$$

wäre sonst nicht zulässig. Von der zweiten haben wir nur verlangen können, daß für die letzte Schleife, die beispielsweise folgende Gestalt hat,

$$E_{2t+1} = \{\gamma_{2t+1}, \gamma'_{2t+1}, \gamma, \beta'\},$$

$\bar{y}_T(\gamma, \beta') = 0$ sei. Der nächste Hilfsatz liefert einen zweckmässigen Ersatz für die Bedingung (3.b.5), da er bürgt, daß $\bar{y}_R(\beta, \beta') = 0$ ist, wenn eine Kette vorhanden ist, die wie die in den Hilfsätzen III.B.4 und III.B.5 aus zulässigen Schleifen und Enden gebaut wird, ohne daß jedoch im voraus verlangt wird, daß $\bar{y}_R(\beta, \beta') = 0$ sei. Es genügt eine Kette wie im Hilfsatz III.B.4 zu betrachten, und der Hilfsatz betrifft implizit diesen Fall. Wenn es um eine Kette wie im Hilfsatz III.B.5 geht, können wir denn eins der gespannten Elemente α und α' auslassen. Die Strecke α ist natürlich eine äußere. In der Aussage unterscheiden wir der Klarheit halber zwei Fälle, obwohl der Schluß immer derselbe ist.

Hilfsatz III.B.7 *(1) Die Strecken β und β' gehören beide zu S oder zu T. Es sei*

$$W = E_{-1}, \ldots, E_{2t+1}$$

ein zulässiger breiter Weg, der mit einer Schleife

$$E_{2t+1} = \{\gamma_{2t+1}, \gamma'_{2t+1}, \beta, \beta'\},$$

oder im Ausnahmefall $t = -1$ mit einem Ende

$$E_{2t+1} = \{\gamma_{-1}, \beta, \beta'\},$$

endet. Dann gilt $\bar{y}_R(\beta, \beta') = 0$.

(2) Es liegen β in S und β' in T, und γ sei ihr gemeinsamer Nachbar in Q. Es sei

$$W = E_{-1}, \ldots, E_{2t+1}$$

ein zulässiger breiter Weg, der mit einer Schleife

$$E_{2t+1} = \{\gamma_{2t+1}, \gamma'_{2t+1}, \gamma, \beta'\},$$

oder im Ausnahmefall $t = -1$ mit einem Ende

$$E_{2t+1} = \{\gamma_{-1}, \gamma, \beta'\},$$

endet. Dann gilt wieder $\bar{y}_R(\beta, \beta') = 0$.

Es ist eher der entsprechende Hilfsatz für unregelmäßige Haufen, den wir brauchen. Seine Aussage befindet sich im nächsten Abschnitt. Den Hilfsatz III.B.7 selbst werden wir im Abschnitt V.F beweisen.

III.C. Zurückführung der Beweise auf Mengen von Verbindungen.

Die Dualität, also der Satz III.B.1, wird direkt im nächsten Abschnitt behandelt. Es handelt sich im vorliegenden Abschnitt darum, die Sätze III.A.1 und III.A.4 aus den Sätzen III.B.2 und III.B.3 abzuleiten. Beide

Sätze besagen nichts, wenn der Haufe $\mathfrak{H}$ aus einem einzigen Quadrat besteht. Es kommt folglich darauf an, die Gültigkeit der Sätze für einen Haufen $\mathfrak{H}'$ nachzuprüfen, wenn $\mathfrak{H}'$ aus $\mathfrak{H}$ und einem hinzugelegten Quadrat $\mathfrak{Q}$ besteht, und die Sätze für $\mathfrak{H}$ gelten. Zu diesem Zweck werden wir die Sätze III.B.2 und III.B.3 anwenden. Es seien S die Menge der äußeren Strecke von $\mathfrak{H}$ und T die Menge der äußeren Strecken von $\mathfrak{Q}$. Dann ist Q die Menge der zusammengeklebten Strecken und R die Menge der äußeren Strecken für $\mathfrak{H}'$. Es seien I_S der Durchscnit

$$S \cap \cup_{\mathfrak{H}} I_{\mathfrak{P}}$$

und $I_T = I_{\mathfrak{Q}}$. Als Induktionsannahme setzen wir unter anderem voraus, daß die Funktionen y_S, $\bar{y}_S$, $\hat{y}_S$, und y_S^*, von denen nur $\bar{y}_S$ und $\hat{y}_S$ unabhängig definiert werden müssen, die durch die Mengen $\{y_{\mathfrak{P}} | \mathfrak{P} \in \mathfrak{H}\}$, $\{I_{\mathfrak{P}} | \mathfrak{P} \in \mathfrak{H}\}$, und $\{z_{\mathfrak{P}} | \mathfrak{P} \in \mathfrak{H}\}$ definierte Funktionen sind, und beweisen, daß y_R, $\bar{y}_R$, $\hat{y}_R$, und y_R^* dann die durch die entsprechenden Mengen für $\mathfrak{H}'$ Funktionen sind.

Daß der Satz III.A.1 eine unmittelbare Folge des Satzes III.B.2 ist, ist klar, denn die Definitionen der entsprechenden Gegenstände $\bar{y}_S$ sind offensichtlich verträglich. Dagegen müssen wir, um den Satz III.A.4 aus dem Satz III.B.3 abzuleiten, die Definitionen der Funktionen $\hat{y}_S$, die in den beiden Sätzen verwendet werden, genauer ansehen. Die breiten zugelassenen Wege,

$$W = C_{-1}, \ldots, C_{2r+1},$$

werden bei den zwei Sätzen anders definiert, und es muß gezeigt werden, daß wenn ein breiter zugelassener Weg in dem einen Sinn vorhanden ist, der von α nach β führt, dann steht auch ein Weg im zweiten Sinn zur Verfügung. Wir werden auch in derselben Weise die Reihen, die in den Hilfsätzen III.C.1 und III.B.7 vorkommen, vergleichen, denn wir wollen den Hilfsatz III.C.1, der unten angegeben wird, aus dem Hilfsatz III.B.7 ableiten.

Erstens ist es nicht sofort klar, daß eine von y_S zugelassene Schleife oder ein von y_S zugelassenes Ende durch eine Kette von von $\{y_{\mathfrak{P}} | \mathfrak{P} \in \mathfrak{H}\}$ zugelassenen Schleifen, Enden und Knoten ersetzt werden kann. Zu diesem Zweck beweisen wir die Hilfsätze III.B.4 und III.B.5 mittels Induktion. Sie erlauben uns in dem Induktionsverfahren, jede Schleife oder Ende bezüglich S schrittweise abzuändern, indem wir rückwarts durch die hinzugefügten Quadrate durchgehend diese Schleife oder dieses Ende aus Schleifen und Enden in den einzelnen Quadraten aufbauen, und dann, um das Induktionsverfahren einen Schritt weiter vorwärtszubringen, die entsprechende Möglichkeit für das Paar R und $\mathfrak{H}'$ nachprüfen.

Es muß folglich untersucht werden, ob die durch die Knoten erlaubten Verbindugen zwischen Ketten in $\mathfrak{H}$ oder in S und Ketten in $\mathfrak{Q}$ wirklich dieselben sind, und darüber hinaus ob sie äquivalent den Verbindungen durch Knoten in dem Haufen $\mathfrak{H}'$ sind. Diese Untersuchung ist auch ein Teil des ersten Verfahrens, des schrittweisen Aufbauens von Schleifen und Enden, dessen Möglichkeit in einer streng systematischen Darlegung als Sätze, die mittels Induktion zu beweisen wären, formuliert würden. Diese Saẗze wären den Sätzen III.B.4 und III.B.5 ähnlich, nur daß die Aussagen noch umständlicher wären. Folglich ziehen wir es vor, sie nicht ausdrücklich anzugeben, obwohl wir gelegentlich diejenigen Stellen hervorheben werden, die dem Nachprüfen dieser Möglichkeit gewidmet sind.

Ein Hilfsatz möchten wir dennoch ausdrücklich angeben. Er entspricht dem Hilfsatz III.B.7; er bezieht sich aber auf einen unregelmäßigen Haufen und die durch die Menge $\{y_{\mathfrak{Q}}\}$ definierte Funkton $\bar{y}$. In der Aussage verliert das Symbol $\mathfrak{Q}$ vorübergehend seine Bedeutung als hinzugelegtes Quadrat.

Hilfsatz III.C.1 *Es sei*

$$W = E_{-1}, \dots, E_{2r+1},$$

eine Kette, die alle Bedingungen eines zulässigen breiten Wegs erfüllt, nur daß das letzte Glied E_{2r+1} eine der folgenden Gestalten hat.

(1) *Es endet mit einem gespannten Paar $\{\beta, \beta'\}$, in dem β und β beide äußere sind, sie zu einem gemeinsamen Quadrat $\mathfrak{Q}$ gehören, und $\bar{y}_{\mathfrak{Q}}(\beta, \beta') = 0$ ist.*

(2) *Es endet mit einem gespannten Paar $\{\gamma, \beta'\}$, in dem ein Element β' ein äußeres ist, das zweite γ ein inneres, und $\bar{y}_{\mathfrak{Q}}(\gamma, \beta') = 0$ ist, wenn $\mathfrak{Q}$ das diese beiden Elemente enthaltende Quadrat ist. Es sei β eine dritte äußere Strecke, die eine Ecke gemeinsam mit γ und β' besitzt.*

(3) *Es endet mit einem gespannten Paar $\{\gamma, \gamma'\}$, in dem beide Elemente innere sind. Sie gehören zu einem Quadrat $\mathfrak{Q}$, für das $\bar{y}_{\mathfrak{Q}}(\gamma, \gamma') = 0$. Es seien weiter β und β' zwei verschiedene äußere Strecken, so daß alle vier Strecken β, β', γ, γ' eine gemeinsame Ecke haben.*

Dann gilt $\bar{y}(\beta, \beta') = 0$.

Wir bemerken, daß es wohl möglich ist, daß γ und β zu keinem gemeinsamen Quadrat gehören. Wir heben hervor, daß der Weg mit einem Ende $\{\alpha, \gamma_1, \gamma_1'\}$, in dem α eine äußere Strecke ist, beginnt. Dieser Hilfsatz wird auch mittels Induktion bewiesen; er ist allerdings auch im schrittweisen Aufbauen der Ketten von Schleifen und Enden verwickelt. Da zu seinem Beweis kein Aufbauen explizit nötig ist, können wir diesen Beweis nach dem restlichen Beweis angeben. Genauer erklärt, um bei den Beweisen von den Sätzen und III.A.3, sowie bie den Beweisen der implizit zur Hilfe herangezogenen Verallgemeinerungen der Hilfsätze III.B.4 und III.B.5, von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}'$ überzugehen, verwenden wir den Hilfsatz auf $\mathfrak{H}$ allein. Folglich ist es gestattet, bei den Beweisen aller anderen Sätze und Hilfsätze für $\mathfrak{H}'$ diesen einen Hilfsatz auf $\mathfrak{H}$ zu verwenden.

Zum Zweck des schrittweisen Aufbauens der Ketten ist es sonst vorteilhaft, mindestens für die Vorstellungskraft weniger anstrengend, die verschiedenen im Abschnitt III.A beschriebenen Fälle einzeln zu behandeln, obwohl wir in der Tat insgesamt zwei fragliche Konfigurationen auszeichnen können, die allein problematisch sind. Bei den anderen ist dennoch der erste Teil des Hilfsatzes III.C.1 unentbehrlich. Die problematischen Fälle treten auf, erstens, wenn in $\mathfrak{H}'$ drei Quadrate eine gemeinsame Ecke besitzen, und nur zwei von diesen Quadraten zu $\mathfrak{H}$ gehören, und zweitens, wenn vier Quadrate in $\mathfrak{H}'$ eine Ecke gemeinsam haben, und nur drei von diesen

Quadraten zu $\mathfrak{H}$ gehören. Diese Konfigurationen sind fraglich, entweder weil in $\mathfrak{H}$ Knoten der Art (c) vorhanden sind, die bei dem Zusammenkleben von $\hat{y}_S$ und $\hat{y}_T$ nicht unmittelbar verwendet werden, oder weil im Kreuz von Strecken um die gemeinsame Ecke die zwei Strecken, die in S benachbart sind und Zusammenklebungen vermitteln, in keinem gemeinsamen Quadrat enthalten sind, und deswegen beim Zusammenkleben in den Haufen keine direkte Rolle spielen.

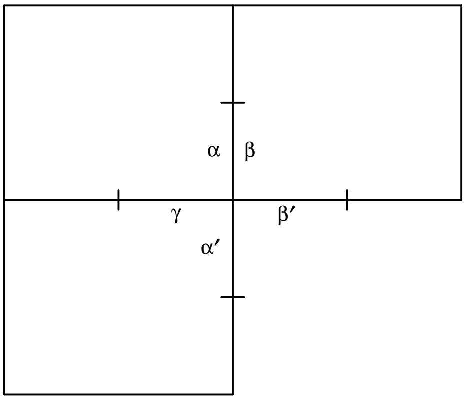

Abbildung 7

Bei dem Fall (i) kommt nur eine einzige fragliche Konfiguration vor, und zwar bei den Fällen (i.b) und (i.c). Es genügt (b) allein zu behandeln. Es sei α die letzte gegen unten liegende Strecke in $S_r(-1,0)$, der rechten Seite des Quadrats am Punkt $(-1,0)$. Alle Strecken aus $S_r(-1,0)$ liegen in S und in Q. Es sei α' ihre Nachbar in $S_r(-1,-1)$. Es liegt α' in $S \cap R$. Es seien $\beta = \alpha$, betrachtet aber als Strecke in $T \cap Q$, und β' sein Nachbar in $S_u(0,0)$. Die Strecke β' liegt in $T \cap R$. Es sind α und β inner und α' und β' äußer. Folglich ist $\{\alpha, \alpha', \beta, \beta'\}$ ein möglicher Knoten für das Zusammenkleben von $\hat{y}_S$ und $\hat{y}_T$, wenn $\bar{y}_S(\alpha, \alpha') = 0$ und $\bar{y}_{\mathfrak{Q}}(\beta, \beta') = 0$. Im Haufen $\mathfrak{H}$ gehören α und α' dagegen zu keinem gemeinsamen Quadrat. Die Strecken und die betreffenden Quadrate werden auf der Abbildung 7 gezeigt.

Wir nehmen an, es kommen zwei Schleifen oder Enden im breiten von y_S und y_T zugelassenen Weg vor, die durch diesen Knoten zusammengebunden werden. Es sei γ der zu α und α' gemeinsame Nachbar in $S_u(-1,0) \cap S_o(-1,-1)$. Wenn wir die Induktionsannahme für $\mathfrak{H}$, also die Möglichkeit des Aufbauens einer Kette von Schleifen, Knoten, und Enden aus $\mathfrak{H}$ mit denselben Anfangspunkten und Endpunkten wie denen der zusammengebundenen Schleifen und Enden, voraussetzen und darüber hinaus die Hilfsätze III.B.4 und III.B.5 oder eigentlich ihre $\mathfrak{H}$ betreffenden Verallgemeinerungen anwenden, bekommen wir eine Kette, deren letzes Glied eine zugelassene Schleife oder ein zugelassenes Ende ist, für das das gespannte Paar $\{\alpha, \alpha'\}$ entweder durch $\{\alpha, \gamma\}$ oder $\{\alpha', \gamma\}$ ersetzt wird. Im ersten Fall können wir es mit dem darauf folgenden Element, einer Schleife oder einem Ende, durch den Knoten $\{\alpha, \gamma, \alpha, \beta'\}$ der Art (b) verbinden und im zweiten durch den Knoten $\{\alpha', \gamma, \alpha, \beta'\}$ der Art (c). Diese sind Knoten in $\mathfrak{H}'$. Wir heben hervor, daß im ersten Fall $\bar{y}_{\mathfrak{P}}(\alpha, \gamma) = 0$,

$\mathfrak{P} = S(-1,0)$, ist und im zweiten $\bar{y}_{\mathfrak{P}}(\alpha',\gamma) = 0$, $\mathfrak{P} = S(-1,-1)$. Folglich ist es möglich, insofern nur diese erste Art von fraglichen Knoten vorhanden ist, das erwünschte Aufbauen durchzuführen. Wir wiederholen, bei dem Übergang von S zu $\mathfrak{H}$ ist fraglich ein Knoten, der eine Schleife bezüglich S mit einer Schleife bezüglich T (oder $\mathfrak{Q}$) verbindet, wenn die erste Schleife mit dem gespannten Paar $\{\alpha,\alpha'\}$ endet, und die zweite mit $\{\alpha,\beta'\}$. Wir wenden den Hilfsatz III.B.4, oder eigentlich seine nicht angegebe Verallgemeinerung auf $\mathfrak{H}$ an, um die Existenz eines diese Schleife ersetzenden zulässigen Teil eines breiten Weges zu zeigen, der entweder mit dem gespannten Paar $\{\gamma,\alpha\}$ endet oder mit dem Paar $\{\gamma,\alpha'\}$. Im ersten Fall ist α' unnütz; die Verbindung kommt mittels des Knotens $\{\alpha,\gamma,\alpha,\beta'\}$ zustande; im zweiten mittels $\{\alpha',\gamma,\alpha,\beta'\}$. Dagegen beim Paar S und T wird die direkte Verbindung zwischen $\{\gamma,\alpha'\}$ und $\{\beta,\beta'\}$, die in $\mathfrak{H}'$ vorhanden ist, vermittelt. Bezüglich $\mathfrak{H}$ ist nämlich $\{\gamma,\alpha',\alpha\}$ ein zugelassenes Ende, so daß, wenn wir aus der äußeren Strecke ϵ oder aus einem Paar $\{\epsilon,\epsilon'\}$ von inneren Strecken in $\mathfrak{H}$ auf einem Teil eines breiten Weges das Paar $\{\gamma,\alpha'\}$ erreichen können, dann können wir aus ϵ oder $\{\epsilon,\epsilon'\}$ das Paar $\{\alpha',\alpha\}$ auf einer Schleife oder auf einem Ende in S erreichen. Wenn wir uns vergewissern, daß $\bar{y}_S(\alpha,\alpha') = 0$ ist, können wir den entspechenden Teil des breiten Weges in $\mathfrak{H}$ durch diese Schleife oder dieses Ende ersetzen. Der Hilfsatz III.C.1 wird gerade zu diesem Zweck eingeführt. Da er einen Teil der Induktionsannahme ausmacht, kann er, genauer sein zweiter Teil, hier angewandt werden.

Eine zweite fragliche Konfiguration tritt beim Fall (1.b) auf, wenn zwei Schleifen oder Enden in S mittels eines entarteten Knoten $\{\alpha,\alpha',\alpha,\alpha'\}$ der Art (b) (bezüglich des Paares S und T) zusammengebunden werden. Wenn wir die Schleifen oder Enden durch Ketten ersetzen, wie nach der Induktionsannahme möglich ist, dann enden die betreffenden Glieder dieser Ketten entweder mit dem gespannten $\{\alpha,\gamma\}$ oder $\{\alpha',\gamma\}$. Wenn beide Glieder mit demselben angespannten Paar enden, dann können wir sie ohne weiteres mit einem Knoten der Art (a) oder mit einem entarten Knoten der Art (b) bezüglich $\mathfrak{H}'$ zusammenbinden. Wenn eins der Paare α enthält, und das andere α', dann ist $\{\gamma,\alpha,\gamma,\alpha'\}$ der nötige Knote in $\mathfrak{H}'$, und er ist wieder der Art (b) aber nicht entartet. Wir können schließen, daß diese fragliche Konfiguration die Gleichheit der beiden y_R nicht beeinträchtigt.

Somit wird gezeigt, daß insofern es sich um die Konfiguration der Abildung 7 handelt, die Verbindungen, die bezüglich R, S, und T entstehen, dieselben sind, wie die, die bezüglich $\{y_{\mathfrak{P}}\}$ entstehen. Es können jedoch bei dieser Konfiguration Schleifen oder Enden bezüglich R auftreten, für die die Analoga der Hilfsätze III.B.4 und III.B.5 bezüglich $\mathfrak{H}'$ nicht ohne weiteres Folgen von diesen zwei Hilfsätzen allein sind. Diese sind diejenigen, in denen das letzte angespannte Paar gleich $\{\alpha',\beta'\}$ ist, und werden wichtig, wenn das auf der Abildung 7 fehlende Quadrat eingelegt wird. Im Gegensatz zu S und T, für die die gemeinsame Ecke dieser zweien Strecken zu einem einzigen inneren Intervall α gehört, gehört sie in $\mathfrak{H}'$ zu zweien, nämlich α und γ. Wenn wir die zwei in Betracht kommenden Hilfsätze auf S und T anwenden, bekommen wir Ketten, die mit einer Schleife enden, in der entweder $\{\alpha,\beta'\}$ oder $\{\alpha,\alpha'\}$ gespannt sind. Im ersten Fall kann dieses gespannte Paar unmittelbar mit $\{\alpha',\beta'\}$ mittels des Knotens $\{\beta',\alpha,\beta',\alpha'\}$ der Art (b) verbunden werden, so daß nichts verloren geht, und wir uns mit diesem Paar begnügnen können.

Im zweiten Fall sieht man, warum die Aussagen der Analoga der Hilfsätze umständlicher wären. Denn wenn wir zurückgehen durch die hinzugekommenen Quadrate (nicht in der Reihenfolge, in der sie angelegt werden, sondern in der umgekehrten) um die Kette für $\mathfrak{H}'$ aufzubauen, müßten wir vielleicht zunächst eine Reihe von Schleifen und Knoten einführen, die mit dem gespannten Paar $\{\alpha, \alpha'\}$ enden. Aber danach, wenn wir dem Schritt erreichen, bei dem entweder der Punkt $(-1, 0)$ oder der Punkt $(-1, -1)$ erst gedeckt wird, ist $\{\alpha, \alpha'\}$ nicht mehr zugelassen, und wir führen schließlich eine Reihe ein, die mit dem Paar $\{\gamma, \alpha\}$ oder dem Paar $\{\gamma, \alpha'\}$ endet. Es muß folglich bei den verallgemeinerten Hilfsätzen III.B.4 und III.B.5 nicht wie in den ursprünglichen zwei Möglichkeiten vorgesehen werden, sondern drei, die den drei an die gemeinsame Ecke angrenzenden Quadraten entprechen.

Die zweite fragliche Konfiguration ist allerdings diejenige, bei der wir diese neu erhaltene $\mathfrak{H}'$ das Quadrat $\mathfrak{Q}'$ am Punkt $(0, -1)$ hinzufügen, um $\mathfrak{H}'$ zu bekommen, und es ist zweckmäßig sie so zu behandeln, denn in den vorhergehenden Absätzen sind die nötigen Bezeichnungen schon vorhanden. Es seien S' und T' die Aufteilungen des Randes von $\mathfrak{H}'$ und des neu hinzugekommenen Quadrats $\mathfrak{Q}'$. Die Knoten bezüglich S' und T', die für $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{Q}'$ nicht unmittelbar verwendbar sind, sind der Art (a) und verbinden Schleifen, die mit dem Paar $\{\alpha', \beta'\}$ enden. Wenn es sich um das Zusammenbinden einer Kette aus S' und eines Elements aus T' handelt, haben wir oben den Fall, bei dem die Hilfsätze III.B.4 und III.B.5 eine mit dem Paar $\{\alpha, \beta'\}$ endende Kette ergeben, schon behandelt. Beim zweiten Fall müssen wir erst in $\mathfrak{H}'$ die neue Kette bilden, die mit $\{\gamma, \alpha\}$ oder mit $\{\gamma, \alpha'\}$ endet. Wenn sie mit $\{\gamma, \alpha\}$ endet, verwenden wir im neuen Haufen $\mathfrak{H}''$ den Knoten $\{\gamma, \alpha, \beta', \alpha\}$ der Art (c). Wenn sie mit $\{\gamma, \alpha'\}$ endet, verwenden wir den Knoten $\{\alpha', \gamma, \alpha', \beta'\}$.

Wenn es sich dagegen um zwei zusammenzubindende Ketten aus S' handelt, dann können die neuen Glieder beiden mit einem der drei Paare $\{\alpha, \beta'\}$, $\{\alpha, \gamma\}$, oder $\{\alpha', \gamma\}$ enden. Die können dann entweder mittels eines Knotens der Arten (a),(b) oder (c) zusammengebunden werden.

Umgekehrt kann eine Schleife in $\mathfrak{Q}'$, in der $\{\alpha', \beta'\}$ gespannt ist, mit etlichen zulässigen Schleifen in $\mathfrak{H}'$ gebunden sein, und zwar mit Schleifen, die mit den drei gespannten Paaren $\{\alpha, \beta'\}$, $\{\alpha, \gamma\}$, $\{\alpha', \gamma\}$ enden. Jede dieser Schleifen wäre das letzte Glied eines breiten Weges, dem wir ein Ende hinzufügen können, um breite Wege zu bekommen, die α' oder β' in S' mit der Anfangsstrecke des Weges verbinden.

Zum Beispiel, wenn das gespannte Paar $\{\alpha, \beta'\}$ ist, so daß der Weg den Anfangsstrecke mit β' verbindet, können wir ihm das Ende $\{\alpha, \beta', \alpha'\}$ in S' hinzufügen, um einen Weg zu bekommen, der die Anfangsstrecke mit α' und β' verbindet. Bezüglich S' und T' kann dann der Weg, der mit $\{\alpha', \beta'\}$ endet, direkt mittels des trivialen Knotens $\{\alpha', \beta', \alpha', \beta'\}$ der Art (a) an den Weg in T' gebunden werden. Es muß jedoch bewiesen werden, damit dieser Weg zugelassen wird, daß $\bar{y}_{S'}(\alpha', \beta') = 0$. Da die Schleife, mit der wir anfingen, zulässig war, ist diese Gleichheit eine Folge des zweiten Teils des Hilfsatzes III.C.1.

Wenn der Weg in $\mathfrak{H}'$ mit $\{\alpha, \gamma\}$ endet, dann muß er zweimal verlängert werden, einmal nach α' und einmal nach β', und wir brauchen den dritten Teil des Hilfsatzes. Wenn er mit $\{\gamma, \alpha'\}$ endet, dann wird der Weg erst nach α und dann weiter nach β' verlängert.

Wir wenden uns jetzt zum Beweis des Hilfsatzes III.C.1. Da der Hilfsatz leer ist, wenn der Haufe aus einem einzigen Quadrat besteht, betrachten wir einen Haufen $\mathfrak{H}$, für den er gilt, und einen Haufen $\mathfrak{H}'$, der aus H und einem hinzugelegten Quadrat $\mathfrak{Q}$ besteht. Wir wenden den Hilfsatz III.B.7 auf die sich durch die Ränder der $\mathfrak{H}$ definierenden Quadrate ergebende Aufteilung S des Randes von $\mathfrak{H}$ und auf die Aufteilung $T = \mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$ des Randes von $\mathfrak{Q}$, sowie die durch S und T definierte Aufteilung R des Randes von $\mathfrak{H}'$, an. Wegen der vorhergehenden Darlegung können wir die Kette W des Hilfsatzes, die bezüglich $\mathfrak{H}'$ definiert ist, durch eine ähnliche Kette bezüglich S, T und R mit denselben Endpunkten α, β, und β' ersetzen.

Das dazu verwendete Verfahren haben wir ausführlich dargelegt. Die gesamte Kette wird aufgeteilt in kürzeren Ketten, und jede kurze Kette bestimmt eine Schleife bezüglich S oder T. Zum Beispiel, bei der ersten Konfiguration haben wir eine Kette von Schleifen und Knoten, die mit dem Paar $\{\gamma, \alpha'\}$ endet, mit einer Schleife, die mit $\{\alpha, \alpha'\}$ endet, ersetzt.

Bei der zweiten fraglichen Konfiguration haben wir in S' den Teil des breiten Weg, der mit $\{\alpha, \beta'\}$, $\{\alpha, \gamma\}$, oder $\{\alpha', \gamma\}$ endet, verlängert, um eine Kette zu bekommen, die eine Schleife in S' definiert. Diese Schleife sind wegen des Hilfsatzes III.C.1, auf $\mathfrak{H}$ angewandt, alle zulässig. Folglich, wenn wir zum Paar S und T übergehen, liefert der Weg W einen ähnlichen zugelassenen Weg bezüglich S und T. Auf diesen Weg wenden wir wiederum den Hilfsatz III.B.7 an, um die Aussage des Hilfsatzes III.B.1 für $\mathfrak{H}'$ zu erhalten.

Der erste Teil des Hilfsatzes ist klar, denn wenn β und β' zu einem gemeinsamen $\mathfrak{P}$ gehören, ist der Schluß eine unmittelbare Folge des Hilfsatzes III.A.3. Für die anderen Teile liegen alle betreffenden Strecken auf zwei oder drei Quadraten. Wir führen das Aufhaufen aus nur bis zum Punkt, wo der Haufe alle diese Quadrate enthält. Dieser Haufen sei $\mathfrak{H}'$, und der vorhergehende sei $\mathfrak{H}$. Diese Bezeichnung haben wir schon benutzt bei der Besprechung der fraglichen Konfiguration. Dem Weg W folgen wir in $\mathfrak{H}'$ zurück, bis er $\mathfrak{H}'$ verläßt, wo wir ihn abschneiden, notfalls die erste Schleife der neuen Kette mit einem Ende ersetzend, damit diese neue Kette als breiten Weg betrachtet werden kann. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, können wir annehmen, dieser neue Weg sei W selbst.

Die möglichen Konfigurationen der Strecken im zweiten Teil des Hilfsatzes werden in der Abbildung 8 gezeigt.

8a **Abbildung 8** **8b**

Für den zweiten Teil des Hilfsatzes ist die Konfiguration (8.a) nicht fraglich im obigen Sinn. Die Strecken γ und β' gehören zu einem Quadrat $\mathfrak{P}$, und $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}$ werden beim Übergang von $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H}'$ zusammengeklebt längs einer Seite, die γ enthält. Es kann angenommen werden, daß $\mathfrak{Q}$ das neu hinzukommende Quadrat ist. Die Aussage III.C.1 ist eine direkte Folge des Hilfsatzes III.B.7.

Bei der Konfiguration (8.b) ist $\mathfrak{Q}$ entweder das β enthaltende Quadrat oder das β' enthaltende Quadrat. Wenn es β enthält, wenden wir den Hilfsatz III.C.1 auf $\mathfrak{H}$ an, um zu folgern, daß $\bar{y}_S(\alpha, \beta) = 0$ ist. Wir schließen dann aus dem Hilfsatz III.B.7, daß $y_R(\beta, \beta') = 0$ ist. Wenn $\mathfrak{Q}$ die Strecke β' enthält, können wir den Hilfsatz III.B.7 direkt anwenden.

Beim dritten Fall dagegen, bilden die drei betreffenden Quadrate die erste fraglichen Konfiguration, und wir verwenden die in der Beschreibung dieser Konfiguration benutzten Bezeichnungen statt der des Hilsatzes selbst. Wenn das letzte angespannte Paar in W das Paar $\{\gamma, \alpha'\}$ ist, können wir den Hilfsatz für $\mathfrak{H}$ anwenden, um zu schließen, daß $\bar{y}_S(\alpha, \alpha') = 0$ ist. Dann wenden wir den Hilfsatz III.B.7 auf das Paar S und T an, um zu schließen, daß $\bar{y}_R(\alpha', \beta') = 0$ ist. Wenn sie mit $\{\gamma, \alpha\}$ endet, dann wenden wir den Hilfsatz für $\mathfrak{H}$ an, um nochmals zu zeigen, daß $\bar{y}_S(\alpha, \alpha') = 0$. Aus dieser Gleichung folgt wieder, daß $\bar{y}_R(\alpha', \beta') = 0$ ist. Wenn dagegen das letzte angespannte Paar $\{\alpha, \beta'\}$ ist, können wir den Hilfsatz III.B.7 direkt anwenden.

Nun haben wir den schwierigsten Teil des Beweises, wo das Argument ziemlich dicht geworden ist, hinter uns, und haben den Punkt erlangt, wo wir nur die Sätze III.B.2 und III.B.3 zeigen müssen. Diese zwei Sätze beziehen sich allein auf Menge von Verbindungen auf Kreisrändern oder geschlossenen Kurven, und von Haufen wird nicht mehr die Rede sein.

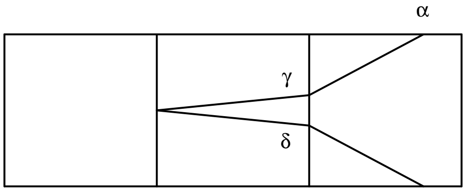

Abbildung 9

Man sieht von der Abbildung 9 warum die zusätzliche Bedingung (3.b.4) und die Mengen I_S und I_T wesentlich sind. Wenn man die Funktion y für das Aufhäufen von drei Quadraten mittels Induktion bildet, indem mazuerst $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ zusammenklebt, wie auf der Abbildung 6, und dann das Ergebnis mit $\mathfrak{Q}_3$ zusammenklebt. Die Verbindung von α mit β wird nur erhalten, wenn man gleich beim ersten Schritt γ und δ verbindet. Weil γ und δ beim letzten Schritt innere Strecken sind, müssen sie schon beim ersten als Mitglieder von $I_{\mathfrak{Q}_2}$ ausgezeichnet werden.

IV. Dualität.

IV.A. Beweis des Hilfsatzes III.B.1. Um den ersten Teil des Satzes III.B.1 zu beweisen, müssen wir nur die Bedingung (3.b.3) nachprüfen. Wir setzen $y = y_S$ und $y^* = y_S^*$. Es seien $y^*(\alpha, \beta)$ und $y^*(\alpha', \beta')$ beide gleich 1, und die Reihe $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ sei zyklisch. Diese vier Punkte in der gegebenen Reihenfolge teilen die Menge S in vier Intervallen $[\alpha, \alpha']$, $[\alpha', \beta]$, $[\beta, \beta']$, und $[\beta', \alpha]$ auf. Wenn $y(\gamma, \delta) = 1$, liegen γ und δ in ein und demselben dieser Intervalle. Hieraus folgt sofort, daß $\hat{y}(\alpha, \alpha') = 1$.

Der zweite Teil der Aussage ist kaum schwieriger. Es ist estens klar, daß die Gleichung $y(\gamma, \delta) = 1$ die Gleichung $y^{**}(\gamma, \delta) = 1$ zur Folge hat. Es sei $y(\gamma, \delta) = 0$. Wir folgern aus dieser Gleichung, daß $y^{**}(\gamma, \delta) = 0$.

Es seien A und B die zwei Intervalle (γ, δ). Dann definiert die Reihe (γ, A, δ, B) eine Orientierung in S. Bezüglich dieser Orientierung sei α die letzte Strecke aus A und β die erste aus B, die an γ durch y verbunden sind. Es kann sein, daß α oder β gleich γ ist. Wir definieren $\alpha' \in A$ und $\beta' \in B$ in derselben Weise, aber bezüglich δ statt γ. Da $y(\gamma, \delta) = 0$ kommt α nicht nach α', und β' nicht nach α'. Wenn $\alpha'' \in [\alpha, \alpha'] \subset A$ und $\beta'' \in [\beta, \beta'] \subset B$ liegen, gilt $y^*(\alpha'', \beta'') = 1$. Folglich ist $y^{**}(\gamma, \delta) = 0$.

V. Beweise.

V.A. Erste Abänderungen. Wir haben die Aussagen der Sätze in einer Reihenfolge angegeben, die die für unsere Modellen grundlegenden Ergebnisse hervorhebt, indem diese Ergebnisse an die erste Stelle gesetzt, und die anderen erst nachher erklärt werden. Da diese zusätzlichen Sätze, die sich auf das Zusammenkleben von

Mengen von Verbindungen beziehen, eigentlich nur Hilfsätze sind, wären sie als erste zu beweisen. Wir haben es jedoch vorgezogen, ihre Folgen erstens für unsere Modelle abzuleiten, und kommen jetzt zu den Beweisen der Sätze selbst. Um während dieser Beweise nicht ständig vorgreifen zu müssen, schicken wir ihnen einige noch elementarere Lemmas voraus.

Die Richtschnur unseres Vorgehens ist, alle Aussagen mittels zweckmäßigen Induktionsverfahren ständig auf die einfachsten Fälle zurückzuführen. Der Übergang von den endlichen Modellen zu Haufen hat uns die nötige Geschmeidigkeit gewährt, und der Begriff einer Menge von Verbindungen hat uns erlaubt, einen Haufen zu vergrößern, indem wir ihm schrittweise einzige Quadrate hinzufügen. Wir brauchen darüber hinaus ein Mittel, das uns erlaubt, die Anzahl der Elemente in den zu betrachtenden Mengen von Verbindungen zu vermindern, indem wir einige Strecken zweckmäßig zusammenkleben oder aufheben, und gleichzeitig die Verbindungen neu definieren. Es wird jedesmal zu beweisen sein, wenn die Sätze III.B.2 und III.B.3 nach der Abänderung gültig sind, dann gelten sie auch für die ursprünglichen Mengen. Wir werden bei den Beweisen der drei Hilfsätze III.B.4, III.B.5 und III.B.7 ähnlicherweise verfahren.

Wie bei den Sätzen handelt es sich zunächst um zwei Gegenstände, die Mengen von Verbindungen y_S, y_T, ihre duale Gegenstände $\hat{y}_S$ und $\hat{y}_T$ sowie I_S, I_T und zwei Mengen von Kurzverbindungen. Diese zusätzlichen Verbindungen definieren die Mengen $\bar{y}_S$ und $\bar{y}_T$.

Wir geben zunächst eine Reihe von zulässigen Abänderungen an. Die oft umständlichen Beweise der Zulässigkeit werden, wenn nicht ausführlich, doch mit vielen Einzelheiten durchgeführt, damit wenigstens der Verfasser sich selbst von ihrer Stichhaltigkeit überzeugt. Es ist nämlich bei den Argumenten leicht, diese oder jene Möglichkeit zu übersehen, und die Gefahr deshalb groß, daß ihnen ein Fehler unterläuft.

Es sind nichtsdestoweniger allgemeine und sehr ähnliche Verfahren, die wir verwenden bei diesen Abänderungen. Bei den ersten Abänderungen, die in diesem Abschnitt beschrieben werden, werden weder die Streckenmenge R noch die zusammengeklebten Mengen von Verbindungen $\bar{y}_R$ und $\hat{y}_R$ verändert. Die Mengen S und T und die Mengen von Verbindungen $\bar{y}_S$ und $\bar{y}_T$ werden jedoch abgeändert. Die abgeänderten Mengen S' und T' werden erhalten, indem wir Strecken aus $Q = S \cap T$ entweder aufheben oder zusammenkleben. Die abgeänderten Mengen $\bar{y}_{S'}$ und $\bar{y}_{T'}$ werden verschieden definiert. Nachdem sie definiert worden sind, ergeben sich $y_{S'}$ und $y_{T'}$, indem wir alle Verbindungen zwischen benachbarten Strecken in $\bar{y}_{S'}$ und $\bar{y}_{T'}$ ausstreichen. Die Mengen $I_{S'}$ und $I_{T'}$ werden jeweils als $I_S \cap S'$ und $I_T \cap T'$ definiert. Die dualen Mengen zu $y_{S'}$ und $y_{T'}$ seien $\hat{y}_{S'}$ und $\hat{y}_{T'}$.

Es seien $\bar{y}'_R$ und $\bar{y}'_R$ die Zusammenklebungen der abgeänderten Mengen. Es wird in jedem Fall klar sein, daß $\bar{y}'_R = \bar{y}_R$. Dagegen wird die Gleichheit

$$\hat{y}'_R = \hat{y}_R \tag{5.a.1}$$

gewöhnlicherweise nicht ohne weiteres klar. Der Beweis wird jedoch jedesmal elementar sein, da es sich um eine anschauliche geometrische Aussage handelt. Alle Beweise sind ähnlich, und, damit wir uns nicht ständig wiederholen, beginnen wir mit einem Umriss des allgemeinen Beweisverfahrens.

Die Gleichheit (5.a.1) wird bewiesen, indem man zeigt, daß $\hat{y}'_R \subset \hat{y}_R$ und $\hat{y}_R \subset \hat{y}_R$. Es sei zunächst

$$W': \quad \alpha = \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha'_0, \ldots, \alpha_{2r+1}, \alpha'_{2r+1}, \alpha_{2r+2} = \beta$$

ein breiter von den Mengen $\hat{y}_{S'}$, $\hat{y}_{T'}$, $\bar{y}_{S'}$, $\bar{y}_{T'}$ zugelassener Weg, der von α nach β führt. Wie vorher drücken wir uns oft kürzer aus und nennen einen breiten Weg dieser Art von $y_{S'}$ und $y_{T'}$ zugelassen.

Um zu beweisen, daß die Menge $\hat{y}'_R$ in $\hat{y}_R$ enthalten ist, ändern wir W' schrittweise, um einen breiten Weg zu bekommen, der von y_S und y_T zugelassen wird, und der von α nach β führt. Es geht darum, die von $\hat{y}_S$ nicht zugelassenen Schleifen oder Enden aufzuheben und sie durch anderen zugelassenen Schleifen und Enden zu ersetzen, um einen breiten, von den Mengen y_S und y_T zugelassener Weg, zu bekommen.

Ein Ende $\{\alpha_i, \alpha_j, \alpha'_j\}$, $i = j \pm 1$ oder eine Schleife $\{\alpha_i, \alpha'_i, \alpha_j, \alpha'_j\}$ heißt *problematisch* wenn es nicht gleichzeitig zu $\hat{y}_S$ und $\hat{y}_{S'}$ oder zu $\hat{y}_T$ und $\hat{y}_{T'}$ gehört. Die genaue Beschreibung dieses Begriffs ist in jedem Fall verschieden. Wir betrachten innerhalb W' Ketten von problematischen Schleifen,

$$K = \alpha_k, \alpha'_k, \ldots, \alpha_l, \alpha'_l,$$

wobei Ketten, die mit einem Ende beginnen oder enden, auch betrachtet werden. Die ganze Zahl k ist ungerade und l gerade. Diese Ketten werden durch Ketten von Schleifen und Enden ersetzt, die bezüglich y_S und y_T zulässig sind. Die Schleifen und Enden außerhalb dieser Ketten werden nicht problematisch sein und werden folglich bezüglich y_S und y_T zulässig. Der auf diese Weise zusammengelegte breite Weg W wird α und β verbinden. Somit wird bewiesen, daß $\hat{y}'_R \subset \hat{y}_R$.

Ein umgekehrtes Verfahren wird uns erlauben, breite von y_S und y_T zugelassene Wege durch von $y_{S'}$ und $y_{T'}$ zugelassene Wege zu ersetzen, und somit die Gleichheit (5.a.1) bei jeder Art Abänderung zu folgern. Nachdem wir die Abänderungen eingeführt und bewiesen haben, daß sie die Gültigkeit des Satzes III.B.3 nicht beeinflussen, werden wir nachprüfen, daß sämtliche Abänderungen die wichtige Bedingung (3.b.4) nicht beeinträchtigen. Aus einem strengen logischen Gesichtspunkt, müßte es vorher bewiesen werden, daß diese Bedingung auch für $\bar{y}_R$ gilt, da diese Tatsache während der Beweise angenommen ist. In dieser Hinsicht sind wir nachlässig gewesen. Da die Bedingung (3.b.1) trivial ist, ist die Gültigkeit des Satzes III.B.2 auch nicht von den Abänderungen beeinträchtigt.

Abänderung A.1. Die erste Abänderung ist einfach. Wenn γ eine innere Strecke, die mit keiner anderer Strecke verbunden ist, dann können wir γ aufheben, um neue Streckenmengen $S' = S \setminus \{\gamma\}$ und $T' = T \setminus \{\gamma\}$ sowie neue Mengen von Verbindungen $\bar{y}_{S'}$ und $\bar{y}_{T'}$ zu erhalten, ohne daß die Zusammenklebungen $\bar{y}_R$ und $\hat{y}_R$ sich verändern. Bei dieser Abänderung wird allerdings vorausgesetzt, daß γ nicht die einzige innere Strecke ist. Es ist ohne weiteres klar, daß $\bar{y}'_R$, die sich daraus ergebende Zusammenklebung der neuen Mengen $\bar{y}_{S'}$ und $\bar{y}_{T'}$, gleich $\bar{y}_R$ ist.

Für die Zusammenklebung der Mengen $\hat{y}_{S'}$ und $\hat{y}_{T'}$ sind dagegen einige Bemerkungen nötig. Die Funktion $\hat{y}_S$ verbindet einige Strecken aus S mit γ. Diese Verbindungen sind natürlich keine Verbindungen in $\hat{y}_{S'}$. Sonst besteht $\hat{y}_{S'}$ aus den Verbindungen in $\hat{y}_S$. Die Menge $\hat{y}_{T'}$ wird in derselben Weise aus $\hat{y}_T$ erhalten. Einige Schleifen und Enden werden *problematisch* genannt. Eine von y_S oder y_T zugelassene Schleife oder Ende heißt problematisch, wenn es γ enthält. Eine von $y_{S'}$ oder $y_{T'}$ *heißt dagegen problematisch*, wenn es einen Nachbarn von γ enthält. Es seien γ' und γ'' die zwei Nachbarn von γ in S und δ' und δ'' seine Nachbarn in T. Gewöhnlicherweise ist γ' gleich δ' und γ'' gleich δ''. Nur wenn γ' und δ' äußere Strecken sind, sind sie verschieden.

Es sei $\{\alpha, \alpha', \gamma, \gamma'\}$ eine von $\bar{y}_S$ zugelassene problematische Schleife. Es sei vorausgesetzt, daß weder α noch α' gleich γ ist. Dann sind γ' und γ'' nicht durch $\bar{y}_S$ verbunden, und deshalb auch nicht durch $\bar{y}_{S'}$. Eine Verbindung in $\bar{y}_S$, die α oder α' von γ'' trennt, würde es auch von γ trennen. Folglich ist $\{\alpha, \alpha', \gamma'', \gamma'\}$ von $\bar{y}_{S'}$ zugelassen. Die Schleifen, für die α oder α' gleich γ ist, brauchen nicht ersetzt zu werden. Wenn zum Beispiel $\alpha = \gamma$, dann ist α' entweder γ' oder γ''. Wenn $\alpha' = \gamma'$ ist die neue Schleife $\{\gamma'', \alpha', \gamma'', \gamma'\}$ gewiß zugelassen. Sie kann jedoch einfach ausgelassen werden, wie übrigens die alte Schleife auch. Wenn $\alpha' = \gamma''$ ist, verbindet diese Schleife zwei Schleifen, die durch zwei in S' oder T' liegende und entweder unmittelbar oder mittels eines Knotens der Art (b) aneinander anschließende Schleifen ersetzt werden, so daß die durch diese Schleife zustande kommende Verbindung unnütz ist

Wenn umgekehrt $\{\alpha, \alpha', \gamma'', \gamma'\}$ von $\bar{y}_{S'}$ zugelassen wird, so daß $\bar{y}_{S'}(\gamma', \gamma'') = 0$, und wenn $\{\alpha, \alpha'\} \neq \{\gamma'', \gamma'\}$ ist, dann werden $\{\alpha, \alpha', \gamma, \gamma'\}$ und $\{\alpha, \alpha', \gamma'', \gamma\}$ von y_S zugelassen. Man verfährt ähnlicherweise mit den Enden. Dabei müssen auch Enden $\{\gamma', \gamma, \gamma'\}$, falls sie vorkommen, nicht übersehen werden.

Wir legen y_S-zulässige und y'_S-zulässige oder $y_{S'}$-zulässige und y'_T-zulässige Enden und Schleifen zusammen, um $\hat{y}_R$ und $\hat{y}'_R$ zu erhalten. Um zu zeigen, daß $\hat{y}'_R = \hat{y}_R$ ist, ersetzen wir systematisch in von y_S zugelassenen breiten Wegen alle Schleifen und Enden, die ein gespanntes Paar $\{\gamma, \gamma'\}$ oder $\{\gamma, \gamma''\}$ enthalten, durch Schleifen oder Enden, die $\{\gamma', \gamma''\}$ enthalten oder, wenn es erlaubt ist, lassen wir sie aus. Wenn die Schleifen durch y_T zugelassen sind, wenn sie also Strecken nur aus der Menge T enthalten, wird das Paar $\{\gamma, \gamma'\}$ durch $\{\delta', \delta''\}$ ersetzt. Umgekehrt ersetzen wir Schleifen oder Enden, die $\{\gamma', \gamma''\}$ oder $\{\delta', \delta''\}$ enthalten, mit Schleifen und Enden die γ enthalten. Wir bemerken, daß bei diesem Verfahren die Knoten leicht abgeändert werden müssen. Wenn zum Beispiel γ' und δ' äußere sind, dann ist ein Knoten der Art (a), der $\{\gamma, \gamma''\}$ mit sich selbst verbindet, durch einen Knoten der Art (b), der $\{\gamma', \gamma''\}$ mit $\{\delta', \delta''\}$ verbindet, zuersetzten. Da γ nicht die einzige innere Strecke ist, ist in diesem Fall notwendigerweise $\gamma'' = \delta''$

Abänderung A.2. Eine zweite Abänderung ähnlicher Art kann definiert werden, wenn γ eine innere Strecke ist, die mittels $\bar{y}_T$ mit keiner Strecke außer sich selbst verbunden ist. Im Gegensatz zu der ersten Abänderung, kann γ jedoch mittels $\bar{y}_S$ mit anderen Strecken in S verbunden werden. Die erste Abänderung ist folglich ein spezieller Fall der zweiten. Die zweite ist nicht schwieriger, und ihre ausschlaggebende Rolle beim Beweis kann leicht verkannt werden. Die Strecke γ wird nochmals ausgehoben, um S' und T' zu bekommen, und $\bar{y}_{T'}$ genau wie vorher definiert. Die Menge von Verbindungen $\bar{y}_{S'}$ erhält man, wenn man alle Verbindungen mit γ aufhebt, und neue Verbindung einführt, indem man $\bar{y}_{S'}(\alpha,\beta)=1$ setzt, wenn α und β in S liegen, und $\bar{y}_S(\alpha,\gamma)=1$ und $\bar{y}_S(\beta,\gamma)=1$ ist. Im Gegensatz zur Abänderung A.1 ist es möglich, nicht nur daß einige Verbindungen in $\hat{y}_S$ abhandenkommen, sondern daß auch neue Verbindungen entstehen, weil die Verbindungen durch $\bar{y}_S$ von γ mit anderen Strecken ausgestrichen werden.

Die eigentliche Gefahr ist, daß neue Verbindungen entstehen, denn eine Verbindung zwischen α und β, die vorher durch $\hat{y}_S$ nicht verbunden waren können durch $\hat{y}_{S'}$ verbunden sein, wenn jede $\bar{y}_S$-Verbindung, die sie trennt, γ mit einer zweiten Strecke verbindet, und wenn keine neu entstandene $\bar{y}_{S'}$-Verbindung, die die Strecken α und β voneinander trennt, existiert.

Es seien α und β durch $\hat{y}_{S'}$ verbunden, nicht aber durch $\hat{y}_S$. Es seien I_1 und I_2 die zwei offene Intervalle (α,β) in S. Die Strecke γ gehöre I_1. Dann existiert ein $\delta\in I_2$, das mit γ durch $\bar{y}_S$ verbunden ist. Es kann dagegen keine Strecke $\gamma_1\in I_1$ außer γ geben, die mit einer Strecke aus I_2 verbunden ist. Die Folge ist, daß es einen zulässigen breiten Weg gibt, der von α nach β führt. Der Klarheit halber schreiben wir diesen Weg vollständig auf. Es sei γ' der Nachbar von γ zur Seite α und γ'' der Nachbar zur Seite β.

$$\begin{aligned}
C_{-1} &= \{\alpha,\gamma',\gamma\},\\
C_0 &= \{\gamma,\gamma',\gamma,\gamma'\},\\
C_1 &= \{\gamma,\gamma',\gamma,\gamma''\},\\
C_2 &= \{\gamma,\gamma'',\gamma,\gamma''\},\\
C_3 &= \{\gamma,\gamma'',\beta\}.
\end{aligned}$$

C_1 ist eine Schleife in T. Wenn wir statt einer einfachen Verbindung ein zulässiges Ende $\{\alpha,\beta,\beta'\}$ hätten, könnten wir eine ähnliche Reihe bilden, die aber, statt mit einem zulässigen Ende zu enden, mit einer zulässigen Schleife,

$$C_3=\{\gamma,\gamma'',\beta,\beta'\},$$

enden würde. Schleifen werden ähnlich behandelt.

Wie bei der ersten Abänderung ist es sofort klar, daß $\bar{y}_{S'}$ und $\bar{y}_{T'}$ eine Zusammenklebung $\bar{y}'_R$ ergeben, die gleich $\bar{y}_R$ ist. Der Beweis, daß $\hat{y}_{R'}=\hat{y}_R$ ist, ist auch dem Beweis derselben Gleichung für die erste Abänderung ähnlich. Wie wir schon bemerkt haben, ist einige Vorsicht jedoch angebracht, da bei den breiten Wegen, die in der Konstruktion von $\hat{y}_{R'}$ vorkommen, noch mehr problematisch sein können.

Es sei $\{\alpha, \alpha', \gamma, \gamma'\}$ eine von y_S zugelassene problematische Schleife. Auch in diesem Fall sind γ' und γ'' nicht durch $\bar{y}_S$ verbunden. Eine Verbindung in $\bar{y}_S$ könnte α oder α' von γ'' trennen, aber nur dann wenn es eine Verbindung der Strecke γ mit einer zweiten Strecke ist. Diese sind jedoch gerade die Verbindungen die aufgehoben werden, um $\bar{y}_{S'}$ zu bilden. Da α und α' nicht durch $\bar{y}_S$ von γ' getrennt sind, kann eine neu entstandene Verbindung sie auch nicht von γ'' trennen. Folglich wird $\{\alpha, \alpha', \gamma'', \gamma'\}$ von $y_{S'}$ zugelassen.

Die von $y_{S'}$ zugelassene Schleifen und Enden können aus zwei Gründen problematisch sein. Diejenigen, die problematisch sind, weil sie Verbindungen zwischen Strecken aus S' enthalten, die in $\hat{y}_{S'}$ liegen und nicht in $\hat{y}_S$, sind schon behandelt worden. Die anderen werden wie bei der Abänderung A.1 behandelt. Bei der Abänderung A.2 ist es möglich, daß $\{\alpha, \alpha', \gamma'', \gamma'\}$ von $\bar{y}_{S'}$ zugelassen ist, ohne daß $\{\alpha, \alpha', \gamma, \gamma'\}$ und $\{\alpha, \alpha', \gamma'', \gamma\}$ beide von $\bar{y}_S$ zugelassen werden. Eine dieser Schleifen ist aber notwendigerweise zugelassen, und eine reicht.

Abänderung A.3. Die dritte Art Abänderung wird vorgenommen, wenn ein benachbartes Paar $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ in Q durch $\bar{y}_S$ verbunden ist. In diesem Fall werden S' und T' erhalten, indem wir γ_1 und γ_2 zu einer einzigen Strecke γ zusammenkleben. Die abgeänderten Mengen $\bar{y}_{S'}$ und $\bar{y}_{T'}$ werden definiert, so daß

$$\bar{y}_{S'}(\alpha, \beta) = \bar{y}_S(\alpha, \beta), \qquad \bar{y}_{T'}(\alpha, \beta) = \bar{y}_T(\alpha, \beta),$$

wenn weder α noch β in $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ liegt. Man setzt $\bar{y}_{S'}(\alpha, \gamma) = 1$, wenn entweder $\bar{y}_S(\alpha, \gamma_1)$ oder $\bar{y}_S(\alpha, \gamma_1)$ gleich 1 ist, und sonst gleich 0. Der Wert von $\bar{y}_{T'}(\alpha, \gamma)$ wird ähnlicherweise definiert. Bei dieser Abänderung ist es auch klar, daß $\bar{y}'_R = \bar{y}_R$.

Wenn weder $\alpha \in S$ noch $\beta \in S$ in $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ liegt, ist $\hat{y}_{S'}(\alpha, \beta) = \hat{y}_S(\alpha, \beta)$. Ferner gilt die Gleichung $\hat{y}_{S'}(\alpha, \gamma) = 1$, dann und nur dann, wenn $\hat{y}_S(\alpha, \gamma_1) = 1$ oder $\hat{y}_S(\alpha, \gamma_2) = 1$ ist. Die neue Menge $\hat{y}_{T'}$ wird genau so aus $\hat{y}_T$ abgeleitet. Da $\bar{y}_S(\gamma_1, \gamma_2) = 1$ werden die Schleifen und Enden, in denen γ_1 und γ_2 gespannt sind, nicht von y_S zugelassen. Ein gespanntes Paar $\{\delta, \gamma_1\}$ oder $\{\delta, \gamma_2\}$ in einer von y_S zugelassenen Schleife oder in einem zugelassenen Ende wird durch $\{\delta, \gamma\}$ ersetzt, und die damit zustande kommenden Schleifen und Enden werden von $y_{S'}$ zugelassen. Umgekehrt wird ein gespanntes Paar $\{\delta, \gamma\}$ in einer von y_S zugelassenen Schleife oder in einem von y_S zugelassenen Ende durch ein Paar $\{\delta, \gamma_i\}$ ersetzt. Der Index ist entweder 1 oder 2 und so gewählt, daß δ und γ_i benachbart sind. Es ist ausdrücklich zu bemerken, daß die dabei entstehenden Schleifen oder Enden zulässig sind, denn eine Strecke, die durch $\hat{y}_{S'}$ mit δ und γ verbunden ist, ist notwendigerweise durch $\hat{y}_S$ mit derjenigen der Strecken γ_1 und γ_2, die zu δ benachbart ist, verbunden, wenn $\bar{y}_{S'}(\delta, \gamma) = 0$ ist. Die von $y_{T'}$ zugelassenen Schleifen und Enden, sowie die von y_T zugelassenen Schleifen und Enden, in denen γ_1 und γ_2 nicht gespannt sind, werden ähnlicherweise behandelt

Schleifen und Enden, die von y_T zugelassenen sind, und in denen γ_1 und γ_2 gespannt sind, können jedoch in einem breiten Weg vorkommen. Diese sind auf den ersten Blick besonders problematische Schleifen und Enden, weil man denken könnte, wegen der Abänderung würde der Weg hier unterbrochen. Es sei zum Beispiel $E = \{\alpha, \gamma_1, \gamma_2\}$ ein zugelassenes Ende. Eine darauf folgende Schleife im breiten Weg kann keine Schleife von

Verbindungen in $\hat{y}_S$ sein. Folglich ist sie eine Schleife, deren Strecken in T liegen. Die Strecken eines darauf folgenden Ende müßten auch in T liegen. Es sei zum Beispiel $D = \{\gamma_1, \gamma_2, \beta, \beta'\}$ eine von y_T zugelassene Schleife. Die Zulässigkeit von D und E hat zur Folge, daß auch $\{\alpha, \beta, \beta'\}$ ein zulässiges Ende ist, weil zum Beispiel eine Verbindung, die β von α trennte, würde notwendigerweise eine der Strecken α und β von γ_1 oder γ_2 trennen. Die Kette

$$\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_1, \gamma_2, \beta, \beta'$$

kann daher durch das Ende $\{\alpha, \beta, \beta'\}$ ersetzt werden. Man verfährt auch so wenn E eine Schleife ist oder D ein Ende.

Es bleibt jedoch zu beweisen, daß alle diese Abänderungen zulässig in dem Sinn sind, daß sie die Bedingung (3.b.4) nicht beeinträchtigen. Bei der Abänderung A.1 ist das ohne weiteres klar. Bei der Abänderung A.2 ist nur der Übergang von $\bar{y}_S$ zu $\bar{y}_{S'}$ fraglich. Es sei $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ ein Zyklus in S' und zwar der Art, daß $\bar{y}_{S'}(\alpha_1, \gamma_1) = 1$ ist, nur weil α_1 und γ_1 beide durch $\bar{y}_S$ mit γ verbunden sind. Wenn aus demselben Grund $\bar{y}_{S'}(\beta_1, \delta_1) = 1$ ist, ist die Gleichung $\bar{y}_{S'}(\alpha_1, \beta_1) = 1$ für ein nicht benachbartes Paar $\{\alpha_1, \beta_1\}$ sofort klar. Sonst bestehen zwei Möglichkeiten, entweder $(\alpha_1, \beta_1, \gamma, \delta_1)$ ist ein Zyklus oder $(\gamma_1, \beta_1, \gamma, \delta_1)$ ist ein Zyklus. Wenn die erste Möglichkeit gilt, ist die Gleichung $\bar{y}_{S'}(\alpha_1, \beta_1) = 1$ für nicht benachbarte α und β eine Folge der Bedingung (3.b.3) für y_S. Allgemeiner gilt in beiden Fällen wegen (3.b.4) die Gleichheit $y_S(\beta_1, \gamma) = 1$. Folglich ist $y_{S'}(\alpha_1, \beta_1) = 1$.

Daß die Mengen $\bar{y}_{S'}$ und $\bar{y}_{T'}$, die man von der dritten Art Abänderung bekommt, auch die Bedingung (3.b.4) nicht verletzen, ist ziemlich klar.

V.B. Weitere Abänderungen. Die Abänderungen, die wir im vorigen Abschnitt beschrieben haben, hatten keinen Einfluß weder auf die Menge $\bar{y}_R$ noch auf die Menge $\hat{y}_R$. Die Abänderungen, die wir in diesem Abschnitt beschreiben, werden auch bei dem Induktionsverfahren verwendet. Im Gegensatz jedoch zu den vorigen, sind die neuen Menge R' nicht gleich R, und die neuen Mengen $\bar{y}_{R'}$ und $\hat{y}_{R'}$ verschieden von den alten, $\bar{y}_R$ und $\hat{y}_R$, so daß es bewiesen werden muß, wenn $\bar{y}_{R'}$ und $\hat{y}_{R'}$ dual sind, dann sind auch $\bar{y}_R$ und $\hat{y}_R$ dual. Bei diesen Abänderungen werden nur äußere Strecken aufgehoben oder zusammengeklebt, so daß die sich daraus ergebenden Folgen für Schleifen und Enden leichter überschaubar sind. Es kann auch in allen Fällen leicht nachgeprüft werden, daß die Mengen $\bar{y}_{S'}$ und $\bar{y}_{T'}$ die Bedingung (3.b.4) erfüllen.

Abänderung B.1. Es seien γ' und γ'' zwei verschiedene äußere Strecken in S, die mit einander durch $\bar{y}_S$ verbunden sind. Das Interval $[\gamma', \gamma'']$ sei so definiert, daß es keine innere Strecke enthält. Wir setzen erstens voraus, daß keine Strecke aus

$$(\gamma', \gamma'') \subset [\gamma', \gamma'']$$

mit einer Strecke aus dem Komplement von $[\gamma', \gamma'']$ verbunden ist. Unter dieser Annahme heben wir die Vereinigung der Strecken im Intervall (γ', γ'') auf, um eine neue Streckenmenge S' zu bekommen. Wir setzen

$$(5.b.1) \qquad \bar{y}_{S'}(\alpha,\beta) = \bar{y}_S(\alpha,\beta),$$

wenn $\alpha \in S'$ und $\beta \in S'$ sind.

Hieraus folgt sofort, daß unter derselben Annahme

$$(5.b.2.) \qquad \hat{y}_{S'}(\alpha,\beta) = \hat{y}_S(\alpha,\beta).$$

Weder die Menge T noch die Menge $\bar{y}_T$ wird geändert.

Die Menge R' wird auch erhalten, in dem man alle Strecken in (γ',γ'') aufhebt. Sie ist also $S' \bigtriangleup T$. Es gilt offensichtlich die Gleichung $\bar{y}_{R'}(\alpha,\beta) = \bar{y}_R(\alpha,\beta)$, wenn beide Seiten definiert sind. Wenn α dem Intervall (γ',γ'') gehört und β dem Intervall $[\gamma',\gamma'']$, dann ist $\bar{y}_R(\alpha,\beta) = \bar{y}_S(\alpha,\beta)$ und $\hat{y}_R(\alpha,\beta) = \hat{y}_S(\alpha,\beta)$. Wenn β außerhalb dieses Intervalls liegt, ist $\bar{y}_R(\alpha,\beta) = 0$ und $\hat{y}_R(\alpha,\beta) = 0$.

Es sei vorausgesetzt, daß $\hat{y}_{R'}$ die zu $y_{R'}$ duale Menge ist. Wir wollen daraus schließen, daß $\hat{y}_R$ zu y_R dual ist, also daß $\hat{y}_R(\alpha,\beta) = 0$, dann und nur dann wenn es eine y_R-Verbindung gibt, die α von β trennt. Wenn α in (γ',γ'') liegt, ist das klar, denn $\hat{y}_S$ ist zur Menge y_S dual. Insbesondere, wenn β außerhalb $[\gamma',\gamma'']$ liegt, ist

$$\hat{y}_R(\alpha,\beta) = \hat{y}_S(\alpha,\beta) = 0,$$

und die Verbindung von γ' mit γ'' gehört zu $\bar{y}_R$ und zu $\bar{y}_S$. Es sei schließlich weder α noch β im Intervall (γ',γ''). Der erwünschte Schluß ergibt sich dann aus der Annahme, daß $\hat{y}_{R'}$ zu $y_{R'}$ dual ist.

Es ist nützlich, die Abänderung B.1 unter allgemeineren Umständen einzuführen. Es sei γ eine gegebene innere Strecke. Wir lassen y_S-Verbindungen zwischen γ und Elementen aus (γ',γ'') zu. Der einzige Unterschied zum vorhergehenden Argument ist dann, daß $\hat{y}_S(\alpha,\beta)$ für α und β in (γ',γ'') gleich 0 sein kann, weil ein drittes Element zwischen ihnen mit γ verbunden ist. Da dieses Element in R mit γ' und γ'' verbunden ist, können wir wie vorher schließen.

Abänderung B.2. Es sei γ eine Strecke aus Q, daß äußeren Strecken sowohl aus S wie aus T benachbart ist. Es liegt also γ am Rand der Menge Q. Wir nehmen an, daß γ durch $\bar{y}_S$ mit äußeren Strecken aus S und durch $\bar{y}_T$ mit äußeren Strecken aus T verbunden ist. Sei ϵ diejenige Strecke aus S, die mit γ verbunden ist, und deren Abstand von γ in R so klein wie möglich ist, und η die entsprechende Strecke aus T. Im Ausnahmefall, daß Q eine einzige Strecke enthält, müssen wir auch das Ende von γ bestimmen, von dem wir Abstände messen.

Wir wollen S und T abändern, indem wir die Strecken in (ϵ,γ) aus S und die Strecken in (η,γ) aus T aufheben, um Mengen S' und T' zu bekommen. Die Menge R wird dementsprechend geändert. Die Mengen von Verbindungen $\bar{y}_{S'}$ und $\bar{y}_{T'}$ werden durch die Gleichungen

$$\bar{y}_{S'}(\alpha,\beta) = \bar{y}_S(\alpha,\beta),$$

$$\bar{y}_{T'}(\alpha,\beta) = \bar{y}_T(\alpha,\beta),$$

definiert, wenn die linke Seite überhaupt definiert sein sollte. Es gelten dann auch die Gleichungen,

$$\hat{y}_{S'}(\alpha,\beta) = \hat{y}_S(\alpha,\beta),$$
$$\hat{y}_{T'}(\alpha,\beta) = \hat{y}_T(\alpha,\beta),$$

unter derselben Bedingung.

Es ist klar, daß

$$\bar{y}_{R'}(\alpha,\beta) = \bar{y}_R(\alpha,\beta),$$

wenn α und β in R' liegen. Wir nehmen an, daß $\hat{y}_{R'}$ zu $y_{R'}$ dual ist, und folgern daraus, daß auch $\hat{y}_R$ zu y_R dual ist. Es sei (ϵ,η) das Intervall zwischen ϵ und η, das γ berührt. Wenn weder α noch β in diesem Intervall liegt, dann ist $\hat{y}_R(\alpha,\beta) = \hat{y}_{R'}(\alpha,\beta)$, weil die Strecken aus (ϵ,η) auf keinem breiten Weg zwischen α und β liegen. Da eine $\bar{y}_R$-Verbindung, die α von β trennt, auch eine $\bar{y}_{R'}$-Verbindung ist, ist $\hat{y}_R(\alpha,\beta)$ dann und nur dann gleich 0, wenn α und β durch eine $\bar{y}_R$-Verbindung getrennt sind, und die Dualitätsbedingung in diesem Fall erfüllt.

Wenn α in (ϵ,η) liegt, und β außerhalb $[\epsilon,\eta]$, dann trennt die $\bar{y}_R$-Verbindung von ϵ mit η die Strecke α von β. Es existiert ferner kein breiter Weg, der von α nach β führt. Erstens ist das einzige Ende, das mit α beginnt, das Ende $\{\alpha,\gamma,\gamma'\}$, wobei γ' der Nachbar von γ in S, jeweils in T, ist. Wir nehmen an, α gehöre zu S. Dieses Ende kann unmöglich der erste Teil eines breiten Weges sein, das zu β führt, denn die einzigen Glieder, die in einer nicht trivialen Weise an dieses Ende gelegt werden können, sind Enden $\{\beta',\gamma,\gamma'\}$ oder $\{\beta',\gamma,\gamma''\}$, wobei γ'' der Nachbar von γ in T ist und β' notwendigerweise zum Intervall $[\gamma'',\eta]$ gehört. Folglich gilt $\hat{y}_R(\alpha,\beta) = 0$. Der Leser wird bemerkt haben, daß die zusätzliche Bedingung, die wir Enden der Art (b) auferlegt haben, in diesem Argument unentbehrlich ist.

Dagegen wenn β in $[\gamma'',\eta]$ liegt, und von keiner y_T-Verbindung zwischen zwei Elementen aus $[\gamma'',\eta]$ von γ getrennt ist, ist

$$\alpha,\gamma,\gamma',\gamma,\gamma'',\beta$$

ein breiter zugelassener Weg, der von α nach β führt. Folglich ist $\hat{y}_R(\alpha,\beta) = 1$. Sonst ist $\hat{y}_R(\alpha,\beta) = 0$. Wenn $\beta \in [\epsilon,\gamma']$ ist, und wenn es auch von keiner y_S-Verbindung zwischen zweien Elementen aus $[\epsilon,\gamma']$ von α getrennt ist, ist es unmittelbar mit α durch $\hat{y}_S$ verbunden, und deshalb auch durch $\hat{y}_R$. Es trennt auch keine $\bar{y}_R$-Verbindung α von β. Somit wird die Dualität von y_R und $\hat{y}_R$ bewiesen

Abänderung B.3. Eine dritte Abänderung ganz ähnlicher Art kann vorgenommen werden, wenn vorgegeben sind:

(1) zwei benachbarte innere Strecken $\gamma_1 \in S$ und $\gamma_2 \in T$;

(2) zwei äußere Strecke γ_1' und γ_2' aus S sowie γ_1'' und γ_2'' aus T,

die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(1) γ_1 und γ_2 sind weder in S noch in T verbunden;

(2) in S ist γ_1' mit γ_1 und γ_2' mit γ_2, und in T ist γ_1'' mit γ_1 und γ_2'' mit γ_2 verbunden;

(3) es seien (γ_1', γ_2') sowie (γ_1'', γ_2'') so definiert, daß sie aus lauter äußeren Strecken bestehen, dann ist keine Strecke aus (γ_1', γ_2') mit einer Strecke außerhalb $[\gamma_1', \gamma_2']$ verbunden, und keine Strecke aus (γ_1'', γ_2'') mit einer Strecke außerhalb $[\gamma_1'', \gamma_2'']$.

In diesem Fall schneiden wir alle Strecke aus (γ_1', γ_2') und (γ_1'', γ_2'') aus, um S', T', und R' zu bekommen. Die Funktionen $\bar{y}_{R'}$ und $\hat{y}_{R'}$ werden genau wie bei der Abänderung B.1 erhalten, und es wird auch genau so bewiesen, daß die Ausasge III.B.3 für S und T aus dieser Aussage für S' und T' folgt.

V.C. Widerspiegelung. Es ist nützlich, eine vorbereitende Abänderung der Mengen y_S und $\bar{y}_S$ gleich am Anfang vorzunehmen, bevor wir das Zusammenkleben beginnen. Es sei γ eine gegebene innere Strecke. Wir führen mittels γ eine Menge y_S' sowie eine Menge $\bar{y}_S'$ ein, und werden leicht zeigen können, daß die sich durch Zusammenklebung von $\bar{y}_S'$ und $\bar{y}_T$ ergebende Menge $\bar{y}_R'$ gleich der Menge $\bar{y}_R$ ist, und die Menge $\hat{y}_R'$ gleich $\hat{y}_R$.

Wir setzen $\bar{y}_S'(\alpha, \beta) = 1$ wenn $\bar{y}_S(\alpha, \gamma) = 1$ und $\bar{y}_S(\beta, \gamma) = 1$ ist. Da die Menge I_S unverändert bleibt, gilt die Durchschneidungsbedingung für $\bar{y}_S'$, wenn sie für $\bar{y}_S$ gilt. Es seien $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ zyklisch und $\bar{y}_S'(\alpha_1, \gamma_1) = \bar{y}_S'(\beta_1, \delta_1) = 1$. Wenn die Verbindungen von α_1 mit γ_1 und von β_1 mit δ_1 schon in $\bar{y}_S$ liegen, dann ist α_1 auch durch $\bar{y}_S$ und folglich durch $\bar{y}_S'$ mit β_1 verbunden. Wenn beide Verbindungen nur mittelbar ist, durch γ, zustande kommen, dann kommt auch eine Verbindung von α_1 mit β_1 durch γ zustande. Wenn dagegen weder β_1 noch δ_1 gleich γ ist, und die Verbindung von α_1 mit γ_1 mittelbar, dann ist entweder $(\alpha_1, \beta_1, \gamma, \delta_1)$ oder $(\gamma_1, \beta_1, \gamma, \delta_1)$ zyklisch, und folglich wegen der Bedingung (3.b.4) ist $\bar{y}_S(\beta_1, \gamma) = 1$, so daß α_1 und β_1 mittels γ miteinander verbunden sind.

Die Menge $\hat{y}_S'$ ist etwas kleiner als die Menge $\hat{y}_S$, obwohl sie darin enthalten ist. Es fehlen ihr nämlich einige Verbindungen mit γ. Wenn α und β mit γ verbunden sind, und wenn $(\alpha, \gamma, \beta, \delta)$ zyklisch ist, dann ist δ von γ durch die neue Verbindung von α mit β getrennt, so daß $\hat{y}_S'(\delta, \gamma) = 0$. Da die $\bar{y}_S$-Verbindungen von α und β mit γ, die Möglichkeit einer von $\hat{y}_S$ zugelassenen Schleife oder eines von $\hat{y}_S$ zugelassenen Endes, die γ und δ enthalten, ausschließen, ist der mögliche Verlust dieser Verbindungen folgenlos. Für die drei Hilfsätze III.B.4, III.B.5, und III.B.7, bei denen es sich nur um $\bar{y}_R$ und zugelassene breite Weg handelt, ist diese Abänderung auch gestattet.

V.D. Beweise der Sätze III.B.2 und III.B.3. Es sei N die Anzahl der Elemente in der Vereinigung $S \cup T$. Wir verwenden ein Induktionsverfahren, in dem N als Induktionsparameter dient. Beim Beweis der Sätze können wir alle beschriebenen Abänderungen verwenden, auch diejenigen, die wir durch die Vertauschung von S und T erhalten. Wenn wir irgendwelche dieser Abänderungen vornehmen können, sind wir wegen der Induktionsannahme sofort fertig. Als erste Vereinfachung, verwenden wir wiederholte Widerspielungen, so daß wir schließlich annehmen können, daß wenn γ eine innere Strecke ist, dann folgt die Gleichung $\bar{y}_S(\alpha, \beta) = 1$ aus den Gleichungen $\bar{y}_T(\alpha, \gamma) = 1$ und $\bar{y}_T(\beta, \gamma) = 1$. Eine ähnliche Annahme gelte auch für $\bar{y}_T$

Wir können weiter annehmen, daß entweder $Q = S \cap T$ eine einzige Strecke enthält, oder daß jede innere Strecke mittels $\bar{y}_S$ und mittels $\bar{y}_T$ mit einer zweiten Strecke verbunden ist. Jede Strecke, mit der $\bar{y}_S$ eine innere Strecke verbindet, liegt allerdings in S, während $\bar{y}_T$ verbindet sie mit einer Strecke in T. Wir nehmen schließlich an, daß keine benachbarte innere Strecken verbunden sind, weder durch $\bar{y}_S$ noch durch $\bar{y}_T$.

Obwohl die Aussage III.B.3 ohne Voraussetzung der Gültigkeit der Aussage III.B.2 genau gesehen für uns keinen Sinn hat, beweisen wir zunächst jene Aussage, und prüfen diese nur nachher oder nebenbei nach. Wir beweisen zuerst den Satz III.B.3 im Fall, daß es eine einzige innere Strecke γ gibt, und diese mittels $\bar{y}_T$ mit keiner zweiten Strecke verbunden ist. Dann gelten folgende Gleichungen:

(5.d.1) wenn $\alpha \in R \cap S$ und $\beta \in R \cap S$,

$$\bar{y}_R(\alpha, \beta) = \bar{y}_S(\alpha, \beta);$$

(5.d.2) wenn $\alpha \in R \cap T$ und $\beta \in R \cap T$,

$$\bar{y}_R(\alpha, \beta) = \bar{y}_T(\alpha, \beta),$$

$$\hat{y}_R(\alpha, \beta) = \hat{y}_T(\alpha, \beta);$$

(5.d.3) wenn $\alpha \in R \cap S$ und $\beta \in R \cap T$,

$$\bar{y}_R(\alpha, \beta) = 0.$$

Jede dieser Gleichungen, bis auf die zweite Gleichung (5.d.2), ist sofort klar. Wenn diese zweite Gleichung nicht gälte, gäbe es ein Paar $\{\alpha, \beta\}$ aus T, und zulässige Enden $\{\alpha, \gamma, \gamma'\}$ und $\{\beta, \gamma, \gamma''\}$, wobei γ' und γ'' Nachbarn von γ sind, so daß $\hat{y}_T(\alpha, \beta)$ gleich 0 wäre. Wenn $\gamma' = \gamma''$ ist, dann kann $\bar{y}_T$ die Strecken α und β nicht trennen. Folglich gilt $\hat{y}_T(\alpha, \beta) = 1$, was ein Widerspruch ist. Wenn $\gamma' \neq \gamma''$, dann kann allein eine Verbindung von γ mit einer zweiten Strecke die Strecke α von β trennen, und diese Verbindungen werden von den Voraussetzungen ausgeschlossen.

Für α und β in $R \cap S$ kann dagegen $\hat{y}_R(\alpha, \beta) = 1$ sein, ohne daß $\hat{y}_S(\alpha, \beta) = 1$ ist, aber nur dann, wenn γ durch $\bar{y}_S$ mit einer zweiten Strecke verbunden ist. Wir bestimmen eine Richtung auf dem Kreisrand. Es seien, bezüglich dieser Richtung, α' die erste und β' die letzte der Strecken aus $R \cap S$, die durch $\bar{y}_S$ mit γ verbunden sind. Dann ist $\hat{y}_R(\alpha, \beta) = 1$ und $\hat{y}_S(\alpha, \beta) = 0$, wenn α vor α' auftritt, und β nach β', und wenn ferner $\hat{y}_S(\alpha, \gamma) = \hat{y}_S(\beta, \gamma) = 1$ ist. Bis auf eine triviale Vertauschung von α und β können sonst diese beide Gleichungen nicht gleichzeitig gelten. Diese Paare sind gerade diejenigen, deren Elemente durch die Verbindungen in $\bar{y}_S$ zwischen γ und einer zweiten Element aus $S \cap R$ getrennt werden, nicht aber durch die Verbindungen in $\bar{y}_R$

Ein erster einfacher Fall, immer noch unter der sehr beschränkenden Annahme, daß Q aus γ allein besteht, das in T mit keiner zweiten Strecke verbunden wird, kann gleich erledigt werden. Wenn $R \cap S$ eine einzige Strecke α enthält, dann ist $\hat{y}_R(\alpha, \beta) = \hat{y}_T(\gamma, \beta)$ für jedes $\beta \in T$, weil jede Strecke β aus T, die durch $\hat{y}_T$ mit γ verbunden ist, auch mit seinen Nachbarn verbunden ist. Der Satz III.B.3 ist folglich trivial und nichts besagend, weil für jedes β aus $R \cap T$ die Gleichung $\bar{y}_R(\alpha, \beta) = \bar{y}_T(\gamma, \beta) = 0$ gilt. Der Satz III.B.2 ist auch in diesem Fall trivial. Infolgedessen setzen wir bei der weiteren Behandlung des Falles $\bar{y}_T(\gamma, \delta) \equiv 0$, $\delta \neq \gamma$, voraus, daß $R \cap S$ wenigstens zwei Strecken enthält.

Nur der Fall, daß $\alpha \in R \cap S$ liegt und $\beta \in R \cap T$, ist aus der vorhergehenden Bespechung nicht klar. In allen anderen Fällen ist gezeigt worden, daß $\hat{y}_R(\alpha, \beta) = 0$ ist, dann und nur dann, wenn α und β durch $\bar{y}_R$ getrennt sind. Für $\alpha \in R \cap S$ und $\beta \in R \cap T$ gilt die Gleichung $\hat{y}_R(\alpha, \beta) = 1$, dann und nur dann, daß ein breiter zugelassener Weg,

$$(5.d.4) \qquad \alpha, \gamma, \gamma', \gamma, \delta', \beta,$$

vorhanden ist, denn jeder längere Weg läßt eine Verkürzung zu. Es sei γ'' der zweite Nachbar von γ in S. Wenn γ einen zweiten Nachbar in T besitzt, sei es δ''. Wegen der Voraussetzungen, sind $\hat{y}_T(\beta, \delta')$ und $\hat{y}_T(\beta, \delta'')$ gleich 1, wenn $\hat{y}_T(\beta, \gamma) = 1$ ist. Ein breiter Weg der Art (5.d.4) existiert dann und nur dann, wenn β nicht von γ durch $\bar{y}_T$ getrennt ist, und α durch $\bar{y}_S$ weder von γ noch von γ'. Der Bemerkung im nächsten Absatz zufolge ist $\hat{y}_R(\alpha, \beta)$ dann und nur dann gleich 0, wenn α von γ durch $\bar{y}_S$ getrennt ist, oder wenn β von γ durch $\bar{y}_T$. Das heißt, wenn α und β durch $\bar{y}_R$ getrennt sind, denn eine trennende Verbindung liegt entweder in $\bar{y}_S$ oder in $\bar{y}_T$ und trennt eine der beiden Strecken von γ.

Damit es nicht übersehen wird, heben wir hervor, daß wenn α nicht von γ getrennt ist, dann kann es unmöglich von γ' und γ'' gleichzeitig getrennt sein. Das ist sofort klar bis auf den Fall, daß beide trennende Verbindungen die Strecke γ selbst mit anderen Strecken verbinden. Dann müssen wir die vorbereitenden Widerspiegelungen in Betracht ziehen.

Der Satz III.B.2 ist im allgemeinen trivial, wenn es eine einzige innere Strecke gibt, und sie durch $\bar{y}_T$ mit keiner zweiten Strecke verbunden ist. Zwei durch $\bar{y}_R$ verbundene Strecken liegen dann entweder beide in $R \cap S$ oder $R \cap T$. Folglich wenn $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ ein Zyklus ist, und

$$\bar{y}_R(\alpha_1, \gamma_1) = \bar{y}_R(\beta_1, \delta_1) = 1$$

ist, dann liegen alle vier Elemente entweder in $R \cap S$ oder in $R \cap T$. Die Bedingung (3.b.4) für $\bar{y}_R$ ist infolgedessen eine Folge derselben Bedingung für $\bar{y}_S$ und $\bar{y}_T$.

Wir nehmen jetzt an, daß jede innere Strecke durch $\bar{y}_S$ und durch $\bar{y}_T$ mit anderen Strecken verbunden ist. Es seien α und β zwei miteinander verbundene innere Strecken, so gewählt, daß die Anzahl der Strecken im Intervall (α, β) so klein wie möglich ist. Das Intervall (α, β) ist natürlich so gewählt, daß es aus Strecken in Q besteht. Es sei $\bar{y}_S(\alpha, \beta) = 1$. Wenn γ im Intervall (α, β) liegt, kann γ durch $\bar{y}_S$ mit keiner zweiten Strecke verbunden sein. Sonst wäre es mit α oder β verbunden, was unserer Wahl von α und β widesprechen würde.

Wegen der Möglichkeit der Abänderungen A.2, können wir folglich annehmen, daß das Intervall (α, β) leer ist. Dann sind α und β benachbart, und die Abänderung A.3 ist möglich. Da wir voraussetzten, wir hätten jede mögliche Abänderung vorgenommen, um die Induktionsannahme anzuwenden, folgern wir, daß keine innere Strecke mit einer zweiten inneren Strecke verbunden ist.

Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ die äußeren Strecken in S, die durch $\bar{y}_S$ mit einer inneren Strecke verbunden sind. Wir zählen sie in zyklischer Reihenfolge auf. Es sei Q_i diejenigen Strecken aus Q, die mit α_i verbunden sind. Die Menge Q ist die Vereinigung der Mengen Q_i, $1 \leq i \leq s$. Weil wir sonst eine allgemeine Abänderung der Art B.1 vornehmen könnten, können wir annehmen, daß wenn $Q_i \cap Q_{i'}$ nicht leer ist, dann $i' = i \pm 1$ ist, und α_i und $\alpha_{i'}$ benachbart. Unter diesen Umständen enthält $Q_i \cap Q_{i'}$ genau eine Strecke. Es können höchstens zwei Strecken zu einem gegebenen Q_i gehören. In derselben Weise definieren wir $\beta_1, \ldots, \beta_t$ in T und Q'_j, $1 \leq j \leq t$, mit ähnlichen Eigenschaften. Dann ist α_i dann und nur dann mit β_j verbunden, wenn $Q_i \cap Q'_j$ nicht leer ist.

Wegen der Möglichkeit der Abänderungen B.2, können wir annehmen, daß die erste Strecke aus Q_1 den Strecken α_1 und β_1 benachbart ist, und die letzte innere Strecke, die in Q_s und Q'_t liegen muß, den Strecken α_s und β_t benachbart. Aus der Möglichkeit einer Abänderung B.3 schließen wir, daß alle äußeren Strecken aus S in $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ liegen, und alle äußeren Strecken aus T in $\{\beta_1, \ldots, \beta_t\}$.

Wenn $s = t = 1$ prüft man leicht nach, daß $\hat{y}_R$ zu y_R dual ist, denn es gilt

$$\bar{y}_R(\alpha_1, \beta_1) = \hat{y}_R(\alpha_1, \beta_1) = 1.$$

Aus Symmetriegründen betrachten wir also nur zwei Fälle: $s > 1$, $t = 1$ und $s > 1$, $t > 1$. Im ersten Fall verbindet y_R jedes nicht benachbarte Paar, und $\hat{y}_R$ verbindet keines nicht benachbartes Paar. Folglich sind sie zueinander dual. Das ist auch so im zweiten Fall, wenn Q eine einzige Strecke enthält. Wenn y_R so einfach ist, ist die Aussage III.B.2 auch ohne weiteres klar.

Wir betrachten also den zweiten Fall unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß es wenigstens zwei innere Strecken gibt. Wenn Q_1 sowie Q'_1 wenigstens zwei Strecken enthalten, dann dient die erste dieser Strecken zu keinem Zweck, und kann, ohne daß $\bar{y}_R$ oder $\hat{y}_R$ beeinflußt wären, ausgelassen werden. Wir können folglich annehmen, daß Q_1 ein einziges Element γ enthält. Wenn Q_2 die Menge Q_1 enthält, ist α_1 durch $\bar{y}_R$ von allen Strecken in R außer sich selbst und seinen Nachbarn α_2 und β_1 getrennt. Es ist auch in S selbst von allen Strecken außer sich selbst und seinen Nachbarn getrennt. Ferner sind die $\bar{y}_R$-Verbindungen, in denen α_1 vorkommt, überflüssig, da die Gleichung $\bar{y}_R(\alpha_1, \beta) = 1$ die Gleichung $\bar{y}_R(\alpha_2, \beta) = 1$ zur Folge hat. Der breite Weg

$$\alpha_1, \gamma, \alpha_1, \gamma, \beta_1, \beta_1$$

verbindet α_1 und β_1. Folglich gilt $\hat{y}_R(\alpha_1, \beta_1) = 1$. Es gibt keinen breiten Weg, der mit α_1 beginnt und nicht mit α_1 selbst, α_2, oder β_1 endet. Wir folgern erstens, daß die Dualität, insofern sie α_1 betrifft, gültig ist, und zweitens, daß wir α_1 aufheben können, ohne die trennenden Verbindungen oder die Werte von $\bar{y}_R$ und $\hat{y}_R$ sonst zu stören. Folglich können wir die Induktionsannahme anwenden, um die Ausage III.B.3 zu erhalten.

Um die Aussage III.B.2 in diesem Fall zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß wir nur Zyklen, in denen α_1 vorkommt, behandeln müssen, denn die anderen werden von der Induktionsannahme gedeckt. Das sonst nach der Aushebung vielleicht genierende benachbarte Paar $\{\alpha_2, \beta_1\}$ ist sowieso verbunden. Es sei $Q_1 = \{\gamma\}$. Weil $\bar{y}_R(\alpha_1, \beta) = \bar{y}_S(\gamma, \beta)$ für $\beta \in R \cap S$ ist, und $\bar{y}_R(\alpha_1, \beta) = \bar{y}_T(\gamma, \beta)$ für $\beta \in R \cap T$, folgt die Bedingung (3.b.4) für $\bar{y}_R$, insofern sie α_1 betrifft, aus derselben Bedingung für $\bar{y}_S$ und $\bar{y}_T$.

Wir nehmen zuletzt an, daß $Q_1 \cap Q_2$ leer ist. Wenn Q_2 die Menge Q_1' nicht trivial durchschneidet, dann kann α_1 in allen trennenden $\bar{y}_R$-Verbindungen wieder durch α_2 ersetzt werden, und das schon verwendete Argument ergibt das erwünschte Ergebnis, und zwar die erwünschten Ergebnisse, denn die Aussage III.B.2 folgt wieder aus dem hervorgehenden Argument. Der einzige Fall also, den wir noch behandeln müssen, ist derjenige, für den $Q_1 = Q_1'$ ist, und ein einziges Element enthält. In diesem Fall ist $\hat{y}_R(\alpha_1, \beta) = 1$ nur für β gleich α_i oder β_i, $i = 1, 2$. Es ist α_1 nur mit sich selbst und β_1 durch $\bar{y}_R$ verbunden und mit sich selbst, α_2, β_1, und β_2 durch $\hat{y}_R$. Die Verbindung von α_2 mit β_2 trennt es von jeder anderen Strecke. Die Verbindung von α_1 mit β_1 trennt dagegen keine Strecken. Hieraus schließen wir nochmals, daß die Dualität, sofern α_1 darin vorkommt, gilt, und daß wir α_1 aufheben können, ohne die die anderen Strecken betreffende Lage zu ändern. Wir wenden die Induktionsannahme auf die geänderten Mengen an. Somit wird Satz III.B.3 schließlich bewiesen. Um den Satz III.B.2 zu beweisen, heben wir am besten α_1, β_1, und die Strecke in Q_1 alle aus.

V.E. Beweis der Hilfsätze III.B.4 und III.B.5. Obwohl diese zwei Sätze in ähnlicher Weise bewiesen werden, ziehen wir es vor, zunächst den Hilfsatz III.B.4 zu beweisen, denn die dazu nötigen Bezeichnungen sind einfacher. Es seien

$$U = (C_{-1}, \ldots, C_{2r+1}),$$

$$V = (D_{-1}, \ldots, D_{2s+1}),$$

die zwei in Betracht kommenden breiten Wege. Wir betrachten alle möglichen Abänderungen, und zeigen, wenn die Aussage III.B.4 nach der Abänderung gilt, gilt sie auch vor der Abänderung. Dann können wir genau wie bei den vorhergehenden Beweisen, die Aussage auf relativ einfache Fälle zurückführen. Wir bemerken sofort, daß bei den zweien vorliegenden Sätzen sowie bei dem Satz III.B.7, die Widerspiegelungen ohne weiteres vorgenommen werden können, da sie die breiten Wege nicht beeinflussen.

Bei jeder Abänderung ersetzen wir einige problematische Schleife oder Ende in U und V, um breite von den neuen Mengen von Verbindungen zugelassene Wege U' und V' zu bekommen. Wir verwenden die Induktionsannahme, um eine Reihe

$$W' = (E'_{-1}, \ldots, E'_{2t'+1})$$

zu erhalten. In dieser Reihe ersetzen wir, wenn es nötig ist, die problematischen Schleifen und Enden, wobei allerdings, wenigstens wenn es um Abänderungen der Art A handelt, auch das letzte gespannte Paar geändert werden kann, und bekommen schließlich eine Reihe,

$$W'' = (E''_{-1}, \dots, E''_{2t''+1}),$$

die oft schon die von dem Hilfsatz verlangte Reihe W ist. Unter gewissen Umständen müssen dennoch weitere Ersetzungen vorgenommen werden, um W aus W'' abzuleiten.

Für Abänderungen A.1 und A.2 können wir die Zulässigkeit dieses Verfahrens fast sofort der Beschreibung der betreffenden Abänderung ablesen. Der Fall (2) des Satzes ist vielleicht etwas fraglich, wenn bei der Abänderung es gerade γ ist, die weggeworfen wird. Denn das letzte angespannte Paar, dessen Existenz im Satz behauptet wird, enthält γ. Es sei γ' der Nachbar von γ in Q, und $\{\gamma', \beta\}$ das letzte gespannte Paar in $E'_{2t'+1}$. Wenn β in T liegt, können wir einfach γ' durch γ in $E'_{2t'+1}$ ersetzen um E_{2t+1} zu erhalten. Wenn dagegen β in S liegt, und es sich um die Abänderung A.2 handelt, dann kann $\bar{y}_S(\beta, \gamma) = 1$ sein. Folglich ist diese unmittelbare Ersetzung nicht zugelassen. Wenn $\bar{y}_S(\beta, \gamma) = 1$ ist $\bar{y}_S(\gamma', \gamma) = 0$. Es sind ferner die anderen Glieder $\gamma_{2t'+1}$ und $\gamma'_{2t'+1}$, oder im Ausnahmefall γ_{-1}, von $E'_{2t'+1}$ nicht von γ getrennt. Wir können folglich das Paar $\{\beta, \gamma'\}$ durch $\{\gamma, \gamma'\}$ ersetzen. Diese Ersetzung zusammen mit den nötigen Ersetzungen der anderen Schleifen und Enden ergibt aber einen Weg, der zunächst im Sand verläuft, denn er endet am inneren Diameter, an dem Paar $\{\gamma, \gamma'\}$. Um $\{\gamma, \beta'\}$ zu erreichen, können wir aber dann eine weitere Schleife $\{\gamma', \gamma, \beta', \gamma\}$ in T hinzufügen, denn in T ist die Strecke γ mit keiner anderen verbunden, und folglich $\hat{y}_T(\gamma', \beta') = 0$.

Daß das Verfahren auch auf die Abänderungen A.3 verwendbar ist, läßt sich leicht nachprüfen. Alle Schleifen und Enden in U und V, in denen γ_1 und γ_2 gespannt sind, werden erst, mittels des während der Einführung dieser Veränderung beschriebenen Verfahrens, durch verkürzte Schleifen und Enden ersetzt, die dieses Paar vermeiden, und die neuen dabei erhaltenen Wege durch von $y_{S'}$ und $y_{T'}$ zugelassene breite Wege U' und V' ersetzt. Das weiter zu verwendende Verfahren, das W' und W ergibt, bietet kaum Schwierigkeiten.

Wir betrachten trotzdem den Fall (2) etwas näher, unter der Annahme, daß das zusammengeklebte Intervall γ am Ende des Durchmessers liegt. Sei, zum Beispiel, $\{\gamma_{2t'+1}, \gamma'_{2t'+1}, \beta, \gamma\}$ das letzte Glied der Reihe W'. Es ist gleichgültig, ob seine Elemente S oder T gehören. Liegen sie in T. Es sei γ_1 der Nachbar von β in $\{\gamma_1, \gamma_2\}$. Da β mit γ durch $\bar{y}_T$ nicht verbunden ist, ist es weder mit γ_1 noch mit γ_2 verbunden. Wegen der Bedingung (3.b.4) und der Definition der Abänderung ist weder $\gamma_{2t'+1}$ noch $\gamma'_{2t'+1}$ von γ_1 durch $\bar{y}_T$ getrennt, weil eine trennende Verbindung notwendigerweise eine Verbindung mit γ_2 wäre, und diese Verbindung würde das jeweilige Element $\gamma_{2t'+1}$ oder $\gamma'_{2t'+1}$ von β trennen. Der Ausnahmefall, daß $t = -1$, wird ähnlich behandelt.

Wenn bei der Abänderung B.1 entweder die Strecke β oder dei Strecke β' außerhalb $[\gamma', \gamma'']$ liegt, dann liegen sie beide außerhalb (γ', γ''), und die Aussage III.B.4 für S und T ist eine unmittelbare Folge derselben Aussage für S' und T', denn ein breiter Weg, der mit $\{\beta, \beta'\}$ endet, kann in das Intervall (γ', γ'') nicht eindringen. Wenn dagegen eine dieser Strecken in (γ', γ'') liegt, dann liegt die andere, sowie α, in $[\gamma', \gamma'']$. Die Strecke β liege in (γ', γ''). Dann ist $r = -1$ und C_{-1} ist entartet, eine direkte Verbindung in $\hat{y}_S$ von α mit β. Wenn β' auch im offenen Intervall (γ', γ'') enthalten ist, ist $s = 1$ und D_{-1} entartet. Die Aussage folgt also sofort, wie auch im Fall, daß α in (γ', γ'') liegt. Wenn $\{\alpha, \beta'\}$ in $\{\gamma', \gamma''\}$ enthalten ist, dann ist entweder $\alpha = \beta'$, ein trivialer Fall, oder $\alpha \neq \beta'$. In beiden Fällen ist $\hat{y}_S(\alpha, \beta') = 1$, so daß es eine unmittelbare Verbindung von α mit β' gibt, obwohl der Weg V selbst kompliziert sein könnte. Wegen der Existenz dieser direkten Verbindung ist die Aussage klar.

Bei der Abänderung B.2 ist ein Intervall (ϵ, η) ausgezeichnet. Es ist das Intervall in dem alle Abstände gemessen werden. Es liegt entweder jede der Strecken α, β, und β' im Intervall $[\epsilon, \eta]$, oder eine liegt außerhalb dieses Intervalls und dann liegen alle im Komplement von (ϵ, η). Im zweiten Fall ist die Aussage III.B.4 eine Folge derselben Aussage für die abgeänderten Mengen. Es seien also alle drei Strecken in $[\epsilon, \eta]$. Dann kann W mit der Hand konstruiert werden, ohne auf die Beschaffenheit von U und V genauer zu beachten.

Es sei zum Beispiel $\alpha \in [\epsilon, \gamma']$. Wenn β und β' auch in $[\epsilon, \gamma']$ liegen, dann ist $\{\alpha, \beta, \beta'\}$ zulässig im schwachen Sinn. Wenn β und β' in $[\eta, \gamma'']$ liegen, ist

$$W = \{\alpha, \gamma', \gamma\}, \{\gamma, \gamma', \gamma, \gamma''\}, \{\gamma, \gamma'', \beta, \beta'\}$$

ein möglicher Weg. Wenn schließlich β und β' Nachbarn von γ sind, ist

$$W = E_{-1} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

die erwünschte Reihe.

Unter den Umständen, die eine Abänderung der Art B.3 gestatten, läuft alles innerhalb drei verschiedener Mengen ab:

(1) des Intervalls $[\gamma_1', \gamma_1]$ in S, das γ_2' nicht enthält, und des entsprechenden Intervalls $[\gamma_1'', \gamma_1]$ in T;

(2) des Intervalls $[\gamma_2', \gamma_2]$ in S, das γ_1' nicht enthält, und des entsprechenden Intervalls $[\gamma_2'', \gamma_2]$ in T;

(3) der zwei übriggebliebenen Intervalle $[\gamma_1', \gamma_2']$ und $[\gamma_1'', \gamma_2'']$ und des Paares $\{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Die zwei ersten Fälle werden wie vorher behandelt, die Aussage wird auf die entsprechende Aussage für S' und T' zurückgeführt.

Beim letzten Fall können die Wege U und V entweder direkt sein, oder das gespannte Paar $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ enthalten. Wenn der Weg auf diese Weise durch $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ vermittelt ist, ist weder γ_1 noch γ_2 durch $\bar{y}_S$ (jeweils $\bar{y}_T$) von β (jeweils β') getrennt. Es ist folglich leicht W aufzubilden, wenn U und V entweder beide direkt oder beide vermittelt sind. Seien dagegen, zum Beispiel, U direkt und V vermittelt. Es sind dann die drei Strecken α, β, und β' entweder alle in $[\gamma_1', \gamma_2']$ oder alle in $[\gamma_1'', \gamma_2'']$ enthalten. Wir nehmen an, daß sie alle in dem ersten dieser

Intervalle enthalten sind. Wenn $\hat{y}_S(\alpha, \beta') = 1$ wäre, oder wenn $\hat{y}_S(\beta, \gamma_1) = 1$ und $\hat{y}_S(\beta, \gamma_2) = 1$ wären, wäre eine der folgenden breiten Wege möglich:

$$W = \{\alpha, \beta, \beta'\};$$

oder

$$W = \{\alpha, \gamma_1, \gamma_2\}, \{\beta, \beta', \gamma_1, \gamma_2\}.$$

Wenn $\hat{y}_S(\alpha, \beta') = 0$ ist, ist α von β' durch $\bar{y}_S$ getrennt. Diese Verbindung kann jedoch β' weder von γ_1 noch von γ_2 trennen, und kann ferner α nicht von β trennen. Da β und β' benachbart sind, liegt folglich β zwischen α und β', und diese trennende $\bar{y}_S$-Verbindung verbindet β zu einer zweiten Strecke jenseits α. Sie trennt deshalb α von γ_1 und γ_2, was auch unmöglich ist. Somit ist bewiesen, daß bei dem Beweis des Satzes III.B.4 die Abänderung B.3 erlaubt ist.

Bei dem weiteren Beweis verfahren wir wie im Abschnitt V.D. Wir erledigen zuerst einige triviale Fälle. Damit unsere Bezeichnungen eindeutig bleiben, umnennen wir die Strecke α des Satzes auf ϵ.

Wir nehmen zunächst an, daß Q aus einem einzigen Element γ besteht. Es seien γ' und γ'' seine Nachbarn in S, und δ' und δ'' seine Nachbarn in T. Wenn U und V direkte Verbindungen sind, läßt sich W ohne weiteres konstruieren. Es sind sonst nur zwei Fälle, die problematisch sein könnten. Wir beschreiben zwei typische Beispiele

Erstens ist es möglich, daß α und β unmittelbar durch $\hat{y}_S$ verbunden sind, und $\beta' \in S$ mit α durch einen breiten Weg V verbunden ist. Als gespanntes Paar in diesem Weg könnte $\{\gamma, \gamma'\}$ vorkommen. Wenn β' nicht durch $\bar{y}_S$ von α getrennt ist, ist

$$W = \{\alpha, \beta, \beta'\}$$

ein möglicher Weg. Wenn aber β' und α getrennt sind, dann ist β' auch von γ getrennt. Das ist ein Widerspruch.

Es ist auch möglich, daß α mit $\beta \in T$ durch einen Weg, in dem $\{\gamma, \delta'\}$ gespannt ist, verbunden ist, und mit $\beta' \in T$ verbunden ist, durch einen Weg, in dem $\{\gamma, \delta''\}$ gespannt ist. Wenn β nicht von δ'' getrennt ist, oder β' nicht von δ', ist entweder

$$W = \{\alpha, \gamma, \gamma''\}, \{\gamma, \gamma'', \gamma, \delta''\}, \{\gamma, \delta'', \beta, \beta'\}$$

oder

$$W = \{\alpha, \gamma, \gamma'\}, \{\gamma, \gamma', \gamma, \delta'\}, \{\gamma, \delta', \beta, \beta'\}$$

ein möglicher Weg. Im allgemein ist jedoch γ' nicht durch $\bar{y}_S$ von γ'' getrennt, wenn $\hat{y}_S(\alpha, \gamma') = 1$ und $\hat{y}_S(\alpha, \gamma'') = 1$, so daß wir das Paar $\{\gamma, \gamma'\}$ und $\{\gamma, \gamma''\}$ mittels der Schleife $\{\gamma, \gamma', \gamma, \gamma''\}$ auf jeden Fall verbinden können.

Wir führen jetzt die Bezeichnungen, die wir vorher verwendet haben, ein, und nehmen an, daß es wenigstens zwei innere Strecken gibt. Die ganze Zahlen s und t werden auch wie vorher definiert. Der Fall $s = t = 1$ kommt bei den Sätzen III.B.4 und III.B.5 nicht in Betracht. Auf jeden Fal ist er ganz trivial. Der Fall $s = 1, t > 1$ räumen wir zunächst ab, obwohl wir nachher den Fall $s > 1, t > 1$ in derselben Weise behandeln werden.

Am einfachsten beschreiben wir die möglichen Tripel $\{\alpha, \beta, \beta'\}$. Es sei zuerst $\beta = \beta_j$ und $\beta' = \beta_{j'}$, $j' = j+1$, in T. Die Strecke α muß dann in S liegen. Es ist ferner der Durchschnitt $Q'_j \cap Q'_{j'}$ leer, weil es angenommen worden ist , daß $\bar{y}_R(\beta, \beta') = 0$. Es seien γ' und γ'' die aneinander liegenden Strecken aus Q'_j und $Q'_{j'}$, Als Weg W wählen wir

$$\{\alpha, \gamma', \gamma''\}, \{\gamma', \gamma'', \beta, \beta'\}.$$

Wenn $\beta \in S$ liegt und $\beta' \in T$, und sie benachbart sind, dann ist notwendigerweise unter den jetzt obwaltenden Umständen $\bar{y}_R(\beta, \beta') = 1$, so daß dieser Fall nicht auftritt, und nicht nur für $s = 1$, sondern für beliebige s und t.

Es seien also $s > 1$, $t > 1$, und $\beta = \beta_j$ in S, $\beta' = \beta_{j'}$, $j' = j + 1$, in T. Wir führen γ' und γ'' wie vorher ein, und zwar, so daß $\gamma'', \gamma', \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ zyklisch ist. Es sei i' der letzte Index, für den $\gamma' \in Q_{i'}$, und i'' der erste, für den $\gamma'' \in Q_{i''}$. Dann ist $\alpha = \alpha_i$, für $i' \leq i \leq i''$, aber sonst beliebig. Da $i'' - i' \leq 1$, ist die Auswahl nicht gerade ergiebig. Auf jeden Fall können wir W wie vorher konstruieren.

Somit wird der Hilfsatz III.B.4 bewiesen. Es ist klar, daß der Hilfsatz III.B.5 in genau derselben Weise bewiesen werden kann. Folglich beschreiben wir seinen Beweis nicht, und wenden uns dem Beweis des Hilfsatzes III.B.7 zu.

V.F. Beweis des Hilfsätzes III.B.7. Dieser Hilfsatz wird natürlich auch mittels eines Induktionsverfahren bewiesen. Bei dem zweiten Teil ist $\beta \in S$ und $\beta' \in T$; um jedes Mißverständnis zu vermeiden, sei dann ϵ ihr gemeinsamer Nachbar in Q. Dann ist das letzte gespannte Paar in der Schleife E_{2t+1} das Paar $\{\epsilon, \beta\}$, und das Symbol γ bleibt frei. Als erster Schritt muß jede Abänderung nochmals betrachtet werden, aber hinsichtlich der neuen Aussage. Da wir ferner bei den Abänderungen die Möglichkeit einer Vertauschung von S und T benutzt haben, um die Anzahl der Fälle in Schranken zu halten, müssen wir uns jetzt die nichtsymmetrischen Fälle genauer ansehen. Es genügt, in den Voraussetzungen die Möglichkeit, daß $\beta' \in S$ und $\beta \in T$, auch zuzulassen.

Im allgemeinen bleibt der Wert von $\bar{y}_R(\beta, \beta')$ bei Abänderungen der Art A unangetastet. Es muß nachgeprüft werden, ob die neue Kette W', die entsteht, wenn alle problematischen Enden und Schleifen ersetzt werden, so endet, daß der Satz III.B.7 auf sie angewendet werden kann. Nur die zweite Hälfte des Satzes ist in dieser Hinsicht fraglich. Bei der zweiten Hälfte ist es wohl möglich, daß die Konstruktionen, die beim Übergang zu W' eingeführt worden sind, auch auf die letzte Schleife oder das letzte Ende E_{2t+1} vorgenommen werden müssen.

Wir betrachten zunächst die Abänderungen A.1 und A.2. Wenn γ ungleich ϵ ist, ist auch der zweite Teil klar. Wenn dagegen $\gamma = \epsilon$ ist, dann können wir annehmen, $\{\gamma', \delta'\}$ sei das Paar $\{\beta, \beta'\}$. Dann ist die letzte Schleife in W gewiß problematisch. Sie wird jedoch, nach dem allgemeinen Verfahren durch eine Schleife, in der $\{\gamma', \gamma''\}$ oder $\{\delta', \delta''\}$ gespannt ist, ersetzt. Folglich ist

$$\bar{y}_R(\beta, \beta') = \bar{y}'_R(\beta, \beta') = 0.$$

Eine Abänderung der Art A.3 bietet überhaupt kein Problem, denn, wenn es sich um den zweiten Teil des Satzes händelt, ist $\epsilon = \gamma$ und, wenn zum Beispiel $\beta \in S$ ist, ist $\bar{y}_{S'}(\beta, \gamma) = 0$, dann und nur dann, wenn

$$\bar{y}_S(\beta, \gamma_1) = \bar{y}_S(\beta, \gamma_2) = 0$$

ist. Dagegen können wir nur behaupten, daß die Gleichung $\bar{y}_{T'}(\alpha, \gamma) = 0$ die Gleichungen $\bar{y}_T(\alpha, \gamma_1) = 0$ und $\bar{y}_T(\alpha, \gamma_2) = 0$ zur Folge hat. Dies aber reicht.

Bei einer Abänderung der Art B.1 spielt sich wie beim Beweis des Satzes III.B.4 alles entweder im Intervall $[\gamma', \gamma'']$ oder im Komplement des Intervalls (γ', γ'') ab. Die Aussage III.B.7 für S und T ist im ersten Fall trivial und im zweiten eine Folge der Aussage für S' und T'.

Bei einer Abänderung der Art B.2 sind es das Intervall $[\epsilon, \eta]$ und das Komplement des Intervalls (ϵ, η), in denen sich alles abspielt. Wenn sich alles innerhalb des Intervalls $[\epsilon, \eta]$ abspielt und β und β' beide zu S oder zu T gehören, dann ist $\bar{y}_R(\beta, \beta')$ gleich $\bar{y}_S(\beta, \beta')$, jeweils $\bar{y}_T(\beta, \beta')$. In diesem Fall ist folglich $\bar{y}_R(\beta, \beta') = 0$ laut Voraussetzung, denn W ist zulässig. Wenn $\beta \in S$ liegt und $\beta' \in T$, dann ist nach Voraussetzung $\bar{y}_R(\beta, \beta') = 0$, denn jeder Weg von β nach β' würde über γ führen, und entweder ist $\bar{y}_S(\gamma, \beta) = 0$ oder $\bar{y}_T(\gamma, \beta') = 0$, weil sonst wäre $\beta = \epsilon$ und $\beta' = \eta$, was keinen Platz für α übrig läßt, wenigstens wenn vorausgesetzt wird, daß (ϵ, η) nicht leer ist. Wenn sich alles außerhalb (ϵ, η) abspielt, können wir die Aussage für R' unmittelbar anwenden.

Eine Abänderung der Art B.3 behandeln wir wie beim Beweis des Satzes III.B.4. Drei Fälle werden unterschieden. Die zwei ersten Fällen werden wie die Abänderung B.2 behandelt; die Aussage ist sowieso eine unmittelbare Folgen der Aussage für R'. Beim dritten Fall ist $\{\beta, \beta\}$ entweder gleich $\{\gamma_1', \gamma_2'\}$ oder gleich $\{\gamma_1'', \gamma_2''\}$, oder keiner Weg W kann eine Schleife, in der $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ gespannt ist, enthalten. Im zweiten Fall ist W entartet,

$$W = \{\alpha, \beta, \beta'\},$$

und die Aussage eine Folge der Zulässigkeit dieses Endes. Wenn W nicht entartet ist, muß $\{\gamma_1, \gamma_2, \beta, \beta'\}$ eine zugelassene Schleife sein, und das ist nur möglich, wenn $\bar{y}_S(\beta, \beta') = 0$, jeweils $\bar{y}_T(\beta, \beta') = 0$, ist. Es muß darüber hinaus α in S liegen, wenn $\{\beta, \beta'\}$ in T enthalten ist, und umgekehrt. Hieraus folgt leicht, daß es keinen Weg gibt, der von β nach β' führt. Wenn I_1 und I_2 die zwei Intervalle sind, in denen der Punkt zwischen γ_1 und γ_2 den Durchmesser aufteilt, dann würde er eine zulässige Verbindung enthalten, die zwei Strecken, eine in I_1 und eine in I_2, verbindet. Eine Verbindung dieser Art existiert aber nicht. Folglich ist $\bar{y}_R(\beta, \beta') = 0$.

Wir nehmen jetzt an, daß alle möglichen Abänderungen vorgenommen worden sind, und betrachten zuerst den Fall, daß Q aus einem einzigen Element γ besteht. Es kann $\bar{y}_R(\beta, \beta') = 1$ sein, nur wenn jede der Strecken β und β' durch $\bar{y}_S$ oder $\bar{y}_T$ mit γ verbunden ist. Wenn es so ist, kann der Weg des Satzes unmöglich existieren.

Dasselbe Argument kann allgemein angewendet werden, um die zweite Hälfte der Aussage zu beweisen. Auch die erste Hälfte, denn wenn alle möglichen Abänderungen, sowie alle möglichen Widerspiegelungen schon vorgenommen worden sind, kann $\bar{y}_R(\beta, \beta') = 1$ sein, nur wenn $\bar{y}_S(\beta, \beta')$ jeweils $\bar{y}_T(\beta, \beta')$ schon gleich 1 ist.

Literaturverzeichnis

[1] G. Grimmett, *Percolation,* Springer (1989)

[2] R. P. Langlands, C. Pichet, P. Pouliot, Y. Saint-Aubin, *On the universality of crossing probabilities in two-dimensional percolation,* Jour. Stat. Phys., Vol. 67 (1992) 553–574.