SHIMURAVARIETÄTEN UND GERBEN*

Von R. P. Langlands in Princeton und M. Rapoport in Bonn

§1. EINLEITUNG

Das Problem der Fortsetzbarkeit der Hasse-Weil-Zeta-Funktionen und allgemeiner der motivischen L-Funktionen ist nach wie vor ein zentrales Problem der Zahlentheorie. Es wird oft in zwei Probleme aufgeteilt, die getrennt zu lösen sind. Es ist erstens zu zeigen, daß jede motivische L-Funktion gleich einer automorphen L-Funktion ist, und zweitens, daß jede automorphe L-Funktion fortsetzbar ist. Beide Probleme sind in herzlich wenigen Fällen gelöst und dann nur dank der Bemühungen vieler Mathematiker über lange Zeit.

Nach den abelschen Varietäten sind in arithmetischer Hinsicht die Shimuravarietäten wohl die zugänglichsten, und diese Arbeit soll ein Beitrag zum ersten Problem für die ihnen zugeordneten motivischen L-Funktionen sein. Die Shimuravarietäten gehen aus der Theorie der automorphen Funktionen hervor und werden durch eine reduktive Gruppe G mit zusätzlicher Struktur definiert. Erfahrungsgemäß besteht die Lösung des Problems in einem gegebenen Fall aus zwei Bestandteilen, einer gruppentheoretischen Beschreibung der Punkte der reduzierten Varietät, und kombinatorischen Argumenten, die das fundamentale Lemma von [L3] einschleißen, um den erhaltenen Ausdruck in eine Form zu bringen, die mit der Arthur-Selberg'schen Spurformel verglichen werden kann. Wir beschäftigen uns hier nur mit dem ersten Problemkreis und verweisen für die Umformung auf zukünftige Arbeiten von R. Kottwitz.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine Vermutung über die Reduktion modulo p von Shimuravarietäten zu formulieren, sie plausibel zu machen, indem wir sie mit den Standardvermutungen von Grothendieck in Beziehung setzen, und die Tatsachen zu beweisen, die auf eine rein gruppentheoretische Formel für die Anzahl der Punkte der Reduktion modulo p führen. Über die Primzahl p müssen wir einige einschränkende Voraussetzungen machen die aber über den Fall guter Reduktion hinaus gewisse Fälle schlechter Reduktion zulassen. Es sei $S = \mathrm{Sh}(G,h)_K\big(K = K^pK_p \subset G(\mathbf{A}_f)\big)$ eine Shimuravarietät, definiert über dem Reflexkörper $E = E(G,h)$,

* Appeared in Jour. für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 378 (1987).

und $\mathfrak{p}$ eine Primstelle von E über p, die gut ist. Es sei κ der Restklassenkörper von $E_{\mathfrak{p}}$ und κ_m die Erweiterung von Grad m. Die Formel hat folgende Gestalt. Die Anzahl $|S(\kappa_m)|$ ist gleich

$$\sum_{(\varepsilon)_{st}} \iota(\varepsilon) \cdot \mathrm{vol}\big(G_\varepsilon(\mathbf{Q})Z_K/G_\varepsilon(\mathbf{A}_f)\big) \cdot \sum_{\substack{(\gamma),(\delta)\\ \kappa(\varepsilon;\gamma,\delta)=1}} O_\gamma(f^p)TO_\delta(\phi_p). \tag{1.1}$$

Hier ist Z_K gleich $Z(\mathbf{A}_f) \cap K$; die äußere Summe läuft über die stabilen Konjugationsklassen von $Z(\mathbf{Q}) \cap Z_K\backslash G(\mathbf{Q})$. Die Zahl $\iota(\varepsilon)$ ist eine kohomologische Invariante,

$$\iota(\varepsilon) = |\mathrm{Ker} : H^1(\mathbf{Q}, G_\varepsilon) \to H^1(\mathbf{A}, G_\varepsilon) \times H^1(\mathbf{Q}, G_{\mathrm{ab}})|.$$

Die innere Summe läuft über Konjugationsklassen von Elementen $\gamma \in G(\mathbf{A}_f^p)$ und getwistete Konjugationsklassen von Elementen $\delta \in G(L)$. Hier ist L die unverzweigte Erweiterung von $\mathbf{Q}_p$ mit Restklassenkörper κ_m. Die Symbole O_γ bzw. TO_δ bedeuten Bahnenintegrale bzw. getwistete Bahnenintegrale, und die Funktion auf $G(\mathbf{A}_f^p)$ ist

$$f^p = \frac{1}{\mathrm{vol}(K^p)} \cdot \mathrm{char}\, K^p,$$

während ϕ_p ein durch die Shimuravarietät definiertes Element der Heckealgebra von $G(L)$ bezüglich K_p ist. Von den Paaren γ, δ wird verlangt, daß γ stabil konjugiert zu ε ist, daß die Norm von δ stabil konjugiert zu ε ist und, die interessanteste Bedingung, daß die Kottwitz-Invariante $\kappa(\varepsilon;\gamma,\delta)$ definiert und gleich 1 ist. Obgleich diese Formel in unserer Arbeit nicht auftritt, sondern einer zukünftigen Arbeit von Kottwitz vorbehalten ist, ist sie unschwer aus unseren Ergebnissen abzuleiten. Dies ist eine Folgerung der Ergebnisse von Kottwitz [K3].

Im Fall, daß die Shimuravarietät S_K kompakt ist, treten die Zahlen (1.1) in der Potenzreihenentwicklung des Logarithmus der Hasse-Weil-Zeta-Funktion von S_K in der guten Primstelle p auf. Um die rechte Seite von (1.1) mit der entsprechenden Potenzreihenentwicklung von automorphen L-Funktionen, die zu automorphen Darstellungen von G gehören, zu vergleichen, müßte man zunächst das getwistete Bahnenintegral von ϕ_p in ein gewöhnliches Bahnenintegral einer Funktion f_p auf $G(\mathbf{Q}_p)$ umschreiben. Falls des fundamentale Lemma im allgemeinen zur Verfügung stünde, könnte dies nach Stabilisierung erreicht werden, und mit dem Satz von Kottwitz [K3] würde überdies die Funktion f_p explizit hingeschrieben werden können. Es ist das Auftreten der Bedingung über die Kottwitz-Invariante, die dieses einfache Vorgehen vereitelt. Man kann diese Bedingung als den Grund für das Einführen der endoskopischen Gruppen in diesem Zusammenhang ansehen. Der Ausweg aus diesem Dilemma ist es, die Hasse-Weil-Zeta-Funktion nicht mit einer zu G gehörigen automorphen L-Funktion zu vergleichen, sondern mit einem Produkt von automorphen L-Funktionen, die zu automorphen Darstellungen von endoskopischen Gruppen von G assoziiert sind, etwa einem Produkt von der folgenden Form

$$\prod_H \prod_\Pi L(s, \Pi, r_H)^{m(H)}. \tag{1.2}$$

Dabei ist Π ein L-Paket, r_H eine virtuelle Darstellung der L-Gruppe ${}^L H$ und der Exponent möglicherweise eine rationale Zahl. Man kann erwarten, daß die Potenzreihenentwicklung des Logarithmus von (1.2) als Summe von stabilisierten Spuren in einem gewissen Sinne geschrieben werden kann:

$$\sum_H ST(f_H). \tag{1.3}$$

Die Funktionen f_H werden von der Form von (1.2) diktiert. Die weitere Strategie besteht jetzt darin, die einzelnen Terme von (1.3) mit den stabilisierten Spurformeln für die verschiedenen H auszudrücken und andererseits die Stabilisierung der rechten Seite von (1.1) durchzuführen, die auch auf eine Summe von stabilisierten Spurformeln für die endoskopischen Gruppen für passende Funktionen f'_H führt. Schließlich wären die Funktionen f_H und f'_H zu vergleichen. Obgleich dieses Programm im Augenblick noch Zukunftsmusik ist, ist es Kottwitz gelungen, den elliptischen Teil der Summe auf der rechten Seite von (1.1) in der passenden Form zu schreiben.

Wir bemerken nebenbei, daß aus der Darstellung der Hasse-Weil-Zeta-Funktion in der Form (1.2) leicht folgt, daß die Eigenwerte des Frobeniuselements Wurzeln von Polynomen sind, deren Koeffizienten aus den Eigenwerten von Heckeoperatoren gebildet werden. Diese Aussage ist auch eine Folge von Kongruenzrelationen, die in vielen Fällen relativ einfach zu beweisen sind. Während aber im Fall der Gruppe $GL(2)$ die Darstellung der Hasse-Weil-Zeta-Funktion als Produkt von automorphen L-Funktionen eine Folge der Kongruenzrelationen ist, ist dies für andere Gruppen kaum zu erwarten.

Für die Berechnung der Zetafunktion reicht es, statt unserer Vermutung die Formel (1.1) zur Verfügung zu haben, und der Versuch eines Beweises dieser Formel im Falle der Gruppe G der symplektischen Ähnlichkeiten führt auf eine verhältnismäßig elementare aber subtile Frage über prinzipal polarisierte abelsche Varietäten, die wir an dieser Stelle explizit formulieren wollen. Es sei (A, Λ) eine abelsche Varietät vom CM-Typ über $\mathbf{C}$ mit einer $\mathbf{Q}$-Klasse von Polarisierungen. Dann ist (A, Λ) bereits über einer endlichen Erweiterung von $\mathbf{Q}$ definiert und hat in einer gewählten Stelle $\mathfrak{p}$ über p gute Reduktion $(\bar{A}, \bar{\Lambda})$ über dem endlichen Körper $\mathbf{F}_q$, $q = p^n$. Der Frobeniusendomorphismus von $(\bar{A}, \bar{\Lambda})$ über $\mathbf{F}_q$ ist in einen Endomorphismus von (A, Λ) geliftet, der durch seine Aktion auf der rationalen Kohomologie ein Element $\varepsilon \in G(\mathbf{Q})$ definiert. Andererseits definiert die l-adische Kohomologie $H^1(\bar{A} \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q, \mathbf{Q}_l)$ für alle $l \neq p$ eine Konjugationsklasse $\gamma \in G(\mathbf{A}_f^p)$ und die kristalline Kohomologie (d.h. die Theorie der Dieudonnémoduln) eine getwistete Konjugationsklasse $\delta \in G(L)$. Die Vermutung von Kottwitz ist, daß die Invariante $\kappa(\varepsilon; \gamma, \delta)$ gleich 1 ist.

Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt jedoch nicht in dem Beweis unserer Vermutung oder ihrer Abschwächung, sondern in ihrer Formulierung. Die Vermutung beschreibt die Punkte der Reduktion modulo p als disjunkte Vereinigung von Doppelnebenklassen, die von Konjugationsklassen von *zulässigen* Homomorphismen von *Gerben* in die zu G assoziierte neutrale Gerbe parametrisiert werden,

$$\phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{G}_G.$$

Hier ist $\mathcal{P}$ eine explizit konstruierte Gerbe. Um diese Konstruktion durchführen zu können, haben wir es vorgezogen, den Begriff einer Gerbe möglichst einfach aufzufassen, als eine Erweiterung einer Galoisgruppe durch eine algebraische Gruppe (den "Kern" der Gerbe), da wir uns außerstande fühlten, mit dem abstrakten Begriff umzugehen. Die Konstruktion von $\mathcal{P}$ ist ein Hauptanliegen unserer Arbeit, wie auch die Konstruktion des Homomorphismus

$$\psi_{T,\mu} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{G}_T,$$

der zu einem über $\mathbf{Q}$ definierten algebraischen Torus T und einem Kocharakter μ von T assoziiert ist. Falls $(T, h_T) \subset (G, h)$ einen "speziellen Punkt" der Shimuravarietät definiert, so erhalten wir aus $\psi_{T,\mu}$, mit $\mu = \mu_{h_T}$, durch Komposition mit der Inklusion $\mathcal{G}_T \subset \mathcal{G}_G$ einen Homomorphismus $\psi_{T,\mu} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{G}_G$, der sich als zulässig erweist. Im Falle der guten Reduktion ist jeder zulässige Homomorphismus konjugiert zu einem Homomorphismus von dieser Form für ein passendes (T, h_T). Da im Kern von $\mathcal{P}$ ein Element δ existiert (genauer: eine Folge von Elementen δ_n, die Potenzen voneinander sind), dessen Bild in T unter $\psi_{T,\mu}$ rational ist, erhalten wir aus $\psi_{T,\mu}$ ein Element $\gamma \in G(\mathbf{Q})$. Man kann leicht zeigen, daß (γ, h_T) ein Frobeniuspaar im Sinne von [L1] ist und daß die Zuordnung $\phi \longrightarrow (\gamma, h)$ eine Bijektion zwischen den *lokalen* Äquivalenzklassen von zulässigen Homomorphismen ϕ und den Äquivalenzklassen von Frobeniuspaaren liefert. Hier heißen zwei Homomorphismen von Gerben über $\mathbf{Q}$ lokal äquivalent, falls ihre Lokalisierungen in jeder Stelle konjugiert sind. Man sieht auf diese Weise ein, daß die hier formulierte Vermutung die von dem ersten von uns in [L1] geäußerte Vermutung zur Folge hat; aber die neue Vermutung ist präziser, insofern als die in [L1] definierte Einbettung der dort definierten Gruppe $I(\mathbf{A}_f^p)$ in $G(\mathbf{A}_f^p)$ dort nicht hinreichend genau definiert ist, um die Formel (1.1) aus ihr abzuleiten.

Die neue Vermutung hat aber auch einen anderen Vorteil gegenüber der alten, der sogar historisch gesehen ihr Ursprung ist. Der alte Vermutung versagt nämlich bereits in den enfachsten Fällen schlechter Reduktion. Dies spiegelt sich einerseits darin wider, daß dann nicht jeder zulässige Homomorphismus von der Form $\psi_{T,\mu}$ ist, und andererseits darin, daß der Liftungssatz von Zink [Z1] in diesen Fällen nicht mehr gültig ist. In der vorliegenden Arbeit haben wir den Fall schlechter Reduktion weitgehend vernachlässigt. Der zweite Autor beabsichtigt, in einer noch zu schreibenden Arbeit einige Fälle schlechter Reduktion eingehender zu behandeln, und so die Vermutung aus einer zweiten Perspektive zu beleuchten.

Die Natur der neuen Vermutung hat ihren philosophischen Hintergrund in der Grothendieck'schen Theorie der Motive. Die Existenz der Kategorie der Motive über einem endlichen Körper kann bisher nur unter Benutzung der noch nicht bewiesenen Standardvermutungen nachgewiesen werden. Andererseits ordnet die von Grothendieck entworfene Theorie der Tannakakategorien, die von Saavedra Rivano in [Sa] und Deligne und Milne in [DM] entwickelt wurde, einer abelschen Kategorie mit Zusatzstrukturen, inbesondere einem Tensorprodukt, eine Gerbe zu (wir haben das französische Wort beibehalten, denn die am nächsten liegenden Übersetzungen scheinen schon besetzt zu sein). Die Gerbe $\mathcal{P}$ ist diejenige Gerbe, die zur Kategorie der Motive über endlichen Körpern, falls sie existierte, gehört.

Wir erklären jetzt die Organisation des Artikels. Im §2 definieren wir eine Gerbe $\mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$ mit Zusatzstrukturen über einem globalen Körper, die zu einem Torus T und zwei Kocharakteren ν_1, ν_2 gehört. Falls diese Kocharaktere durch "Mittelung" aus einem einzigen Kocharakter μ entstehen, so konstruieren wir eine explizite Neutralisierung $\mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2} \cong \mathcal{G}_T$. Die Hauptresultate dieses Abschnitts sind die Sätze 2.1 und 2.2. Die Konstruktion benutzt die Klassenkörpertheorie und die Theorie von Tate-Nakayama und verläuft ähnlich wie die Konstruktion der Taniyamagruppe. Es scheint uns ein nützliches Unterfangen, die Konstruktion durch eine Universaleigenschaft zu charakterisieren. Dies würde unsere unständlichen Kozykel-Verifikationen ersetzen und vielleicht mehr Einsicht in die hier herrschenden Verhältnisse liefern. Im §3 wenden wir diese Konstruktionen auf den Torus T an, dessen Charaktergruppe von der Menge der Weil-q-Zahlen erzeugt ist. Wir zeigen, daß dieser Torus so einfache Kohomologie hat, daß die so konstruierte Gerbe $\mathcal{P}$, wie auch die zu (T, μ) assoziierten Homomorphismen $\psi_{T,\mu} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{G}_T$ eindeutig charakterisiert werden können. Die Abschnitte 2 und 3 liefern die Basis für die Formulierung unserer Vermutung. Die Vermutung über die Reduktion modulo p einer Shimuravarietät $S(G, h)$ ist zu Beginn des §5 formuliert. Dort erklären wir auch genau, welche Bedingungen wir an G und an die Primzahl p stellen. Der Rest des §5 ist dem Beweis der Sätze 5.21 und 5.25 gewidmet, die den Übergang von der Vermutung zur Formel (1.1) gestatten. Breiter Raum wird dabei der Definition der Kottwitz-Invariante gewidmet. Die restlichen Abschnitte sind von weniger zentralen Interesse für unsere Arbeit. Im §4 zeigen wir unter Annahme der Tate- und der Hodgevermutung, daß die Gerbe, die der mittels der Standardvermutungen konstruierten Tannakakategorie $M_{\mathbf{F}}$ der Motive über endlichen Körpern entspricht, samt zusätzlicher, beispielsweise durch die verschiedenen Kohomologietheorien definierten Struktur, zur Gerbe $\mathcal{P}$ des dritten Abschnitts isomorph ist.

Dieser Abschnitt ist im wesentlichen eine etwas ausführlichere, aber immer noch skizzenhafte Darlegung des Kapitels VI. in [Sa]. Im §6 zeigen wir, daß die in §4 vorgenommene Identifizierung von Gerben die Vermutung des §5 für Shimuravarietäten, die gewisse Modulprobleme lösen, zum Beispiel für die der symplektischen Gruppe entsprechende Varietät, zur Folge hat. In diesem Abschnitt stützen wir uns auf Arbeiten von T. Zink [Z1], [Z2]. Da es sich dabei um einen konditionellen Satz handelt, haben wir uns kurz gefaßt. Wir weisen jedoch ausdrücklich auf den Beweis von Satz 6.3 hin, in dem der Satz 4.4 verwendet wird. Es ist an dieser Stelle, daß die weiter oben formulierte Kottwitz'sche Vermutung über abelsche Varietäten zum Tragen kommen sollte, so daß aus ihr die Formel (1.1) zumindest im Falle der symplektischen Gruppe folgen solle. Wir haben in der Tat den Beweis mit Absicht so geführt, daß er sich möglicherweise auf den Beweis der Formel (1.1) anwenden läßt. Im §7 führen wir zwei Beispiele an, eines, das zeigt, daß wir in der Vermutung des §5 die derivierte Gruppe als einfach-zusammenhängend annehmen müssen, und eines, das zeigt, daß im Falle schlechter Reduktion viele zulässige Homomorphismen ϕ nicht von der Form $\psi_{T,\mu}$ sind.

Zwei Fragen, die kaum zu umgehen sind, wenn man die Vermutung allgemein beweisen will, werden in dieser Arbeit nicht berührt. Erstens, wenn $G \to G'$ eine zentrale Erweiterung ist mit $G_{\mathrm{der}} = G'_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$, und wenn die Vermutung für G' gilt, gilt sie dann auch für G? Zweitens kommt es oft vor, daß eine Shimuravarietät Sh_1 auf eine natürliche Weise in eine zweite Sh_2 eingebettet ist. Das ist insbesondere so bei speziellen Punkten, für die Sh_1 null-dimensional ist. Wie spiegelt sich diese Einbettung in der Beschreibung der Reduktion der beiden Varietäten wider?

Wir bedanken uns bei Kottwitz, der uns seine Ergebnisse und Ideen mitgeteilt hat und uns seine Aufzeichnungen zur Verfügung gestellt hat. Der erste Autor hat anläßlich der Issai Schur Memorial Lecture in Tel-Aviv im May 1984 und der Ritt Lecture an der Columbia University im Februar 1985 über die vorliegenden Ergebnisse vorgetragen und bedankt sich bei den Zuhörern an beiden Orten für ihre Nachsicht und Geduld beim Vortragen eines immer noch provisorischen Stoffes. Wir danken beide der Humboldt-Stiftung für ihre Unterstützung mehrmaliger Besuche des ersten Autors in Heidelberg, während derer diese Arbeit zustande gekommen ist.

Im folgenden ist p eine feste Primzahl, $\bar{\mathbf{Q}}$ der Körper der algebraischen Zahlen, den wir in einen algebraischen Abschluß $\bar{\mathbf{Q}}_p$ von $\bar{\mathbf{Q}}_p$ eingebettet haben. Wir bezeichnen mit $\mathbf{F}$ den entsprechenden algebraischen Abschluß von $\mathbf{F}_p$.

§2. KOHOMOLOGISCHE KONSTRUKTIONEN

Dieser Abschnitt ist einigen Konstruktionen aus der Galoiskohomologie gewidmet. Zunächst erklären wir unsere Terminologie.

Es sei k ein Körper der Charakteristik Null, der für uns entweder ein globaler oder ein lokaler Körper sein wird. Es sei G eine algebraische Gruppe über einem algebraischen Abschluß $\bar{k}$. Falls $G = \operatorname{Spec} A$, $A = \Gamma(G)$, und falls $\sigma \in \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$, so heißt ein Automorphismus κ von $G(\bar{k})$ σ-linear, falls es einen σ-linearen Automorphismus κ' der Algebra A gibt, so daß

$$\kappa'(f)\big(\kappa(g)\big) = \sigma\big(f(g)\big), \quad f \in A,\ g \in G(k).$$

Das einfachste Beispiel ergibt sich durch die Aktion von $\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$ auf $G(\bar{k})$, falls G über k definiert ist. Eine Galoisgerbe über k ist eine Gruppenerweiterung

$$1 \longrightarrow G(\bar{k}) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \operatorname{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow 1$$

zusammen mit einem Schnitt $\sigma \longrightarrow g_\sigma$ für $\sigma \in \operatorname{Gal}(\bar{k}/K)$, für eine passende endliche Erweiterung K von k, so daß der σ-lineare Automorphismus

$$\kappa(\sigma) : g \longrightarrow g_\sigma g g_\sigma^{-1}, \quad g \in G(\bar{k}),$$

von einer K-Struktur auf G herrührt. Es muß außerdem für jedes $\sigma \in \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$ und jeden Repräsentanten g_σ der Automorphismus $\kappa(\sigma)$ σ-linear sein. Es ist dabei verstanden, daß die endliche Erweiterung K durch eine größere endliche Erweiterung K' ersetzt werden kann, so daß es sich in Wirklichkeit um einen Schnittkeim $\{g_\sigma\}$ für die Krulltopologie auf $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ handelt. In den Bezeichnungen lassen wir den Schnittkeim häufig weg und bezeichnen eine Galoisgerbe, manchmal auch kurz Gerbe genannt, einfach mit $\mathcal{G}$. Wir nennen G den *Kern* der Gerbe. Ein Homomorphismus von Gerben ist ein Homomorphismus der entsprechenden Erweiterungen, der die Schnittkeime ineinander überführt und dessen Einschränkung auf den Kern algebraisch ist. Ein Element g aus dem Kern definiert durch Konjugation einen Automorphismus einer Gerbe. In der Tat ist für eine genügend große endliche Erweiterung K/k das Element g K-rational.

$$g_\sigma g g_\sigma^{-1} = \sigma(g) = g,$$

so daß die Konjugation mit g den Schnittkeim erhält. Zwei Homomorphismen ϕ_1 und ϕ_2 zwischen zwei Gerben heißen *äquivalent*, falls $\phi_2 = \mathrm{ad} g \circ \phi_1$ mit g aus dem Kern der zweiten Gerbe. Wir verweisen auf den §4 für den Vergleich unserer Terminologie mit der in der Theorie der Tannakakategorien üblichen. Das einfachste Beispiel einer Gerbe wird durch eine über k definierte algebraische Gruppe G definiert, das halbdirekte Produkt

$$\mathcal{G}_G = G(\bar{k}) \rtimes \mathrm{Gal}(\bar{k}/k).$$

Eine solche Gerbe heißt *neutral*.

Wir führen zunächst einige Gerben über lokalen Körpern ein, als erste die Gewichtgerbe $\mathcal{W}$, die über $\mathbf{R}$ definiert ist. Sie ist eine Erweiterung

$$1 \to \mathbf{C}^\times \longrightarrow \mathcal{W} \to \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) \longrightarrow 1.$$

Wenn $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) = \{1, \iota\}$, dann ist $\mathcal{W}$ durch $\mathbf{C}^\times$ und $w = w(\iota)$ erzeugt, wobei

$$w(\iota)^2 = -1 \in \mathbf{C}^\times$$

und

$$wzw^{-1} = \iota(z) = \bar{z}, \quad z \in \mathbf{C}^\times.$$

Die Gruppe $\mathbf{C}^\times$ ist also als $\mathbf{G}_m(\mathbf{C})$ aufzufassen.

Als zweites führen wir die Dieudonnégerben ein. Die eigentliche Dieudonnégerbe wird sich als direkter Limes solcher Gerben erweisen. Es sei also K eine endliche Galoiserweiterung von $\mathbf{Q}_p$. Wir definieren folgendermaßen eine Erweiterung:

$$1 \to K^\times \to \mathcal{D}_K^K \to \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p) \to 1.$$

Sie wird durch $K^\times$ und $d_K^K(\sigma)$ erzeugt, wobei $d_K^K(\sigma) \to \sigma, d_K^K(\sigma)z = \sigma(z)d_K^K(\sigma), z \in K^\times$, und $d_K^K(\varrho)d_K^K(\sigma) = d_{\varrho,\sigma}^K d_K^K(\varrho\sigma)$. Dabei ist $d_{\varrho,\sigma}^K$ ein 2-Kozyklus in der fundamentalen Klasse der Erweiterung $K/\mathbf{Q}_p$. Die Erweiterung ist bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt, und dem Satz 90 zufolge ist dieser Isomorphismus bis auf Konjugation mit einem Element aus $K^\times$ eindeutig bestimmt.

Die Gerbe $\mathcal{D}^K$ erhalten wir durch Zurückziehen und Vorwärtsschieben mittels des Diagramms

$$\begin{tikzcd} & & & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & K^\times \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}_K^K \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p) \arrow[r] & 1 \\ & \bar{\mathbf{Q}}_p^\times & & & \end{tikzcd}$$

Die Gruppe $\bar{\mathbf{Q}}_p^\times$ ist wiederum als $\mathbf{G}_m(\bar{\mathbf{Q}}_p)$ aufzufassen.

Wir bezeichnen den Repräsentanten von σ in $\mathcal{D}^K$ mit $d_\sigma^K = d_\sigma$, und fassen $d_{\varrho,\sigma}^K$ als einen Kozyklus zur Gruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ auf. Es sei $K \subseteqq K'$. Dann gilt

$$(d_{\varrho,\sigma}^{K'})^k = d_{\varrho,\sigma}^K c_\varrho \varrho(c_\sigma) c_{\varrho\sigma}^{-1},\ k = [K' : K].$$

Wir können also einen Homomorphismus $\mathcal{D}^{K'} \to \mathcal{D}^K$ definieren, indem wir $z \in \bar{\mathbf{Q}}_p^\times$ nach z^k schicken, und $d_\varrho^{K'}$ nach $c_\varrho^{-1} d_\varrho^K$. Wegen des Satz 90 ist dieser Homomorphismus bis auf Konjugation mit einem Element aus $\bar{\mathbf{Q}}_p^\times$ eindeutig bestimmt.

Lemma 2.1. *Es sei $\phi : \mathcal{D}^K \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Gerben. Dann gibt es eine unverzweigte Erweiterung L von $\mathbf{Q}_p$, einen Homomorphismus $\psi : \mathcal{D}^L \to \mathcal{G}$, und eine Erweiterung K_1, die K und L enthält, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}^{K_1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}^L \arrow[d, "\psi"] \\ \mathcal{D}^K \arrow[r, "\phi"'] & \mathcal{G}. \end{tikzcd}$$

Es seien L die unverzweigte Erweiterung von $\mathbf{Q}_p$, deren Grad über $\mathbf{Q}_p$ gleich dem von K ist und K_1 die Zusammensetzung von L und K. Da die zwei Kozyklen $d_{\varrho,\sigma}^K$ und $d_{\varrho,\sigma}^L$ äquivalent sind, sind $\mathcal{D}^K$ und $\mathcal{D}^L$ isomorph. Der Isomorphismus ist bis auf Konjugation mit einem Element aus $\bar{\mathbf{Q}}_p^\times$ eindeutig bestimmt. Die Existenz von ψ ist deshalb klar.

Es ist klar, daß das Verfahren, mit dem wir $\mathcal{D}^K$ definiert haben, über einem beliebigen lokalen Körper verwendbar ist. Über $\mathbf{R}$ führt es zur Gruppe $\mathcal{D}^{\mathbf{C}} = \mathcal{W}$, und wir brauchen es tatsächlich nur über $\mathbf{R}$ und $\mathbf{Q}_p$. Nichtsdestoweniger der Klarheit halber werden wir die globalen Gerben dieses Abschnitts allgemeiner als eigentlich nötig einführen, und dafür brauchen wir die allgemeinen $\mathcal{D}^K$'s. Die triviale Gerbe

$$1 \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to 1$$

bezeichnen wir mit Gal_k und, wenn $k = \mathbf{Q}_l$, mit $\mathcal{G}_l$.

Es sei jetzt T ein Torus über dem endlichen Zahlkörper F, der über der Galoiserweiterung L zerfällt. Wie üblich seien

$$X^*(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbf{G}_m), \quad X_*(T) = \mathrm{Hom}(X^*(T), \mathbf{Z}).$$

Das zu $\mu \in X_*(T)$ gehörige Element aus $\mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, T)$ schreiben wir in der Form: $x \to x^\mu$. Wir fixieren im folgenden zwei Stellen ν_1 und ν_2 von F, die wir auf L erweitern. Die erweiterten Stellen werden mit ν_1' und ν_2' bezeichnet. Es seien gegeben zwei Elemente ν_1 und ν_2 aus $X_*(T)$ mit folgenden Eigenschaften:

(2.a) ν_i ist invariant unter $\mathrm{Gal}(L_{\nu_i'}/F_{\nu_i})$.

(2.b) Es gilt

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)/\mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})} \sigma\nu_1 + \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)/\mathrm{Gal}(L_{v_2'}/F_{v_2})} \sigma\nu_2 = 0.$$

Nach der Theorie von Tate-Nakayama entspricht ν_i einer Klasse α_i aus $H^2\big(\mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i})\big)\big(T(L_{v_i})\big)$. Wegen (2.b) existiert ferner eine globale Klasse aus $H^2\big(\mathrm{Gal}(L/F), T(L)\big)$, deren lokale Komponenten außerhalb v_1 und v_2 trivial sind und die in v_i gleich α_i ist. Diese globale Klasse, die allerdings nicht eindeutig definiert ist, spielt eine wichtige Rolle in der Konstruktion der T, ν_1, ν_2 zugeordneten Gerbe $\mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$. Sie wird jetzt mit Hilfe der Weilgruppe explizit eingeführt.

Die Gerbe $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$ ist eine Gerbe über F mit Kern T, folglich eine Erweiterung

$$1 \to T(\bar{F}) \to \mathcal{T} \to \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to 1.$$

Um sie zu definieren, brauchen wir einen 2-Kozyklus $\{t_{\varrho,\sigma}\}$ von $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ mit Werten aus $T(\bar{F})$. Dann ist $\mathcal{T}$ durch t_ϱ, $\varrho \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ und $T(\bar{F})$ erzeugt, und

$$t_\varrho t_\sigma = t_{\varrho,\sigma} t_{\varrho\sigma}.$$

Die Lokalisierung $\mathcal{G}_v$ von $\mathcal{G}$ an der Stelle v von F ist eine Gerbe über F_v, die durch folgendes Diagramm definiert werden kann:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v) \\
 & & & & & & \downarrow \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{G}(\bar{F}) & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathcal{G}(\bar{F}_v) & & & &
\end{array}$$

Ein Homomorphismus ϕ einer über F_v definierten Gerbe $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{G}$ ist ein Homomorphismus von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{G}_v$.

Gewöhnlicherweise ist es besser, eine endliche Erweiterung K von F derart zu wählen, daß $\mathcal{G}$ über K definiert werden kann, also durch ein Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & G(K) & \longrightarrow & \mathcal{G}_K & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(K/F) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & & & & & \\ & & G(\bar{K}) & & & & & & \end{array}$$

Wenn v_0' eine Erweiterung von v auf K ist, kann $\mathcal{G}_v$ über $K_{v_0'}$ definiert werden, und wenn K hinreichend groß ist, ist $\mathcal{H}$ auch über $K_{v_0'}$ definiert und ϕ durch $\phi : \mathcal{H}_{K_{v_0'}} \to \mathcal{G}_{K_{v_0'}}$.

Um die Wahl von v_0' zu vermeiden, können wir durch die Einbettung

$$G(K) \to \prod_{v'|v} G(K_{v'})$$

eine Erweiterung

$$1 \to \prod_{v'|v} G(_{Kv'}) \to \mathcal{G}_v^* \to \mathrm{Gal}(K/F) \to 1$$

einführen. In dem Fall, daß G über F definiert ist und $g_\sigma g g_\sigma^{-1} = \sigma(g)$, und wir intressieren uns für keinen anderen, läßt sich die Erweiterung $\mathcal{G}_v^*$ mittels $\mathcal{G}_v$ allein definieren.

In der Tat, jedem v' ordnen wir ein $\mu = \mu_{v'}$ aus $\mathrm{Gal}(K/F)$ der Art zu, daß $|\mu x|_{v'} = |x|_{v_0'}$, $x \in K$. Dann erweitert sich $\mu : x \to \mu x$ zu einem Isomorphismus $\mu : K_{v_0'} \to K_{v'}'$, der wiederum $\mu : G(K_{v_0'}) \to G(K_{v'})$ definiert. Folglich ist

$$\prod_{v'|v} G(K_{v'})$$

ein induziertes Objekt für die Gruppe $\mathrm{Gal}(K/F)$. Der Kozyklus $\{g_{\varrho,\sigma}\}$ nimmt Werte in dieser Gruppe und zwar in ihrem Zentrum an. Wir können einen zweiten Kozyklus einführen, indem wir

$$\sigma\mu = \mu'\sigma_{\mu'}, \quad \varrho\mu' = \mu''\varrho_{u''}, \quad \varrho_{\mu''}, \sigma_{\mu'} \in \mathrm{Gal}(K_{v_0'}|F_v)$$

schreiben, und

$$g'_{\varrho,\sigma} = \prod_{\mu''} \mu'' g_{\varrho_{\mu''},\sigma_{\mu'}}.$$

setzen. Es liegen μ, μ', μ'' in $\{\mu_{v'}\}$, das ein Repräsentantensystem für $\mathrm{Gal}(K_{v_0'}/K_v)$ in $\mathrm{Gal}(K/F)$ ist, und das Produkt erstreckt sich über diese Menge. Nach dem Shapirolemma angewandt auf das Zentrum sind die beiden Kozyklen $\{g_{\varrho,\sigma}\}$ und $\{g'_{\varrho,\sigma}\}$ äquivalent.

Wir können dasselbe Verfahren auf $\mathcal{H}$ anwenden, um $\mathcal{H}^*$ zu bekommen. Dann definiert $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}_v$ auch $\phi^* : \mathcal{H}^* \to \mathcal{G}_v^*$. Wenn wir das Shapirolemma nochmals anwenden, diesmal auf G, sehen wir sofort ein, daß zwei Homomorphismen ϕ, ϕ_1 dann und nur dann äquivalent sind, wenn $\phi_1^* = \operatorname{ad} g \circ \phi^*$ mit $g \in \prod_{v'|v} G(K_{v'})$.

Diese etwas umständlichen Betrachtungen werden vorgeführt, weil $\mathcal{T}$ mit Homomorphismen

$$\zeta_{v_i} : \mathcal{D}^{L_{v_i'}} \to \mathcal{T}, i = 1, 2, \quad \zeta_v : \mathrm{Gal}_{F_v} \to \mathcal{T}, v \neq v_i,$$

ausgestattet werden soll. Die Einschränkung von ζ_{v_i} auf den Kern wird durch $x \to x^{\nu_i}$ definiert. Es seien $d^1_{\varrho,\sigma}$ und $d^2_{\varrho,\sigma}$ die durch $(d^{L_{v_1'}}_{\varrho,\sigma})^{\nu_1}$ und $(d^{L_{v_2'}}_{\varrho,\sigma})^{\nu_2}$ definierten Kozyklen von $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ mit jeweiligen Werten in $\prod_{v'|v_{i'}} T(L_{v'})$.

Nach den vorangestellten Bemerkungen werden ζ_{v_i} und ζ_v definiert sein, wenn wir jedem ϱ aus $\mathrm{Gal}(L/F)$ ein Element e_ϱ aus $T(\mathbf{A}_L)$ zuordnen können, so daß

$$e_\varrho \varrho(e_\sigma) e_{\varrho\sigma}^{-1} t_{\varrho,\sigma} = d^1_{\varrho,\sigma} d^2_{\varrho,\sigma}.$$

Die Abbildung ζ_v^*, wobei v gleich v_i sein kann, erhält man, indem man e_ϱ auf $\prod_{v'|v} T(L_v)$ projiziert, um $e_\varrho(v)$ zu bekommen, und dann d_ϱ $(v = v_i)$ oder ϱ $(v \neq v_i)$ nach $e_\varrho(v) t_\varrho$ schickt.

Um den Kozyklus $\{t_{\varrho,\sigma}\}$ und die Elemente e_ϱ zu bekommen, wählen wir in der üblichen Weise [MS1] Diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & L^*_{v_i} & \longrightarrow & W_{L_{v_i}/F_{v_i}} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(L_{v_{i'}}/F_{v_i}) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & C_L & \longrightarrow & W_{L/F} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(L/F) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Wir wählen ferner wie in [MS1] Repräentantensysteme $\mathfrak{S}_i$ von $\mathrm{Gal}(L/F)/\mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i})$ mit $1 \in \mathfrak{S}_i$. Schließlich wählen wir Repräsentanten $\omega_\sigma \in W_{L_{v_i'}/F_{v_i}}$ von $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i})$ und $\omega_\mu \in W_{L/F}$ von $\mu \in \mathfrak{S}_i$ mit $\omega_1 = 1$ in beiden Fällen und setzen

$$\omega_{\mu\sigma} = \omega_\mu \omega_\sigma,\ \mu \in \mathfrak{S}_i,\ ,\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i}).$$

Diese Repräsentanten sowie der entsprechende durch die Gleichungen

$$\omega_\varrho \omega_\sigma = A_{\varrho,\sigma}(i) \omega_{\varrho\sigma},\ \varrho, \sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)$$

definierte Kozyklus hängen von i ab. Es gelten folgende Bedingungen:

(i) $A_{\varrho,\sigma}(i) = d^{L_{v_i'}}_{\varrho,\sigma}, \quad \varrho, \sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i})$,

(ii) $A_{\mu,\sigma}(i) = 1, \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i}),\ \mu \in \mathfrak{S}_i$,

(iii) $A_{\mu\varrho,\sigma}(i) = \mu A_{\varrho,\sigma}(i) \in \mu(L_{v_{i'}}), \quad \varrho, \sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i}),\ \mu \in \mathfrak{S}_i$.

Um $d^i_{\varrho,\sigma}$ zu definieren, brauchen wir ein Repräsentantensystem von $\mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i})$. Wir nehmen die ω_σ.

Es sei

$$\eta = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})/\mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})} \sigma\nu_1 = -\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})/\mathrm{Gal}(L_{v_2'}/F_{v_2})} \sigma\nu_2.$$

Die Kozyklen $\{A_{\varrho,\sigma}(1)\}$ und $\{A_{\varrho,\sigma}(2)\}$ sind kohomolog. Es gelte

$$A_{\varrho,\sigma}(1)A_{\varrho,\sigma}^{-1}(2) = B_\varrho \varrho(B_\sigma)B_{\varrho\sigma}^{-1},$$

mit $B_\varrho \in C_L$. Dann gilt auch

$$A_{\varrho,\sigma}^{\eta}(1)A_{\varrho,\sigma}^{-\eta}(2) = B_\varrho^{\eta}\varrho(B_\sigma)^{\eta}B_{\varrho\sigma}^{-\eta}. \tag{2.c}$$

Wir führen folgende Elemente aus $C_L \otimes X_*(T)$ ein:

$$C_\varrho(i) = \prod_{\mu \in \mathfrak{S}_i} A_{\varrho,\mu}^{-\varrho\mu\nu_i}(i); \qquad E_\varrho = C_\varrho(1)C_\varrho(2)B_\varrho^{\eta}.$$

Eine leichte Rechnung zeigt, daß

$$E_\varrho \varrho(E_\sigma)E_{\varrho\sigma}^{-1} = d_{\varrho,\sigma}^1 d_{\varrho,\sigma}^2, \quad \varrho,\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F). \tag{2.d}$$

Diese Gleichung gewinnt erst einen Sinn, wenn man bemerkt, daß

$$\prod_{v'|v_i} T(L_{v'}) \hookrightarrow C_L \otimes X_*(T).$$

Der Rand von $C_\varrho(i)$ ist nämlich

$$\{\prod_\mu A_{\varrho,\mu}^{-\varrho\mu\nu_i}\}\,\{\prod_\mu \varrho A_{\sigma,\mu}^{-\varrho\sigma\mu\nu_i}A_{\varrho\sigma,\mu}^{\varrho\sigma\mu\nu_i}\}$$

oder

$$A_{\varrho,\sigma}^{\pm\eta}(i)\prod_\mu A_{\varrho,\mu}^{-\varrho\mu\nu_i}(i)A_{\varrho,\mu\sigma_\mu}^{\varrho\mu\nu_i}(i),$$

mit Vorzeichen gleich $(-1)^i$. Es gilt ferner

$$\prod_\mu A_{\varrho,\mu}^{-\varrho\mu\nu_i}(i)A_{\varrho,\mu\sigma_\mu}^{\varrho\mu\nu_i}(i) = \prod_\mu A_{\varrho\mu,\sigma_\mu}^{\varrho\mu\nu_i}(i) = \prod_{\mu'} \mu' A_{\varrho\mu',\sigma_\mu}^{\mu'\nu_i}(i) = d_{\varrho,\sigma}^i.$$

Damit folgt (2.d) aus (2.c).

Die Elemente $d_{\varrho,\sigma}^i$ gehören schon zu $\prod_{v'|v_i} T(L_{v'}) \subsetneqq T(\mathbf{A}_L)$. Wir liften E_ϱ nach $e_\varrho \in T(\mathbf{A}_L)$ und erhalten somit aus (2.d) Gleichungen

$$e_\varrho \varrho(e_\sigma)e_{\varrho\sigma}^{-1}t_{\varrho,\sigma} = d_{\varrho,\sigma}^1 d_{\varrho,\sigma}^2$$

mit $t_{\varrho,\sigma} \in T(L)$.

Es muß jetzt nachgeprüft werden, daß $\mathcal{T}$ mit den zusätzlichen lokalen Homomorphismen von sämtlichen während seiner Konstruktion getroffenen Wählen unabhängig ist, wobei zu bemerken ist, daß eine Abänderung von e_ϱ in $f\varrho(f^{-1})e_\varrho$, $f \in T(\mathbf{A}_L)$ zulässig ist, denn die lokalen Homomorphismen werden dabei durch äquivalente ersetzt.

Diese Wählakte zählen wir zunächst auf: (i) die Liftungen e_ϱ von E_ϱ: (ii) die berandende Kokette $\{B_\varrho\}$; (iii) das Repräsentantensystem $\mathfrak{S}_i$ und die Repräsentanten ω_μ; (iv) die Einbettung $W_{L_{v_i'}/F_{v_i}} \to W_{L/F}$ und die Repräsentanten ω_ϱ, $\varrho \in \mathrm{Gal}(L_{v_i'/F_{v_i}})$; (v) die v_i teilende Stelle v_i'.

(i) Wenn wir e_ϱ durch $e'_\varrho = s_\varrho e_\varrho$ ersetzen, erhalten wir den Kozyklus

$$t'_{\varrho,\sigma} = s_\varrho^{-1}\varrho(s_\sigma)^{-1}s_{\varrho\sigma}t_{\varrho,\sigma}.$$

Der durch $t'_\varrho \to S_\varrho^{-1}t_\varrho$ definierte Homomorphismus überträgt die gestrichenen lokalen Homomorphismen in die ungestrichenen.

(ii) Wenn wir B_ϱ durch $F\varrho(F^{-1})B_\varrho$ ersetzen, wird E_ϱ durch $E_\varrho F^\eta \varrho(F^{-\eta})$ ersetzt. Wir können also e_ϱ durch $e_\varrho f \varrho(f^{-1})$ ersetzen, wobei f eine Liftung von F^η ist. Somit bleibt $\{t_{\varrho,\sigma}\}$ erhalten.

(iii) Die Repräsentanten ω_μ, $\mu \in \mathfrak{S}_1$, können wir durch $b_\mu\omega_\mu$ ersetzen. Dann wird allgemein ω_σ durch $b_\sigma\omega_\sigma$ ersetzt, wobei $b_{\mu\varrho} = b_\mu,\ \mu \in \mathfrak{S}_1,\ \varrho \in \mathrm{Gal}(L_{v_{i'}}/F_{v_1})$. Wir hätten ferner

$$B'_\varrho = b_\varrho B_\varrho$$

statt B_ϱ und

$$\begin{aligned} C_{\varrho'}(1) &= C_\varrho(1).\prod_\mu b_\varrho^{-\varrho\mu\nu_1}\varrho(b_\mu)^{-\varrho\mu\nu_1}b_{\varrho\mu}^{\varrho\mu\nu_1} \\ &= C_\varrho(1)b_\varrho^{-\eta}F\varrho(F)^{-1} \end{aligned}$$

mit

$$F = \prod_\mu b_\mu^{\mu\nu_i},$$

denn

$$b_{\varrho\mu}^{\varrho\mu\nu_i} = b_\mu^{\mu'\nu_i},$$

wenn $\varrho\mu = \mu'\varrho_{\mu'}, \varrho_{\mu'} \in \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})$. Daher können wir e_ϱ durch $e_\varrho f\varrho(f^{-1})$ mit f einer Liftung von F ersetzen, und $t_{\varrho,\sigma}$ bleibt dabei erhalten.

Das Repräsentantensystem $\{\mu\}$ können wir durch $\{\mu' = \mu\sigma(\mu)\}$ ersetzen, wobei $\sigma(\mu) \in \mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i})$. Wir wählen $\omega'_{\mu'} = \omega_{\mu'} = \omega_\mu\omega_{\sigma(\mu)}$. Dann gilt allgemein

$$\omega'_{\mu'\sigma} = \omega_\mu\omega_{\sigma(\mu)}\omega_\sigma = \mu\big(A_{\sigma(\mu),\sigma}(1)\big)\omega_{\mu'\sigma}, \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1}).$$

Wir setzen

$$b_{\mu'\sigma} = \mu A_{\sigma(\mu),\sigma}(1).$$

Es liegt in $\mu(L_{v_i'})$. Der neue Kozyklus ist

$$A'_{\varrho,\sigma}(1) = \varrho(b_\sigma) b_\varrho b_{\varrho\sigma}^{-1} A_{\varrho,\sigma}(1).$$

Es gilt ferner

$$\begin{aligned} C'_\varrho(1) &= \prod_{\mu'} A'_{\varrho,\mu'}(1)^{-\varrho\mu'\nu_1} \\ &= \{\prod_\mu A_{\varrho,\mu\sigma(\mu)}(1)^{-\varrho\mu\nu_1}\}\{\prod_\mu \big(b_\varrho b_{\varrho\mu'}^{-1}\varrho\mu(A_{\sigma(\mu),1})\big)^{-\varrho\mu\nu_1}\}. \end{aligned}$$

Der zweite Faktor ist gleich

$$\prod (b_\varrho b_{\varrho\mu'}^{-1})^{-\varrho\mu\nu_1},$$

denn $A_{\sigma(\mu),1} = 1$. Der erste ist

$$C_\varrho(1) \cdot \prod_\mu A_{\varrho\mu,\sigma(\mu)}^{-\varrho\mu\nu_1}.$$

Folglich ist

$$E'_\varrho = E_\varrho\{\prod_\mu A_{\varrho\mu,\sigma(\mu)}^{-\varrho\mu\nu_1} b_{\varrho\mu'}^{\varrho\mu\nu_1}\},$$

wenn $B'_\varrho = b_\varrho B_\varrho$. Der zweite Faktor liegt in $\prod_{v'|v_1} T(L_{v'})$ und wird deshalb automatisch geliftet.

Es unterscheiden sich also $t'_{\varrho,\sigma}$ und $t_{\varrho,\sigma}$ nur um ein Element aus $\prod_{v'|v_1} T(L_{v'})$. Da $t_{\varrho,\sigma}$ und $t'_{\varrho,\sigma}$ in $T(L)$ liegen, gilt $t_{\varrho,\sigma} = t'_{\varrho,\sigma}$. Es unterscheiden sich auch e'_ϱ und e_ϱ nur um ein Element aus $\prod_{v'|v_1} T(L_{v'})$. Folglich sind die lokalen Homomorphismen außerhalb der Stelle v_1 gleich. Um zu zeigen, daß sie auch in v_1 gleich sind, genügt es zu zeigen, daß die Projektion von

$$\prod_\mu A_{\varrho\mu,\sigma(\mu)}^{-\varrho\mu\nu_1} b_{\varrho\mu}^{\varrho\mu\nu_1}$$

auf $T(L_{v_1'})$ gleich 1 ist, wenn $\varrho \in \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})$. Das einzige Glied des Produkts, das zu dieser Projektion beiträgt, ist das $\mu = 1$ entsprechende, und es ist 1, denn $\sigma(1) = 1$ und

$$A_{\varrho\mu,1} = 1,\ b_\varrho = 1.$$

(iv) Die Einbettung $\phi : W_{L_{v_1'}/F_{v_1}} \to W_{L/F}$ können wir nur abändern, indem wir ϕ durch $\mathrm{ad}x \circ \phi$ ersetzen, $x \in C_L$. Wir können also ω_σ durch $x\sigma(x^{-1})\omega_\sigma$ für jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)$ ersetzen. Alle Kozyklen bleiben dabei erhalten.

Wenn wir ω_ϱ durch $b_\varrho\omega_\varrho, b_\varrho \in L_{v_1'}^\times$ ersetzen, können wir ω_μ behalten, so daß $A_{\varrho,\sigma}(1)$ durch

$$A'_{\varrho,\sigma}(1) = A_{\varrho,\sigma}(1) b_\varrho \varrho(b_\sigma) b_{\varrho\sigma}^{-1}$$

ersetzt wird, wobei

$$b_{\mu\varrho} = \mu(b_\varrho), \quad \varrho \in \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1}).$$

Da $\mu(b_\varrho) \in \mu(L_{v_1'})$ liegt, hat diese Abänderung keinen Einfluß, weder auf $t_{\varrho,\sigma}$ noch auf die lokalen Homomorphismen außerhalb v_1. Daß die Abänderung auch keinen Einfluß auf die Äquivalenzklasse von ζ_{v_1} hat, prüft man leich nach, wenn man darauf achtet, daß der auf $\mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})$ abgeänderte Kozyklus auch in der Definition von $\mathcal{D}^{L_{v_1'}}$ auftritt. Die Repräsentanten $\omega_\sigma, \sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})$ werden nämlich durch $\omega_{\sigma'} = b_\sigma\omega_\sigma$ ersetzt, und die Projektion von e_σ auf $T(L_{v_1'})$ mit b_σ^η multipliziert.

(v) Die letzte zu behandelnde Willkürlichkeit ist die Wahl von v_1'. Jede andere v_1 teilende Stelle v_1'' von L bekommt man, indem man $\lambda \in \mathfrak{S}_1$ wählt und v_1'' durch

$$|\lambda x|_{v_1''} = |x|_{v_1'}$$

definiert. Dann ist

$$\mathrm{Gal}(L_{v_1''}/F_{v_1}) = \lambda \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})\lambda^{-1}.$$

Dementsprechend erhalten wir die der Stelle v_1'' entsprechenden Kozyklen und Objekte, indem wir mit λ konjugieren. Zum Beispiel

$$A'_{\varrho,\sigma}(1) = \lambda\big(A_{\lambda^{-1}\varrho\lambda,\lambda^{-1}\sigma\lambda}(1)\big).$$

Dieser Kozyklus ist dem alten kohomolog und eine leichte Rechnung ergibt

$$A'_{\varrho,\sigma}(1) = A_{\varrho,\sigma}(1)D_\varrho \varrho(D_\sigma)D_{\varrho\sigma}^{-1}$$

mit

$$D_\varrho = \lambda\big(A^{-1}_{\lambda^{-1},\varrho\lambda}(1)\big)A^{-1}_{\varrho,\lambda}(1)A_{\lambda,\lambda^{-1}}(1).$$

Es gilt ferner, wenn wir $A'_{\varrho,\sigma}(1)$ zu $A'_{\varrho,\sigma}$ abkürzen,

$$C'_\varrho(1) = \prod_\mu (A_{\varrho,\lambda\mu\lambda^{-1}})^{-\varrho\lambda\mu\nu_1},$$

denn $\nu_1' = \lambda\nu_1$. Es sei $\lambda\mu = \mu'\lambda_{\mu'}$ mit $\mu' \in \mathfrak{S}_1$ und $\lambda_{\mu'} \in \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A_{\varrho,\lambda\mu\lambda^{-1}} &= A_{\varrho,\mu'\lambda_{\mu'}\lambda^{-1}} \\ &= \varrho(A'_{\mu',\lambda_\mu,\lambda^{-1}})^{-1}A'_{\varrho,\mu'}A'_{\varrho\mu',\lambda_{\mu'}\lambda^{-1}}, \end{aligned}$$

und

$$A'_{\varrho,\mu'} = A_{\varrho,\mu'}\varrho(D_{\mu'})D_\varrho D^{-1}_{\varrho\mu'}.$$

Hieraus schließen wir sofort, daß E'_ϱ und E_ϱ sich um den Faktor

$$\text{(2.e)} \qquad \{\prod_\mu \varrho(A_{\mu,\lambda_\mu\lambda^{-1}})^{\varrho\mu\nu_1}\}\ \{\prod_\mu A'_{\varrho\mu,\lambda_\mu\lambda^{-1}}\}^{-\varrho\mu\nu_1}\{\prod_\mu \varrho(D_\mu)^{-\varrho\mu\nu_1}D_{\varrho\mu}^{\varrho\mu\nu_1}\}$$

unterscheiden, wo wir μ statt μ' schreiben.

Wir betrachten

(2.f) $$\prod_{\mu}(A'_{\varrho\mu,\lambda_\mu\lambda^{-1}}D^{-1}_{\varrho\mu})^{\varrho\mu\nu_1},$$

das von ϱ abhängt und zeigen, daß es sich als ein Produkt

$$\varrho(X)YZ_\varrho$$

darstellen läßt, wobei X und Y von ϱ unabhängig sind, und Z_ϱ in $\prod_{v'|v_1} T(L_{v'})$ liegt. Dann ist (2.e) gleich

$$\varrho(Y)Y^{-1}\varrho(Z_1)Z_\varrho^{-1},$$

woraus sofort folgt, daß $\{t_{\varrho,\sigma}\}$ erhalten bleibt, sowie die lokalen Homomorphismen außerhalb v_1.

Statt (2.f) behandeln wir

(2.g) $$A'_{\varrho\mu,\lambda_\mu\lambda^{-1}}D^{-1}_{\varrho\mu}$$

und schreiben es als

$$\varrho(X_\mu)Y_{\mu'}Z_{\mu,\varrho}.$$

Hier ist $\varrho\mu = \mu'\varrho_{\mu'}$, $\varrho_{\mu'} \in \mathrm{Gal}(L_{v_1'/F_{v_1}})$. Der Ausdruck (2.g) gleicht

$$A_{\varrho\mu,\lambda_\mu\lambda^{-1}}\varrho\mu(D_{\lambda_\mu\lambda^{-1}})D^{-1}_{\varrho\mu\lambda_\mu\lambda^{-1}},$$

das wir entwickeln, um ein Produkt mit sieben Gliedern zu bekommen

$$A_{\varrho\mu,\lambda_\mu\lambda^{-1}}\varrho\mu\lambda(A^{-1}_{\lambda^{-1}\lambda_\mu})\varrho\mu(A^{-1}_{\lambda_\mu\lambda^{-1},\lambda})\varrho\mu(A_{\lambda,\lambda^{-1}})\lambda(A_{\lambda^{-1},\varrho\mu\lambda_\mu})A_{\varrho\mu\lambda_\mu\lambda^{-1},\lambda}A^{-1}_{\lambda,\lambda^{-1}}.$$

Wir setzen

$$X_\mu = \mu\lambda(A^{-1}_{\lambda^{-1},\lambda_\mu})\mu(A_{\lambda,\lambda^{-1}}).$$

Aus dem gesamten Produkt schneiden wir

$$A_{\varrho\mu,\lambda_\mu\lambda^{-1}}\varrho\mu(A^{-1}_{\lambda_\mu\lambda^{-1},\lambda}) = A_{\varrho\mu\lambda_\mu\lambda^{-1},\lambda} = A_{\varrho\mu,\lambda_\mu}$$

heraus und fügen es $Z_{\mu',\varrho}$ zu. Das Glied $A^{-1}_{\lambda,\lambda^{-1}}$ wird $Y_{\mu'}$ beigefügt. Es bleibt übrig

$$\begin{aligned}\lambda(A_{\lambda^{-1},\varrho\mu\lambda_\mu}) &= \lambda(A_{\lambda^{-1},\mu'\varrho_{\mu'},\lambda_\mu})\\ &= A^{-1}_{\mu',\varrho_{\mu'}\lambda_\mu}\lambda(A_{\lambda^{-1}\mu',\varrho_{\mu'}\lambda_\mu})\lambda(A_{\lambda^{-1},\mu'}).\end{aligned}$$

Hiervon bekommt $Z_{\mu,\varrho}$ das Produkt

$$A^{-1}_{\mu',\varrho_{\mu'}\lambda_\mu}\lambda(A_{\lambda^{-1}\mu',\varrho_{\mu'}\lambda_\mu}) = \lambda(A_{\lambda^{-1}\mu',\varrho_{\mu'}\lambda_\mu})$$

und $Y_{\mu'}$ das Glied $\lambda(A_{\lambda^{-1},\mu'})$.

Wie schon hervorgehoben, müssen wir, um die Äquivalenz der Homomorphismen in v_1 zu zeigen, nur die Homomorphismen von $\mathcal{D}^{L_{v_1''}}$ nach $\mathcal{T}$ betrachten. Der durch v_1'' definierte Homomorphismus entspricht dem Kozyklus $A'_{\varrho,\sigma}(1), \varrho, \sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_1''}/F_{v_1})$. Der durch v_1' definierte entspricht der Projektion von $d^1_{\varrho,\sigma}$ auf $T(L_{v_1''}), \varrho, \sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_1''}/F_{v_1})$. Da $\varrho\lambda = \lambda\lambda^{-1}\varrho\lambda = \lambda\varrho_\lambda,\ \varrho \in \mathrm{Gal}(L_{v_1''}/F_{v_1})$, ist diese Projektion nichts anderes als $A'_{\varrho,\sigma}(1)$. Bis auf einen Rand ist für $\varrho \in \mathrm{Gal}(L_{v_1''}/F_{v_1})$ die Projektion von (2.e) auf $T(L_{v_1''})$ gleich der von $\varrho(Z_1)Z_\varrho^{-1}$, die ihrerseits gleich ist

$$\varrho(A_{\lambda,1})\varrho\lambda(A_{1,1})A^{-1}_{\varrho\mu,1}\lambda(A^{-1}_{1,\varrho\lambda}) = 1,$$

denn $\lambda_\lambda = 1,\ \varrho\lambda = \lambda\varrho_\lambda$.

Es gibt noch eine Verträglichkeit nachzuprüfen, die sogar etwas ärgerlicher als die vorherigen ist. Es sei nämlich $L' \supsetneqq L$ eine zweite Galoiserweiterung von F und w_i' Primstellen von L', die v_i' teilen. Es sei

$$\nu_i' = [L_{w_i'} : L_{v_i'}]\nu_i = l_i\nu_i.$$

Wir können $\mathcal{T}_{\nu_1',\nu_2'}$ samt zusätzlichen lokalen Homomorphismen einführen, und wir müssen zeigen, daß die so ausgestatteten $\mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$ und $\mathcal{T}_{\nu_1',\nu_2'}$ kanonisch isomorph sind.

Wir vereinfachen die Bezeichnungen folgendermaßen:

$$G\ = \mathrm{Gal}(L/F), \qquad G' = \mathrm{Gal}(L'/F), \qquad H = \mathrm{Gal}(L'/L),$$

$$G_i = \mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_i}), \qquad G_i' = \mathrm{Gal}(L'_{w_i'}/F_{v_i}), \qquad H_i = \mathrm{Gal}(L_{w_i'}/L_{v_i}).$$

Die Gruppe H_i ist $H \cap G_i$, und wir wählen Repräsentanten λ von H_i in H. Dann wählen wir Repräsentanten μ' von HG_i' in G'. Als Repräsentanten von G_i' in G' nehmen wir die $\mu'\lambda$. Schließlich nehmen wir die Projektionen μ der μ' auf G als Repräsentanten von G_i in G. In der Weilgruppe $W_{L'/F}$ wählen wir $\omega_{\mu'\lambda} = \omega_{\mu'} \cdot \omega_\lambda$ mit $\omega_\lambda \in w_{L'/L}$. Wir wählen auch Rechtsrepräsentanten ν von H_i in G_i' und setzen

$$\omega_{\gamma\nu} = \omega_\gamma\omega_\nu,\ \gamma \in H_i.$$

Dann gilt

$$\omega_{\lambda\cdot\gamma}\omega_\nu := \omega_\lambda \cdot \omega_\gamma \cdot \omega_\nu = \omega_{\lambda\gamma\nu},$$

so daß

$$A_{\gamma,\nu} = 1,$$

wenn γ in H und ν in dem Rechtsrepräsentantensystem enthalten sind.

Es sei

$$D_{\varrho'}(i) = \prod_{\gamma\in H} A_{\varrho',\gamma}(i).$$

Wir betrachten den Kozyklus

$$A'_{\varrho',\sigma'}(i) = A^l_{\varrho',\sigma'}(i) D^{-1}_{\varrho'}(i) \varrho'\big(D^{-1}_{\sigma'}(i)\big) D_{\varrho'\sigma'}(i)$$

mit $l = [H : 1]$. Man rechnet leicht nach, daß er gleich ist

$$\prod_\gamma A^{-1}_{\varrho',\gamma} A_{\varrho',\sigma',\gamma}.$$

Folglich hängt er nur von der Projektion σ von σ' auf G ab und ist 1, falls $\sigma' \in H$.

Wir zeigen zunächst, daß

(2.h) $\qquad A'_{\varrho',\sigma'}(i) = 1,$

wenn $\varrho' \in H$ und $\sigma' \in HG'_i$. Das Element $\sigma'\gamma$ läßt sich als $\delta\nu$ schreiben mit $\delta \in H$ und ν aus dem Rechtsrepräsentantensystem. Dann gilt

$$A'_{\varrho',\sigma',\gamma}(i) = \varrho'\big(A'_{\delta,\nu}(i)\big)^{-1} A'_{\varrho'\delta,\nu}(i) A'_{\varrho',\delta}(i) = A'_{\varrho',\delta}(i).$$

Folglich

$$\prod_\gamma A_{\varrho',\sigma'\gamma}(i) = \prod_\delta A'_{\varrho',\delta}(i).$$

Da δ auch H durchläuft, ist (2.h) gültig.

Aus der Kozykelbedingung schließen wir, daß $A'_{\varrho',\sigma'}(i)$ nur von den Projektionen ϱ, σ abhängt und in C_L enthalten ist, wenn ϱ', σ' in HG'_i liegen. Es liegt in der Tat in $L_{v'_i} = C_L \cap \prod_{w'|v'_i} L'_{w'}$, denn

$$A'_{\varrho',\sigma'}(i) = \prod_\gamma A^{-1}_{\varrho',\gamma} A_{\varrho',\sigma'\gamma} = \prod_\gamma A^{-1}_{\varrho',\gamma}\ A_{\varrho',\gamma\nu}$$

mit $\nu = \nu(\sigma)$. Die rechte Seite ist selbst gleich

$$\prod_\gamma \varrho'(A^{-1}_{\gamma,\nu}) A_{\varrho'\gamma,\nu} = \prod_\gamma A_{\varrho'\gamma,\nu},$$

und $\varrho'\gamma \in HG'_i$.

Da die Kozyklen $A^l_{\varrho',\sigma'}$ und $A_{\varrho,\sigma}$ sowieso kohomolog sind, können wir $A_{\varrho,\sigma}$ so wählen, daß

$$A_{\varrho,\sigma} = A'_{\varrho',\sigma'},\ \varrho', \sigma' \in HG'_i.$$

Es gibt im allgemeinen eine Kokette $B_{\varrho'}(i)$, so daß

$$A^l_{\varrho',\sigma'}(i) = A_{\varrho,\sigma}(i) B_{\varrho'}(i) \varrho'\big(B_{\sigma'}(i)\big) B^{-1}_{\varrho'\sigma'}(i).$$

Das Produkt $B_{\varrho'}(i)D_{\varrho'}^{-1}(i)$ ist ein Kozyklus auf HG'_i. Folglich ist

$$B_{\varrho'}(i) = D_{\varrho'}(i)F'\varrho'(F')^{-1}, \quad F' \in C_{L'}.$$

Weil wir $B_{\varrho'}(i)$, $\varrho' \in G'$, durch

$$B_{\varrho'}(i){F'}^{-1}\varrho'(F')$$

ersetzen können, können wir annehmen, daß

$$B_{\varrho'}(i) = D_{\varrho'}(i), \quad \varrho' \in HG'_i.$$

Nachdem wir die auftretenden Kozyklen und Koketten sorgfältig und zweckmäßig gewählt haben, werden wir jetzt die erwünschte Verträglichkeit ohne allzu große Mühe nachprüfen können.

Es gilt

$$\sum_{G'|G'_1} \sigma\nu'_1 = \eta' = l\eta.$$

Wenn

$$A_{\varrho',\sigma'}(1)A_{\varrho',\sigma'}^{-1}(2) = B_{\varrho'}\varrho'(B_{\sigma'})B_{\varrho'\sigma'}^{-1},$$

dann ist der Rand von $B_{\varrho'}^l$ gleich dem von $B_\varrho B_{\varrho'}(1)B_{\varrho'}^{-1}(2)$. Folglich gilt

$$B_{\varrho'}^l = B_\varrho B_{\varrho'}(1)B_{\varrho'}^{-1}(2)F'\varrho(F')^{-1}, \; F' \in C_{L'}.$$

Wir rechnen zunächst $C_{\varrho'}(i)$ aus, wobei wir z.T. das i fallen lassen.

$$\begin{aligned} C_{\varrho'}(i) &= \prod_{\mu'}\prod_{\lambda} A_{\varrho',\mu'\lambda}^{-\varrho\mu'\lambda\nu'_i} \\ &= \prod_{\mu'}\prod_{\lambda}\{\varrho'(A_{\mu',\lambda}^{\varrho\mu'\lambda\nu'_i})A_{\varrho',\mu',\lambda}^{-\varrho\mu'\lambda\nu'_i}A_{\varrho',\mu'}^{-\varrho\mu'\nu_i}\} \\ &= \prod_{\mu',\lambda}\{A_{\varrho'\mu,\lambda}^{-\varrho\mu'\lambda\nu'_i}A_{\varrho',\mu'}^{-\varrho\mu'\nu'_i}\}. \end{aligned}$$

Wir entwickeln

$$\prod_{\mu',\lambda'} A_{\varrho',\mu'}^{-\varrho\mu'\nu'_i}$$

als

$$\{\prod_{\mu} A_{\varrho,\mu}^{-\varrho\mu\nu_i}\}\{\prod_{\mu'} B_{\varrho'}(i)^{-\varrho\mu'\nu_i}\varrho'\big(B_{\mu'}(i)\big)^{-\varrho\mu'\nu_i}B_{\varrho'\mu'}(i)^{\varrho\mu'\nu_i}\}$$

und bemerken, daß

$$\prod_{\mu'} B_{\varrho'}(i)^{-\varrho\mu'\nu_i} = B_{\varrho'}(i)^{(-1)^i\eta}.$$

Wir schließen aus diesem Gleichungen, daß $E_{\varrho'}$ das Produkt ist von E_ϱ, einem Rand, und den Ausdrücken

(2.i) $$\{\prod_{\mu',\lambda} A_{\varrho'\mu',\lambda}^{-\varrho\mu'\nu_i'}\}\{\prod_{\mu'}\varrho\big(B_{\mu'}(i)\big)^{-\varrho\mu'\nu_i} B_{\varrho'\mu'}(i)^{\varrho\mu'\nu}\},\ i=1,2.$$

Diesen Ausdruck multiplizieren wir mit dem Rand

$$\varrho(\prod_{\mu'} B_{\mu'}(i)^{\mu'\nu_i})\prod_{\mu'} B_{\mu'}(i)^{-\mu'\nu_i}$$

und erhalten

$$\{\prod_{\mu',\lambda} A_{\varrho'\mu',\lambda}^{-\varrho\mu'\nu_i'}\}\{\prod_{\mu'} B_{\varrho'\mu'}(i)^{\varrho\mu'\nu_i} B_{\mu'}(i)^{-\mu'\nu_i}\}.$$

Es sei $\varrho'\mu' = \mu_1'\varrho'_{\mu_1'}$, $\varrho'_{\mu_1'} \in HG_i'$. Es gelten

$$B_{\varrho'\mu'}(i)B_{\mu_1'}(i)^{-1} = A_{\mu_1',\varrho'_{\mu_1'}} A^{-1}_{\mu_1',\varrho'_{\mu_1'}}\mu_1'\big(B_{\varrho'_{\mu_1'}}(i)\big) = \mu_1'\big(B_{\varrho'_{\mu_1'}}(i)\big)$$

und

$$A_{\mu_1'\varrho'_{\mu_1'},\lambda}(i) = \mu_1'\big(A_{\varrho'_{\mu_1},\lambda}(i)\big)\, A_{\mu_1',\varrho_{\mu_1'}}\lambda(i)A^{-1}_{\mu_1',\varrho_{\mu_1'}}(i) = \mu_1'\big(A_{\varrho_{\mu_1'},\lambda}(i)\big).$$

Infolgedessen ist (2.i) durch

(2.j) $$\{\prod_{\mu',\lambda}\mu'\big(A_{\varrho'_{\mu'},\lambda}(i)\big)^{-\mu'\nu_1'}\}\{\prod_{\mu'}\mu'\big(B_{\varrho'_{\mu'}}(i)\big)^{\mu'\nu_1}\}$$

zu ersetzen. Wir schreiben hier μ' statt μ_1', um die Bezeichnung zu entlasten. Das Element $\varrho'_{\mu'}$ liegt in HG_i', so daß

$$\begin{aligned} B_{\varrho'_{\mu'}}(i) &= \prod_{\gamma\in H} A_{\varrho'_{\mu'},\gamma}(i) \\ &= \prod_{\lambda}\prod_{\gamma\in H_i} A'_{\varrho'_{\mu'},\lambda\gamma}(i) \\ &= \prod_{\lambda}\prod_{\gamma} A_{\varrho'_{\mu'},\lambda,\gamma}(i)A_{\varrho'_{\mu'},\lambda}(i). \end{aligned}$$

Da $[H_i:1]=l_i$ und $\nu_i' = l_i\nu_i$, folgern wir hieraus, daß (2.j) gleich ist

(2.k) $$\textstyle\prod_{\mu',\lambda,\gamma}\mu'(A_{\varrho'_{\mu'}\lambda,\gamma})^{\mu'\nu_i},$$

das in $\prod_{w'|v_i} T(L'_{w'})$ liegt. Es ergibt sofort die Gleichung

(2.l) $$t_{\varrho',\sigma'} = t_{\varrho,\sigma},\quad \varrho',\sigma' \in \mathrm{Gal}(L'/F),$$

denn $t_{\varrho,\sigma}^{-1}t_{\varrho',\sigma'}$ ist einerseits in $T(L')$ erhalten und andererseits in

$$\prod_{w'|v_1} T(L'_{w'})\prod_{w'|v_2} T(L'_{w'}).$$

Es ist auch klar, daß die lokalen Homomorphismen außerhalb v_1 un v_2 äquivalent sind. Wir wollen auch zeigen, daß z.B.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^{L'_{w'_1}} & \longrightarrow & \mathcal{T}'_{\nu'_1,\nu'_2} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{D}^{L_{v'_1}} & \longrightarrow & \mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}. \end{array}$$

kommutativ ist. Rechts steht der aus (2.e) hervorgehende Isomorphismus. Auf dem Kern von $\mathcal{D}^{L'_{v'_1}}$ ist die Kommutativität allerdings klar. Was sonst in Betracht kommt, ist die Projektion von (2.k) auf $T(L'_{w'_1})$, nämlich

$$\prod_{\gamma\in H_1} A^{\nu_1}_{\varrho',\gamma}(1) = G^{\nu_1}_{\varrho'}.$$

Daher genügt es, folgende Gleichung zu zeigen:

$$A'_{\varrho',\sigma'}(1) = A^{l_1}_{\varrho',\sigma'}(1)G^{-1}_{\varrho'}\varrho'(G_{\sigma'})^{-1}G_{\varrho',\sigma'}, \quad \varrho',\sigma' \in G'_1,$$

wobei beide Ausdrücke in der Gruppe $L'^{\times}_{w'_1}$ enthalten sind.

Wir haben schon gesehen, daß

$$\begin{aligned} A'_{\varrho',\sigma'}(1) &= \prod_{\gamma\in H} A^{-1}_{\varrho',\gamma}(1)A_{\varrho',\sigma'\gamma}(1) \\ &= \prod_{\gamma} A^{-1}_{\varrho',\gamma}(1)A_{\varrho',\gamma\nu}(1), \end{aligned}$$

wobei ν der Repräsentant von σ' im Rechtsrepräsentantensystem ist. Wir haben auch gesehen, daß rechts stehende Produkt gleich $\prod_\gamma A_{\varrho',\gamma,\nu}(1)$ ist. Wir interessieren uns für dieses Produkt als ein Element aus $L'_{w'_1}$, so daß wir es auf die entsprechende Koordinate projizieren und

$$\prod_{\gamma\in H_1} A_{\varrho'\gamma,\nu}(1)$$

bekommen. Dieses Produkt ist wiederum gleich

$$\prod_{\gamma\in H_1} A^{-1}_{\varrho',\sigma'}(1)A_{\varrho',\sigma'\gamma}(1) = A^{l_1}_{\varrho',\sigma'}(1)G^{-1}_{\varrho'}\varrho'(G^{-1}_{\sigma'})G_{\varrho'\sigma'}.$$

Die Konstruktion von $\mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$ ist offensichtlich funktoriell in T,ν_1,ν_2. Wenn wir nämlich einen über F definierten Homomorphismus $\phi : T \to T'$ und $\nu'_i = \phi(\nu_i), i = 1,2$ haben, dann bekommen wir ohne weiteres einen Homomorphismus ϕ von $\mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$ nach $\mathcal{T}_{\nu'_1,\nu'_2}$.

Wir formulieren einige der erhaltenen Resultate in einem Satz.

Satz 2.2. *Es sei T ein über F definierter Torus, der über der Galoiserweiterung L von F zerfällt. Es seien v_1 und v_2 zwei Stellen von F und v'_1 und v'_2 gewählte Erweiterungen auf L. Es seien zwei Kocharaktere ν_1 und*

ν_2 aus $X_*(T)$ gegeben, die die Bedingungen (2.a) *und* (2.b) *erfüllen. Dann definiert die obige Konstruktion eine Gerbe $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$ über F mit Kern T, die ausgestattet ist mit Homomorphismen*

$$\begin{aligned} \zeta_v &: \mathrm{Gal}_{F_v} \to \mathcal{T} \qquad v \neq v_1, v_2, \\ \zeta_{v_i} &: \mathcal{D}^{L_{v'_i}} \to \mathcal{T} \qquad i = 1, 2, \end{aligned}$$

so daß ζ_{v_i} auf dem Kern durch $x \to x^{v_i}$ gegeben ist. Diese Gerbe ist eindeutig bestimmt bis auf einen Isomorphismus, der die lokalen Homomorphismen in äquivalente überführt. Falls $L' \supsetneqq L$ eine größere Galoiserweiterung ist, auf die die Stellen v'_i in w'_i erweitert sind, so ergibt die obige Konstruktion einen Isomorphismus

$$\mathcal{T}'_{\nu_1,\nu_2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2},$$

wobei

$$\nu'_i = [L'_{w'_i} : L_{v'_i}] \cdot \nu_i \qquad i = 1, 2,$$

so daß die folgenden beiden Diagramme bis auf Äquivalenz kommutativ sind:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{T'}_{\nu_{1'},\nu'_2} \arrow[d, "\wr"] & \\ \mathrm{Gal}_{F_v} \arrow[ur, "\zeta'_v"] \arrow[dr, "\zeta_v"'] & & v \neq v_1, v_2 \\ & \mathcal{T'}_{\nu_1,\nu_2} & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}^{L'_{w'_i}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{T}'_{\nu'_1,\nu'_2} \arrow[d, "\wr"] \\ \mathcal{D}^{L_{v'_i}} \arrow[r] & \mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}. \end{tikzcd}$$

Die Konstruktion ist funktoriell in T, ν_1, ν_2.

Eine Möglichkeit, die obige Situation zu erhalten, ist, daß ν_1 und ν_2 durch Mittelung aus ein und demselben Kogewicht entstehen. Es seien also T ein Torus über F und μ ein Element aus $X_*(T)$. Wir setzen

$$\nu_i = (-1)^{i+1} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v'_i}/F_{v_i})} \sigma\mu.$$

Wir werden einen kanonischen Homomorphismus τ_μ von der entsprechenden Gerbe $\mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$ nach der neutralen Gerbe $\mathcal{G}_T$ einführen.

Vorher definieren wir in einer sehr einfachen Weise einen Homomorphismus ξ_μ von $\mathcal{D}^{L_{v'}}$ nach $\mathcal{G}_T$. Der Körper L zerfällt T, und v' ist eine Primstelle von L, die eine Primstelle v von F teilt. Es sei

$$\nu = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v'}/F_v)} \sigma\mu.$$

ξ_μ wird folgendermaßen definiert:

$$\xi_\mu(z) = z^\nu, \qquad z \in L_{v'}^\times,$$
$$\xi_\mu(d_\varrho) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v'}/F_v)} d_{\varrho,\sigma}^{\varrho\sigma\mu} \rtimes \varrho,$$

wobei $d_{\varrho,\sigma}$ der $\mathcal{D}^{L_{v'}}$ definierende Kozyklus ist, und $d_\varrho = d_\varrho^{L_{v'}}$. Man prüft leicht nach, daß ξ_μ in der Tat ein Homomorphismus ist.

Der einzuführende Homomorphismus τ_μ hat folgende Eigenschaften:

(i) $\tau_\mu \circ \zeta_{v_1}$ ist zu ξ_μ äquivalent;

(ii) $\tau_\mu \circ \zeta_{v_2}$ ist zu $\xi_{-\mu}$ äquivalent;

(iii) $\tau_\mu \circ \zeta_v$ ist die kanonische Neutralisierung von $\mathcal{G}_T$. Es wird τ_μ durch

$$\tau_\mu : t_\varrho \to s_\varrho \rtimes \varrho$$

definiert, wobei $s_\varrho \in T(L)$ und

$$s_\varrho \varrho(s_\sigma) s_{\varrho\sigma}^{-1} = t_{\varrho\sigma}.$$

Es existiert ferner $f \in T(\mathbf{A}_L)$, so daß

$$f e_\varrho s_\varrho \varrho(f^{-1}) = e'_\varrho$$

folgende Eigenschaften besitzt:

(i) die Projektion von e'_ϱ auf $L_{v'}$ ist 1, wenn v' weder v_1 noch v_2 teilt;

(ii) die Projektion von e'_ϱ auf $T(L_{v'_1})$ ist

$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v'_i}/F_{v_i})} A_{\varrho,\sigma}^{-(-1)^i \varrho\sigma\mu}(i).$$

Es sei $\{B_\varrho\}$ die in (2.c) auftretende Kokette. Wir setzen

$$F = \prod_{\varrho \in \mathrm{Gal}(L/F)} B_\varrho^{-\varrho\mu},$$

$$E_\varrho(i) = \prod_{\tau \in \mathfrak{S}_i} \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v'_i}/F_{v_i})} A_{\varrho^\tau,\sigma}^{-(-1)^i \varrho\tau\sigma\mu}(i),$$

so daß

$$E_\varrho(i) \in \prod_{v' | v_i} T(L_{v'}).$$

Eine leichte Rechnung ergibt die Gleichung

$$E_\varrho = E_\varrho(1) E_\varrho(2) F \varrho(F^{-1}). \tag{2.m}$$

Es gilt nähmlich für $\tau \in \mathfrak{S}_i, \sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_{i'}/F_{v_i}})$

$$A_{\varrho,\tau\sigma}(i) = A_{\varrho\tau,\sigma}(i)A_{\varrho,\tau}(i),$$

so daß $C_\varrho(i)$ das Produkt von

$$\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/F)} A_{\varrho,\sigma}^{(-1)^i\varrho\sigma\mu}(i)$$

und

$$\prod_{\tau\in\mathfrak{S}_i}\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L_{v_i'}/F_{v_1'})} A_{\varrho\tau,\sigma}^{-(-1)^i\varrho\tau\sigma\mu} = E_\varrho(i)$$

ist. Folglich ist

$$\begin{aligned} E_\varrho &= \{\prod_\sigma A_{\varrho,\sigma}^{-\varrho\sigma\mu}(1)A_{\varrho,\sigma}^{\varrho\sigma\mu}(2)\}\{B_\varrho^\eta E_\varrho(1)E_\varrho(2)\} \\ &= \{\prod_\sigma (B_\varrho\varrho(B_\sigma)B_{\varrho\sigma}^{-1})^{-\varrho\sigma\mu}\}\{B_\varrho^\eta E_\varrho(1)E_\varrho(2)\} \\ &= F^{-1}\varrho(F)E_\varrho(1)E_\varrho(2). \end{aligned}$$

Die Elemente $E_\varrho(i)$ sind schon nach $T(\mathbf{A}_L)$ geliftet. Wir liften F in ein Element f und bekommen

$$s_\varrho e_\varrho f\varrho(f^{-1}) = E_\varrho(1)E_\varrho(2)$$

mit $s_\varrho \in T(L)$. Es gilt also

$$e'_\varrho = E_\varrho(1)E_\varrho(2),$$

so daß e'_ϱ offensichtlich die erwünschten Eigenschaften besitzt.

Es muß nochmals nachgeprüft werden, ob s_ϱ bis auf einen Rand von den in ihrer Konstruktion getroffenen Wählakten unabhängig ist. Diese werden wieder als (i) bis (v) aufgezählt. Die unter (v) erwähnte Möglichkeit bedarf besonderer Beachtung.

(i) Wenn wir eine Liftung $e''_\varrho = r_\varrho e_\varrho$, $r_\varrho \in T(L)$ nehmen, dann wird $t_{\varrho,\sigma}$ in $t''_{\varrho,\sigma} = r_\varrho^{-1}\varrho(r_\sigma^{-1})r_{\varrho\sigma}t_{\varrho,\sigma}$ abgeändert, und der Isomorphismus zwischen den zwei so zustande gekommenen Gerben durch

$$t''_\varrho \to r_\varrho^{-1}t_\varrho$$

definiert. Da s_ϱ durch $r_\varrho^{-1}s_\varrho$ ersetzt wird, geht t''_ϱ nach $r_\varrho^{-1}s_\varrho \rtimes \varrho$ in der neutralen Gerbe $\mathcal{G}_T$, das auch das Bild von $r_\varrho^{-1}t_\varrho$ ist.

(ii) Wenn wir B_ϱ durch $B_\varrho G\varrho(G^{-1})$ ersetzen, wird F mit

$$\prod_\varrho G^{-\varrho\mu}\varrho(G)^{\varrho\mu}$$

multipliziert. Wenn wir G in g liften, können wir

$$f' = f \prod_{\varrho} g^{-\varrho\mu} \varrho(g)^{\varrho\mu}$$

statt f wählen, und

$$f' \varrho(f')^{-1} = f \varrho(f^{-1}) g^{-\eta} \varrho(g^{\eta}).$$

Wir hatten schon gesehen, daß e_ϱ durch $e_\varrho g^{\eta} \varrho(g^{-\eta})$ ersetzt wird. Somit bleibt $\{s_\varrho\}$ erhalten.

(iii) Eine ähnliche Rechnung zeigt die Kompatibilität unter Abänderung der Repräsentanten $\omega_\tau, \tau \in \mathfrak{S}_i$. Wenn wir das Repräsentantensystem $\mathfrak{S}_i$ selbst abändern, dann wird B_ϱ mit einem Element aus $\prod_{v'|v_i} L_{v'}^{\times}$ multipliziert. Folglich werden weder $t_{\varrho,\sigma}$ noch s_ϱ geändert.

(iv) Eine Abänderung der Einbettung $W_{L_{v_1'}/F_{v_1}} \to W_{L/F}$ ändert die Kozyklen nicht und folglich auch nicht $\{s_\varrho\}$. Eine Abänderung von $\omega_\varrho, \varrho \in \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})$ multipliziert B_ϱ mit einem Element aus $\prod_{v'|v_1} T(L_{v'})$ und verursacht keine Änderung von $\{s_\varrho\}$.

(v) Wenn wir v_1' abändern und durch v_1'' ersetzen,

$$|\lambda x|_{v_i''} = |x|_{v_1'},$$

dann ist

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_1''}/F_{v_1})} \sigma\mu = \lambda \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_1})} \sigma\lambda^{-1}\mu$$

und wird im allgemeinen nur dann gleich $\lambda\nu_1$ sein, wenn λ so gewählt werden kann, daß $\lambda^{-1}\mu = \mu$. Deshalb setzen wir diese Bedingung voraus. Es ist aber sogar in diesem Fall nicht so, daß τ_μ unabhängig von v_1'' ist. Es seien nämlich $\tilde{A}_{\varrho,\sigma}$ Liftungen von $A_{\varrho,\sigma}$ und $C_{\varrho,\sigma,\tau}$ der durch

$$\varrho(\tilde{A}_{\sigma,t}) \tilde{A}_{\varrho\sigma,\tau}^{-1} \tilde{A}_{\varrho,\sigma\tau} \tilde{A}_{\varrho,\sigma}^{-1} = C_{\varrho,\sigma,\tau}$$

definierte Teichmüllerkozyklus. Dann ist

$$r_\varrho = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})} C_{\varrho,\sigma,\lambda}^{-\varrho\sigma\mu}$$

ein 1-Kozyklus von $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ mit Werten aus $T(L)$ und τ_μ wird durch $\tau_\mu' : t_\varrho \to r_\varrho \tau_\mu(t_\varrho)$ ersetzt, wenn v_1' durch v_1'' ersetz wird.

E_ϱ wird nämlich mit dem Ausdruck (2.e) multipliziert, der gleich ist

$$\varrho(Y) Y^{-1} \varrho(Z_1) Z_\varrho^{-1}.$$

Andererseits wird F mit

$$U = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)} D_\sigma^{-\sigma\mu}$$

multipliziert. Nach den Definitionen ist

$$U = \prod_\sigma \lambda(A_{\lambda^{-1},\sigma\lambda})^{\sigma\mu} A_{\sigma,\lambda}^{\sigma\mu} A_{\lambda,\lambda^{-1}}^{-\sigma\mu}$$

und

$$Y = \prod_{\tau \in \mathfrak{S}_1} A_{\lambda,\lambda^{-1}}^{-\tau\nu_1} \prod_{\tau \in \mathfrak{S}_1} \lambda(A_{\lambda^{-1},\tau})^{\tau\nu_1}.$$

Folglich gilt

$$UY^{-1} = \prod_\sigma \left(\lambda(A_{\lambda^{-1},\sigma\lambda})^{\sigma\mu} A_{\sigma,\lambda}^{\sigma\mu}\right) \prod_\tau \lambda(A_{\lambda^{-1},\tau})^{\tau\nu_1}.$$

Wegen der Kozykeleigenschaft ist das erste Produkt auf der rechten Seite gleich

$$\prod_\sigma \lambda(A_{\lambda^{-1}\sigma,\lambda} A_{\lambda^{-1},\sigma})^{\sigma\mu} = \prod_\sigma A_{\sigma,\lambda}^{\sigma\mu} \prod_\sigma \lambda(A_{\lambda^{-1},\sigma})^{\sigma\mu}.$$

Wenn σ in τ Gal $(L_{v_i'}/F_{v_1})$ liegt, ist

$$\lambda(A_{\lambda^{-1},\sigma}) \equiv \lambda(A_{\lambda^{-1},t}) \qquad \big(\mathrm{mod}\, \tau(L_{v_1'})\big).$$

Wir können daher UY^{-1} in das Produkt von $\prod_\sigma \tilde{A}_{\sigma,\lambda}^{\sigma\mu}$ und einem Element aus $\prod_{v'|v_1} T(L_{v'})$ liften. Es gilt ferner

$$\prod \tilde{A}_{\sigma,\lambda}^{\sigma\mu} \prod_\sigma \varrho(\tilde{A}_{\sigma,\lambda})^{-\varrho\sigma\mu} = \prod_\sigma C_{\varrho,\sigma,\lambda}^{-\varrho\sigma\mu} = r_\varrho,$$

denn

$$\prod_\sigma \tilde{A}_{\varrho,\sigma\lambda}^{\varrho\sigma\mu} A_{\varrho,\sigma}^{-\varrho\sigma\mu} = 1.$$

Somit ist $s_\varrho' = r_\varrho s_\varrho$.

Wir wollen schließlich zeigen, daß τ_μ unabhängig von L ist. Es sei $L' \supseteqq L$ eine Galoiserweiterung von F. Wir werwenden die früheren Formeln wieder. Um dasselbe Symbol nicht mit zwei Bedeutungen zu verwenden, schrieben wir

$$B_{\varrho'}^l = B_\varrho B_{\varrho'}(1) B_{\varrho'}^{-1}(2) G \varrho(G)^{-1}.$$

Aus den früheren Rechnungen ergibt sich, daß $E_{\varrho'}$ das Produkt von E_ϱ und zwei anderen Faktoren ist. Einer ist für $s_{\varrho'}$ belanglos, weil er in

$$\prod_{v'|v_1} T(L_{v'}) \prod_{v'|v_2} T(L_{v'})$$

liegt. Der andere ist

$$G^\eta \varrho(G)^{-\eta} \prod_{i=1}^{2} \{\prod_{\mu'} B_{\mu'}(i)^{\mu'\nu_i} \prod_{\mu'} \varrho\big(B_{\mu'}(i)\big)^{-\varrho\mu'\nu_i}\}.$$

Andererseits ist

$$F' = \prod_{\varrho' \in \mathrm{Gal}(L'/F)} B_{\varrho'}^{-\varrho'\mu}.$$

Wir zeigen, daß

$$F'F^{-1}G^{\eta}\prod_{i=1}^{2}\prod_{\mu'} B_{\mu'}(i)^{\mu'\nu_i} \equiv V \qquad \big(\text{modulo} \prod_{v'|v_1,v_2} T(L_{v'})\big),$$

wobei V nicht nur invariant ist, sondern tatsächlich das Bild eines Elements aus $T(\mathbf{A}_F)$. Somit wird $s_{\varrho'} = s_{\varrho}$. Wir zeigen in der Tat, daß

$$W = (\prod_{\gamma \in H} B_{\gamma}^{-1})G$$

in C_L liegt, und

$$V = \prod_{\varrho \in \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})} \varrho(W)^{\varrho\mu},$$

was hinreicht, denn $\mathbf{A}_L \to C_L$ ist surjektiv.

Es sei $\varrho' \in \mathrm{Gal}(L'/F)$ und es sei μ_i' sein Repräsentant modulo HG_i'. Es muß gezeigt werden, daß

(2.n) $\qquad \varrho'^{-1}\big(\prod_{\gamma\in H} B_{\varrho'\gamma}^{-1}B_{\varrho}GB_{\mu_1'}(1)B_{\mu_2'}^{-1}(2)\big)$

kongruent ist zu

(2.o) $\qquad \prod_{\gamma\in H} B_{\gamma}^{-1}G,$

mit Gleichheit, wenn $\varrho' \in H$.

Es gilt erstens

$$\begin{aligned}\varrho'^{-1}(\prod_{\gamma\in H} B_{\varrho'\gamma}^{-1}) &= \prod_{\gamma} B_{\sigma'} \cdot \prod_{\gamma} B_{\gamma}^{-1} \cdot A_{\sigma',\varrho'\gamma}^{-1}(1)A_{\sigma',\varrho'\gamma}(2)\\ &= B_{\sigma'}^{1} \prod_{\gamma}\big(A_{\sigma',\varrho'\gamma}^{-1}(1)A_{\sigma',\varrho'\gamma}(2)\big)\prod_{\gamma} B_{\gamma}^{-1},\end{aligned}$$

wobei $\sigma' = \varrho'^{-1}$. Somit ist (2.n) gleich

(2.p) $\qquad B_{\sigma'}(1)B_{\sigma'}^{-1}(2)\prod_{\gamma}\big(A_{\sigma',\varrho'\gamma}^{-1}(1)A_{\sigma',\varrho'\gamma}(2)\big)\sigma'\big(B_{\mu_1'}(1)B_{\mu_2'}^{-1}(2)\big)\sigma(B_{\varrho})B_{\sigma}$

mal (2.o).

Zweitens gilt

$$\sigma'\big(B_{\mu_i'}(i)\big)B_{\sigma'}(i) = B_{\sigma'\mu_i'}(i)A_{\sigma',\mu_i'}^{l}(i)A_{\sigma,\mu_i}^{-1}(i),$$

und

$$B_{\sigma'\mu_i'}(i) = \prod_{\gamma\in H} A_{\sigma'\mu_i',\gamma}(i),$$

da $\sigma'\mu_i' \in HG_i'$.

Wenn $\varrho' \in H$, so ist $B_\varrho = B_\sigma = 1$, $\mu_i' = 1$, und

$$\prod_\gamma A_{\sigma',\varrho'\gamma}(i) = \prod_\gamma A_{\sigma',\gamma}(i),$$

was die erwünschte Gleichheit ergibt.

Im allgemeinen, wenn $\varrho' \in \mu_i' H \nu_i$ mit ν_i aus dem Rechtsrepräsentantensystem von H_i in G_i', so gilt

$$\prod_\gamma A_{\sigma',\varrho'\gamma}(i) = \prod_\gamma A_{\sigma',\mu_i'\gamma\nu_i}(i)$$

und

$$A_{\sigma',\mu_i'\gamma\nu_i}(i)A^{-1}_{\sigma',\mu_i'\gamma}(i) = \sigma'\left(A_{\mu_i'\gamma,\nu_i}(i)^{-1}\right)A_{\sigma'\mu_i'\gamma,\nu_i}(i) \in \sigma'\mu_i'\gamma(L'_{w_i'}).$$

Ferner ist

$$A^{-1}_{\sigma',\mu_i'\gamma}(i)A_{\sigma'\mu_i',\gamma}(i)A_{\sigma',\mu_i'}(i) = \sigma' A_{\mu_i',\gamma}(i) = 1.$$

Somit ist (2.p) gleich

$$\sigma(B_\varrho)B_\sigma A^{-1}_{\sigma,\mu_1}(1)A_{\sigma,\mu_2}(2).$$

Aber

$$A_{\sigma,\mu_i}(i) \equiv A_{\sigma,\varrho}(i) \pmod{L'_{w_i'}},$$

und

$$\sigma(B_\varrho)B_\sigma A^{-1}_{\sigma,\varrho}(1)A_{\sigma,\varrho}(2) = 1,$$

da $\varrho\sigma = 1$.

Wir formulieren wieder das Wesentliche in einem Satz.

Satz 2.3. *In der Situation von Satz 2.2 sei μ ein Element aus $X_*(T)$, das die Kocharaktere ν_i durch Mittelung ergibt*

$$\nu_i = (-1)^{i+1} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_1'}/F_{v_i})} \sigma\mu.$$

Dann liefert die obige Konstruktion einen Homomorphismus τ_μ von der Gerbe $\mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$ in die neutrale Gerbe $\mathcal{G}_T$, so daß $\tau_\mu \circ \zeta_v$ für $v \neq v_1, v_2$ zur kanonischen Neutralisierung äquivalent ist und so daß $\tau_\mu \circ \zeta_{v_1}$ zu ξ_μ äquivalent ist und $\tau_\mu \circ \zeta_{v_2}$ zu $\xi_{-\mu}$ (die Definition von ξ_μ erscheint nach Satz 2.2). Der Homomorphismus τ_μ ist eindeutig bestimmt bis auf die Komposition mit einem Automorphismus von $\mathcal{G}_T$, der in allen Stellen äquivalent zum identischen Automorphismus ist. Die Konstruktion ist funktoriell in T, μ.

§3. DIE PSEUDOMOTIVISCHE GALOISGRUPPE

In diesem Abschnitt führen wir zwei Gerben ein, nicht nur die eigentlich wichtige, die wir die pseudomotivische Galoisgruppe nennen, sondern auch eine untergeordnete, die nur da ist, um die Vermutung im fünften Abschnitt für die allgemeinste Shimuravarietät formulieren zu können.

Die pseudomotivische Galoisgruppe $\mathcal{P}$ ist als direkter Limes definiert. Es sei L eine endliche Galoiserweiterung von $\mathbf{Q}$ im Körper $\bar{\mathbf{Q}}$ der algebraischen Zahlen in $\mathbf{C}$ und m sei eine natürliche Zahl. Wir definieren zunächst eine Gerbe $\mathcal{P}(L, m)$, deren Kern ein Torus $P(L, m)$ ist, den wir definieren, indem wir den Galoismodul seiner Charaktere vorschreiben. Es sei $q = p^m$, wobei p die ein für allemal fixierte rationale Primzahl ist.

Definition 3.1. Die Gruppe $X(L, m)$ der zu L und m zugeordneten Weilzahlen besteht aus denjenigen π aus L mit folgenden Eigenschaften.

(a) Es gibt eine ganze Zahl $v_1 = v_1(\pi)$, so daß für alle archimedischen Primstellen v von L gilt

$$|\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_v/\mathbf{R})} \sigma\pi| = q^{v_1}.$$

(b) Für jede Primstelle $v \in L$ über p gibt es ein $v_2(v) = v_2(\pi, v) \in \mathbf{Z}$ mit

$$|\pi|_v = |\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_v/\mathbf{Q}_p)} \sigma\pi|_p = q^{v_2(v)}.$$

(c) In allen endlichen Stellen außerhalb p ist π eine Einheit.

Aus dem Dirichletschen Einheitensatz folgt, daß $X(L, m)$ endlich erzeugt ist. Aus $X(L, m)$ dividieren wir die endliche Gruppe der darin enthaltenen Einheitswurzeln aus, um einen torsionsfreien Modul $X^*(L, m)$ zu erhalten. Den entsprechenden Torus bezeichnen wir mit $P(L, m)$. Der Modul $X^*(L, m)$ ist offensichtlich ein $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$-Modul. Folglich ist $P(L, m)$ über $\mathbf{Q}$ definiert.

Notfalls, um Mißverständnissen vorzubeugen, schreiben wir χ_π für den Charakter von $P(L, m)$, der der Weilzahl $\pi \in X(L, m)$ entspricht. Wir fixieren ein für allemal eine Einbettung $\bar{\mathbf{Q}} \to \bar{\mathbf{Q}}_p$ und folglich eine Primstelle v_2 von jedem in $\bar{\mathbf{Q}}$ enthaltenen endlichen algebraischen Zahlkörper L. Es sei v_1 die durch $L \subsetneqq \bar{\mathbf{Q}} \subsetneqq \mathbf{C}$ gegebene archimedische Stelle von L. Wir definieren folgendermaßen die Kogewichte ν_1, ν_2 aus $X_*(L, m) = X_*\big(P(L, m)\big)$:

(3.a) $\langle \nu_1, \chi_\pi \rangle = \nu_1(\pi),$

(3.b) $\langle \nu_2, \chi_\pi \rangle = \nu_2(\pi, v_2).$

Die Relation (2.a) ist offensichtlich, während (2.b) aus der Produktformel folgt. Dabei sollte bemerkt werden, daß dieses ν_1 sogar unter der vollen Gruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ invariant ist.

Folgende Funktorialitäten sind vorhanden:

(3.c) Wenn $L \subset L', \phi^*, \phi^*_{L,L'} : X^*(L, m) \to X^*(L', m)$ schickt π nach sich selbst.

(3.d) Wenn $m|m', \phi^* = \phi^*_{m,m'} : X^*(L, m) \to X^*(L, m')$ schickt π nach $\pi^{m'/m}$.

Die kontragredienten Abbildungen sind Homomorphismen der über $\mathbf{Q}$ definierten Tori $P(L', m)$ und $P(L, m')$ nach $P(L, m)$.

Lemma 3.2. *(a) Es gilt*

$$\phi_{m,m'}(\nu_i') = \nu_i.$$

(b) Es gilt

$$\phi_{L,L'}(\nu_i') = [L'_{v_i'} : L_{v_i}]\nu_i.$$

Dabei sind v_i' die durch $L' \subseteqq \bar{\mathbf{Q}} \subseteqq \mathbf{C}$ und $L' \subseteqq \bar{\mathbf{Q}} \subseteqq \bar{\mathbf{Q}}_p$ definierten Primstellen von L'.

Wenn m durch m' ersetzt wird, wird q durch $q^{m'/m}$ ersetzt. Daraus folgt die erste Behauptung sofort. Die zweite folgt aus der Gleichung

$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L'_{v_i'}/\mathbf{Q}_p)} \sigma\pi = (\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_i}/\mathbf{Q}_p)} \sigma\pi)^{[L'_{v_i'}:L_{v_i}]},$$

die für $\pi \in L$ gilt.

Das Verfahren des vorigen Abschnitts ordnet dem Tripel $P(L,m), \nu_1, \nu_2$ und dem Körper L eine Gerbe $\mathcal{P}(L,m)$ zu. Aus Lemma 3.2(a) folgt, daß es einen kanonischen Homomorphismus $\phi = \phi_{m,m'} : \mathcal{P}(L,m') \to \mathcal{P}(L,m)$ gibt. Im vorigen Abschnitt worde gezeigt, daß die mittels $P(L,m), \nu_1, \nu_2$ und L definierte Gerbe der mittels $P(L,m), [L'_{v_1} : L_{v_1}]\nu_1, [L'_{v_2'} : L_{v_2}]\nu_2$ und L' definierten isomorph ist. Infolgedessen gibt es auch einen kanonischen Homomorphismus $\phi = \phi_{L,L} : \mathcal{P}(L',m) \to \mathcal{P}(L,m)$.

Als Vorbereitung auf den nächsten Abschnitt, in dem wir einen kanonischen Isomorphismus zwischen der pseudomotivischen Galoisgruppe

$$\mathcal{P} = \varprojlim_{L,m} \mathcal{P}(L,m)$$

und der echten motivischen Galoisgruppe aus den Standardvermutungen und der Tatevermutung ableiten, müssen wir einige kohomologische Eigenschaften des inversen Systems der $P(L,m)$ zeigen. Vorher führen wir eine zweite etwas künstliche Gerbe ein, die wir mangels Erfindungsgabe die quasimotivische Galoisgruppe nennen. Sie wird mittels der quasi-Weilzahlen definiert.

Definition 3.3. Die Gruppe $Y(L,m)$ der L und m zugeordneten quasi-Weilzahlen besteht aus denjenigen π aus L mit folgenden Eigenschaften.

(a) Es gibt eine ganze Zahl $\nu_1 = \nu_1(\pi)$, so daß für alle archimedischen Primstellen v von L gilt

$$|\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/Q)} \sigma\pi|^{[L_v:\mathbf{R}]} = q^{\nu_1[L:\mathbf{Q}]}.$$

(b) Für jede Primstelle $v \in L$ über p gibt es ein $\nu_2(v) = \nu_2(\pi, v) \in \mathbf{Z}$ mit

$$|\pi|_v = |\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_v/\mathbf{Q}_p)} \sigma\pi\Big|_p = q^{\nu_2(v)}.$$

(c) In allen endlichen Primstellen außerhalb p ist π eine Einheit.

Wie die $X(L, m)$ bilden auch die $Y(L, m)$ ein inverses System. Um $Y^*(L, m)$ zu bekommen, dividiert man $Y(L, m)$ nach der i.a. unendlichen Gruppe aller Einheite aus, nicht nur der Einheitswurzeln. Wir erhalten ein inverses System von Gerben $\mathcal{Q}(L, m)$, dessen Limes $\mathcal{Q}$ wir die quasimotivische Galoisgruppe nennen.

Die Gruppe $P(L, m)$ enthält eine Reihe $\{\delta_n\}, m|n, n$ genügend hoch, von ausgezeichneten rationalen Punkten, die durch die Gleichungen

$$\chi_\pi(\delta_n) = \pi^{\frac{n}{m}}$$

definiert werden. Dabei muß $\frac{n}{m}$ durch die Ordnung der Torsion von $X(L, m)$ teilbar sein. Die Rationalität von δ_n folgt aus

$$\sigma\big(\chi_\pi(\delta_n)\big) = (\sigma\pi)^{\frac{n}{m}} = \chi_{\sigma\pi}(\delta_n).$$

Die Gleichungen

$$\phi_{m,m'}(\delta_n) = \delta_n, \quad \phi_{L,L'}(\delta_n) = \delta_n$$

prüfen sich leicht nach. In $Q(L, m)$, dem Kern von $\mathcal{Q}(L, m)$, gibt es kein eindeutig bestimmtes δ. Wir können etliche definieren, und die fehlende Eindeutigkeit werden wir meistens übersehen. Wenn k genügend hoch ist, dann gibt es ein kommutatives Diagramm von $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$-Moduln

$$\begin{tikzcd}
 & Y(L,m) \arrow[d] \\
k.Y^*(L,m) \arrow[ur, "\eta"] \arrow[r, hook] & Y^*(L,m)
\end{tikzcd}$$

Wir definieren δ_n durch die Gleichungen

$$\chi_\pi(\delta_n) = \eta(\pi^k)^{\frac{n}{mk}}.$$

Es ist also für jedes π die Zahl $\pi^{-n}\chi_\pi(\delta_n)$ eine Einheit.

Es seien T ein Torus über $\mathbf{Q}$ und $\mu \in X_*(T)$. Wenn T über L zerfällt, und wenn m genügend hoch ist, ordnen wir dem Paar (T, μ) einen über $\mathbf{Q}$ definierten Homomorphismus $\psi_\mu : Q(L, m) \to T$ zu. Falls

(3.e) $$(\sigma - 1)(\iota + 1)\mu = (\iota + 1)(\sigma - 1)\mu = 0,$$

wird ψ_μ durch $P(L, m)$ faktorisiert werden können, und ist als ein Homomorphismus von $P(L, m)$ nach T zu betrachten. Dabei ist zu bemerken, dass die einbettung

$$X(L, m) \subsetneqq Y(L, m)$$

einen Homomorphismus $Q(L, m) \to P(L, m)$ definiert.

Der Homomorphismus ψ_μ wird durch einen Homomorphismus von Galoismoduln $X^*(T) \to Y^*(L,m)$ definiert werden, und zwar durch $X^*(T) \to Y(L,m), \lambda \to \pi_\lambda$, wobei gelten muß

$$\pi_{\sigma\lambda} = \sigma(\pi_\lambda).$$

Wenn die Gleichungen (3.e) gelten, wird auch gelten

$$\sigma\big(\iota(\pi_\lambda)\cdot\pi_\lambda\big) = \pi_{\sigma\iota\lambda+\sigma\lambda} = \pi_{(\iota+1)\sigma\lambda} = \pi_{(\iota+1)\lambda} = \iota(\pi_\lambda)\cdot\pi_\lambda$$

und

$$\iota(\pi_\lambda)\pi_\lambda = \pi_{\iota\lambda+\lambda} = \pi_{\iota'\lambda+\lambda} = \iota'(\pi_\lambda)\pi_\lambda, \quad \iota' = \sigma\iota\sigma^{-1}.$$

Damit ist $\iota(\pi_\lambda)\pi_\lambda$ eine rationale Zahl, und $\pi_\lambda \in X(L,m)$.

Um $\lambda \to \pi_\lambda$ zu definieren, wählen wir ein zweckmäßiges $\gamma \in T(\mathbf{Q})$ und setzen

$$\pi_\lambda = \lambda(\gamma).$$

Für die Gruppe $\mathcal{P}$ ist dann $\psi_\mu(\delta_m) = \gamma$. Für die Gruppe $\mathcal{Q}$ ist $\lambda\big(\gamma^{-1}\psi_\mu(\delta_m)\big)$ eine Einheit für jedes λ. Wir werden also γ durch $\psi_\mu(\delta_m)$ ersetzen können und annehemen, dass $\psi_\mu(\delta_m) = \gamma$.

Von ψ_μ werden die Bedingungen

$$\psi_\mu(\nu_i) = -(-1)^i \sum_{\mathrm{Gal}(L_{v_i}/\mathbf{Q}_{v_i})} \sigma\mu$$

verlangt, was auf γ übertragen bedeutet, daß

$$\Big|\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L_{v_i}/\mathbf{Q}_{v'_i})} \sigma\lambda(\gamma)\Big| = q^{-(-1)^i\langle\lambda,\Sigma_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L_{v_i}/\mathbf{Q}_{v'_i})}\sigma\mu\rangle}.$$

Schließlich ist $\lambda(\gamma)$ eine Einheit außerhalb des Unendlichen und p.

Wir wählen m so groß, daß es eine Zahl a aus L gibt derart, daß das Ideal (a) eine Potenz $\mathfrak{p}^r$ des der Stelle v_2 entsprechenden Primideals $\mathfrak{p}$ ist, und daß

$$|\mathrm{Nm}_{L_{v_2}/\mathbf{Q}_{v_2}} a|_p = q.$$

Das Element γ wird durch die Gleichungen

$$\lambda(\gamma) = \prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})} \sigma(a)^{\langle\lambda,\sigma\mu\rangle}$$

definiert. Dann ist γ rational und

$$\begin{aligned} |\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L_{v_2}/\mathbf{Q}_{v_2})}\sigma\lambda(\gamma)|_p &= |\prod_{\varrho\in\mathrm{Gal}(L_{v_2}/\mathbf{Q}_{v_2})}\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})}\varrho\sigma(a)^{\langle\lambda,\sigma\mu\rangle}|_p \\ &= |\prod_{\varrho,\sigma\in\mathrm{Gal}(L_{v_2}/\mathbf{Q}_{v_2})}\varrho\sigma(a)^{\langle\lambda,\sigma\mu\rangle}|_p \\ &= q^{\langle\lambda,\sum_\sigma\sigma\mu\rangle}. \end{aligned}$$

Dem vorigen Abschnitt zufolge läßt sich ψ_μ kanonisch in einen Homomorphismus von Gerben $\psi_\mu : \mathcal{Q}(L,m) \to \mathcal{G}_T$ oder $\psi_\mu : \mathcal{P}(L,m) \to \mathcal{G}_T$ erweitern.

Von jetzt ab in diesem Abschnitt widmen wir uns ausschließlich den Gerben $\mathcal{P}(L,m)$ und fangen mit einer einfachen Bemerkung an.

Lemma 3.4. *Es sei K der maximale CM-Unterkörper von L. Dann ist $X(L,m) = X(K,m)$.*

Wir erinnern uns daran, daß die Galoiserweiterung K ein CM-Körper ist, falls die komplexe Konjugation ι im Zentrum von $\mathrm{Gal}(K/F)$ liegt. Wir müssen also zeigen, dass

$$\iota(\pi) = \iota'(\pi),$$

wenn $\pi \in X(L,m)$, und $\iota' = \sigma\iota\sigma^{-1}, \sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)$. Wenn L ein reeller Körper ist, ist das klar. Sonst gilt

$$\iota(\pi)\pi = q^{\nu_1(\pi)} = \iota'(\pi)\pi,$$

und folglich $\iota'(\pi) = \iota(\pi)$.

Wir nehmen also im folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit immer an, daß L ein CM-Körper ist. Es sei L_0 sein total reeller Unterkörper.

Lemma 3.5. *$H^2\big(\mathbf{Q}, P(L,m)\big)$ erfüllt das Hasseprinzip.*

Offenbar genügt es zu zeigen, daß der Homomorphismus

$$H^1\big(\mathrm{Gal}(L'/\mathbf{Q}), P(_{L'})\big) \to H^1(\mathrm{Gal}(L'/\mathbf{Q}), X_* \otimes C_{L'})$$

surjektiv ist, wenn $P = P(L,m)$ und $L \subsetneqq L'$. Also mit Tate-Nakayama müssen wir die Surjektivität von

$$\bigoplus_{v\in\mathbf{Q}} H^{-1}\big(\mathrm{Gal}(L'_v/\mathbf{Q}_v), X_*\big) \to H^{-1}\big(\mathrm{Gal}(L'/\mathbf{Q}), X_*\big)$$

einsehen.

Es gibt eine exakte Sequenz von Galoismoduln

$$1 \to X'_* \to X_* \to \mathbf{Z} \to 1,$$

wobei ι als -1 auf X'_* wirkt. Ein Element aus $H^{-1}\big(\mathrm{Gal}(L'/\mathbf{Q}), X_*\big)$ wird durch $\lambda \in X_*$ dargestellt mit

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L'/\mathbf{Q})} \sigma\lambda = 0.$$

Folglich liegt λ in X'_*, und

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L'_{v_1}/\mathbf{R})} \sigma\lambda = 0,$$

so daß λ ein Element aus $H^{-1}(\mathrm{Gal}(L'_{v_1}/\mathbf{R}), X_*)$ darstellt. Somit ist das Lemma bewiesen.

Es gibt noch weitere kohomologische Eigenschaften der Gruppen $P(L,m)$ zu behandeln. Vorher machen wir einige Bemerkungen über die Moduln $X_*(L,m)$. Die Serregruppe ${}^LS$ ist ein Torus über $\mathbf{Q}$, der durch seinen Gewichtmodul $X^*({}^LS)$ definiert wird:

$$X^*({}^LS) = \{\lambda = \sum_{\varrho:L\to\bar{\mathbf{Q}}} n_\varrho[\varrho] | n_\varrho + n_{\iota\varrho} \equiv k(\lambda), k(\lambda)\in\mathbf{Z}\}.$$

Die Gruppe ${}^LS$ ist mit einem ausgezeichneten Kogewicht μ ausgestattet,

$$\mu : \sum n_\varrho[\varrho] \to n_1,$$

wobei 1 die vorgegebene Einbettung $L \to \bar{\mathbf{Q}}$ bezeichnet. Das Kogewicht μ definiert $\psi_\mu : P(L,m) \to {}^LS$ und $\psi^*_\mu : X^*({}^LS) \to X^*(L,m)$.

Lemma 3.6. *Für genügend hohes m ist der Homomorphismus ψ^*_μ surjektiv und folglich $P(L,m) \to {}^LS$ injektiv.*

Jedem $\varrho \in \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ ist eine p teilende Primstelle v_ϱ zugeordnet

$$|x|_{v_\varrho} = |\varrho^{-1}x|_{v_2}.$$

Wenn $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_2}/\mathbf{Q}_{v_2})$, ist $v_{\varrho\sigma} = v_\varrho$. Der Modul $X_*(L,m)$ enthält die ausgezeichneten Elemente $\nu_\infty = \nu_1$ und $\nu_\varrho = -\varrho\nu_2$. Es gelten die Relationen

$$\nu_{\varrho\sigma} = \nu_\varrho, \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_2}/\mathbf{Q}_{v_2})$$

und

$$\nu_\varrho + \nu_{\iota\varrho} = \nu_\infty k, \quad k = 2[L_{v_2} : \mathbf{Q}_p][L : L_0]^{-1}.$$

Die erste Relation ist klar. Die zweite folgt aus

$$q^{\nu_\varrho(\pi)+\nu_{\iota\varrho}(\pi)} = |\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L_{v_\varrho}/\mathbf{Q}_p)} \varrho^{-1}\sigma\big(\pi\iota(\pi)\big)|_p = |\pi\iota(\pi)|_p^{[L_{v_2}:\mathbf{Q}_p]}.$$

Lemma 3.7. *(a) Wenn die p teilenden Primstellen von L_0 in L nicht zerfallen, und es zerfallen entweder keine oder alle, dann gilt*

$$\nu_\varrho = \frac{k}{2}\nu_\infty$$

und für genügend hohes m ist $\{\nu_\infty\}$ eine $\mathbf{Z}$-Basis von $X_*(L,m)$.

b) *Wenn die Primstellen von L_0 in L zerfallen, sei $\varrho_1,\dots,\varrho_r$ eine Repräsentantensystem für die Doppelklassen $\mathrm{Gal}(L_{v_1}/\mathbf{R})\backslash\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})/\mathrm{Gal}(L_{v_2}/\mathbf{Q}_p)$. Dann ist für genügend hohes m die Menge $\{\nu_\infty,\nu_{\varrho_1},\dots,\nu_{\varrho_r}\}$ eine $\mathbf{Z}$-Basis von $X_*(L,m)$.*

Im Fall (a) ist $\nu_\varrho = \nu_{\iota\varrho}$ und die gegebene Relation klar. In beiden Fällen ist es klar, daß die Elemente, die eine Basis bilden sollen, einen Untermodul von endlichem Index erzeugen, denn aus

$$\nu_\infty(\pi) = \nu_\varrho(\pi) = 0$$

für jedes ϱ, schließen wir, daß π eine Einheitswurzel ist. Wir müssen nur zeigen, daß im Fall (a) ν_∞ und im Fall (b) ν_∞ und $\nu_{\varrho_1},\cdots,\nu_{\varrho_r}$ willkürlich vorgeschrieben werden können. Diese Aussage werden wir gleichzeitig mit Lemma 3.6 beweisen.

Die Abbildung $X^*({}^LS)\to X^*(L,m)$ ist zu der Abbildung $\psi_\mu : X_*(L,m)\to X_*({}^LS)$ dual, und diese ist durch

$$\psi_\mu(\nu_\infty) = \mu+\iota\mu,\ L_0\neq L,\ \psi_\mu(\nu_\infty)=\mu,\ L_0=L,$$

und

$$\psi_\mu(\nu_{\varrho_i}) = \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L_{v_2}/\mathbf{Q}_p)} \varrho_i\sigma\mu$$

definiert. Folglich

$$\psi_\mu(\nu_i)\Big(\sum a_\varrho[\varrho]\Big) = \sum_\sigma a_{\varrho_i\sigma},$$

$$\psi_\mu(\nu_\infty)\Big(\sum a_\varrho[\varrho]) = \begin{cases} a_1+a_\iota & L_0\neq L\\ a_1 & L_0=L.\end{cases}$$

Da a_1 und a_ι beliebig sein können, ist es klar, daß wir ein χ im Bild von $X^*({}^LS)$ mit vorgegebenem $\langle\nu_\infty,\chi\rangle$ finden können. Im Fall (b) können wir $a_{\varrho_1},\dots a_{\varrho_r}$ und $a_{\iota\varrho_1}$ beliebig wählen, und gleichzeitig verlangen, daß $a_{\varrho_i\sigma}=a_{\iota\varrho_1\sigma}=0$, wenn $\sigma\neq1$, $\sigma\in\mathrm{Gal}(L_{\sigma_2}/\mathbf{Q}_p)$. Somit sind beide Lemmata bewiesen.

Korollar 3.8. *Für genügend hohes m und $m|m'$ ist $\phi_{m,m'}: X_*(L,m')\to X_*(L,m)$ ein Isomorphismus.*

Wir können die Bezeichnungen etwas entlasten, wenn wir statt $P(L,m)$ oder $X^*(L,m)$ die Symbole $P(L)$, mitunter P_L, oder $X^*(L)$ verwenden, wobei stillschweigend vorausgesetzt ist, daß m hinreichend hoch ist.

Die nächsten Aussagen betreffen die erste Kohomologiegruppe von P_L. Da sie im Fall (a) von Lemma 3.7 trivial sind, können wir uns in den Beweisen auf Fall (b) beschränken. Wir betrachten die exakte Sequenz von $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$-Moduln.

(3.f) $$0 \to \mathbf{Z}\nu_\infty \to X_*(L) \to X_*(N) \to 0.$$

Dabei ist N ein Torus, und $X_*(N)$ durch diese Sequenz definiert. Es sei $\bar{\nu}_\varrho$ das Bild von ν_ϱ in $X_*(N)$.

Die Struktur des Galoismoduls $X_*(N)$ ist sofort aus Lemma 3.7 ablesbar. Es sei $H = \mathrm{Gal}(L_{v_2}/\mathbf{Q}_p)$ und $H_0 = H \cup H\iota$. Wir erhalten eine exakte Sequenz von $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$-Moduln.

(3.g) $$0 \to \mathrm{Ind}_{H_0}^G 1 \to \mathrm{Ind}_H^G 1 \to X_*(N) \to 1.$$

Lemma 3.9. *$H^1(\mathbf{Q}, P_L)$ erfüllt das Hasseprinzip.*

Nach (3.7) und dem Satz 90 genügt es, das Hasseprinzip für $H^1(\mathbf{Q}, N)$ zu zeigen. Das folgt aus (3.g), dem Satz 90, dem Shapirolemma und dem Hasseprinzip für $H^2(H_0, K_0^\times)$, wobei K_0 den Fixkörper von H_0 bedeutet.

Lemma 3.10. *Es sei L ein vorgegebener CM-Körper. Dann gibt es eine CM-Erweiterung L' von L, so daß für jede Primstelle v von $\mathbf{Q}$ der Transitionshomomorphismus*

$$H^1(\mathbf{Q}_v, P_{L'}) \to H^1(\mathbf{Q}_v, P_L)$$

Null ist.

Wir verwenden die Tate-Nakayama-Theorie und beweisen, daß

$$H^{-1}(\mathrm{Gal}(L'_{v'}/\mathbf{Q}_v), X_*(L')\big) \to H^{-1}\big(\mathrm{Gal}(L_v/\mathbf{Q}_v), X_*(L)\big)$$

Null ist, wobei v und v' Erweiterungen von v auf L und L' bedeuten. Offensichtlich genügt es zu zeigen, daß

$$H^{-1}\big(\mathrm{Gal}(L_{v'}/\mathbf{Q}_v), X_*(N')\big) \to H^{-1}\big(\mathrm{Gal}(L_v/\mathbf{Q}_v), X_*(N)\big)$$

Null ist, wobei $X_*(N')$ durch

$$0 \to \mathbf{Z}\nu'_\infty \to X_*(L') \to X_*(N') \to 0$$

definiert wird. Ein Element aus $H^{-1}\big(\mathrm{Gal}(L_v/\mathbf{Q}_v), X_*(N)\big)$ wird durch

$$\nu = \sum_{\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})/\mathrm{Gal}(L_{v_2}/\mathbf{Q}_p)} a_\varrho \bar{\nu}_\varrho, \quad a_\varrho \in \mathbf{Z},$$

dargestellt. Es sei $s = [L : \mathbf{Q}]$; dann stellt ν die triviale Klasse dar, wenn $s|a_\varrho$ für jedes ϱ.

Ein Element aus $H^{-1}\big(\mathrm{Gal}(L'_{v'}/\mathbf{Q}_v), X_*(N')\big)$ wird gleichermaßen durch

$$\nu' = \sum_{\mathrm{Gal}(L'/\mathbf{Q})/\mathrm{Gal}(L'_{v'_2}/\mathbf{Q}_p)} a_{\varrho'}\bar{\nu}_{\varrho'}$$

dargestellt, und das Bild $\phi_{L,L'}(\nu_{\varrho'})$ ist $r\nu_{\varrho}$, wenn ϱ das Bild von ϱ' in $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ ist, und

$$r = [L'_{v'_2} : L_{v_2}].$$

Es geht also darum, L' so zu wählen, daß $s|r$. Das können wir erreichen, indem wir $L' = KL$ setzen, wobei K eine zweckmäßig gewählte abelsche Erweiterung von **Q** ist.

Wenn wir die globale Tate-Nakayama-Theorie anwenden, bekommen wir auf dieselbe Weise folgende Aussage.

Lemma 3.11. *Es sei L ein vorgegebener CM-Körper mit Ideleklassengruppe C_L. Dann gibt es eine CM-Erweiterung L' von L, so daß der Transitionshomomorphismus*

$$H^1(\mathrm{Gal}(L'/\mathbf{Q}), X_*(L') \otimes C_{L'}) \to H^1(\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q}), X_*(L) \otimes C_L)$$

Null ist.

Der nächste Satz folgt sofort aus Lemmas 3.9 und 3.10.

Korollar 3.12. *Es sei L ein vorgegebener CM-Körper. Dann gibt es eine CM-Erweiterung L' von L, so daß der Transitionshomomorphismus*

$$H^1(\mathbf{Q}, P_{L'}) \to H^1(\mathbf{Q}, P_L)$$

Null ist.

Nach Lemma 3.6 gibt es eine Einbettung

$$\psi_L = \psi_\mu : \mathcal{P}_L \hookrightarrow \mathcal{G}_{^L S}.$$

Aus der Definition von ψ_μ und aus Lemma 3.7 folgt die Kommutativität des folgenden Diagramms bis auf Äquivalenz

$$\text{(3.h)} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{L'} & \overset{\psi_{L'}}{\hookrightarrow} & \mathcal{G}_{L'} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{P}_L & \overset{\psi_L}{\hookrightarrow} & \mathcal{G}_L, \end{array}$$

in dem $\mathcal{G}_L = \mathcal{G}_{^L S}, \mathcal{G}_{L'} = \mathcal{G}_{^{L'} S}$. Nach den Definitionen des vorigen Abschnitts gelten weiter:

(3.i) $\qquad \psi_\mu \circ \zeta_{v_1} \cong \xi_\mu, \quad \psi_\mu \circ \zeta_{v_2} \cong \xi_{-\mu}.$

(3.j) Wenn v weder ∞ noch p teilt, dann ist $\psi_\mu \circ \zeta_v$ zur kanonischen Neutralisierung von $\mathcal{G}_L$ äquivalent.

Daß die lokalen Homomorphismen bis auf Äquivalenz verträglich mit der Abänderung von L sind, folgt allerdings aus den Ergebnissen des vorigen Abschnitts.

Zwei lokale Homomorphismen unterscheiden sich um ein Element in

$$H^1\big(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_v/\mathbf{Q}_v), {}^L S(\bar{\mathbf{Q}}_v)\big).$$

Das folgende Lemma besagt somit, daß für eine *nichtarchimedische* Stelle v von $\mathbf{Q}$ zwei beliebige kompatible Familien von lokalen Homomorphismen automatisch äquivalent sind. Insbesondere ist die Bedingung (3.j) sowie die zweite Hälfte von (3.i) automatisch erfüllt.

Lemma 3.13. *Es sei v eine nichtarchimedische Stelle von $\mathbf{Q}$. Zu jedem CM-Körper L gibt es einen CM-Körper L', der L erhält und so daß*

$$H^1\big(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_v/\mathbf{Q}_v), {}^{L'} S(\mathbf{Q}_v)\big) = 0.$$

Beweis. Wir betrachten die exakte Folge von algebraischen Tori über $\mathbf{Q}_v$ ([De2]):

$$1 \to R_{L_0'/\mathbf{Q}}\mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m \times R_{L'/\mathbf{Q}}G_m \to {}^{L'}S \to 1.$$

Die zugehörige lange exakte Kohomologiesequenz liefert

$$0 \to H^1(\mathbf{Q}_v, {}^{L'}S) \to \bigoplus_{v_0'} \mathrm{Br}(L_{0_{v_0'}}) \to \big(\bigoplus_{v'} \mathrm{Br}(L'_v)\big) \bigoplus \mathrm{Br}(\mathbf{Q}_v).$$

Die Summen gehen über die Stellen über v in den entsprechenden Körpern. Die Behauptung folgt, weil wir eine Galoiserweiterung vom CM-Typ $L' \supseteqq L$ finden können, so daß alle Stellen in L_0' über v in L' zerfallen. Man wählt nämlich eine total-reelle Galoiserweiterung K von L_0, die L an jeder v teilenden Stelle zerfällt, und setzt

$$L_0' = KL_0, \quad L' = KL.$$

Im folgenden Abschnitt werden wir einem Inverssystem von Gerben $\mathcal{M}_L$ mit ähnlichen Eigenschaften wie $\mathcal{P}_L$ begegnen, erstens Einbettungen

$$\phi_\mu : \mathcal{M}_L \hookrightarrow \mathcal{G}_L,$$

und zweitens lokalen Homomorphismen ζ_v', für die die Algebra von (3.h), (3.i) und (3.j) gelten. Es wird weiter gelten

(3.k) $$\phi_\mu(M_L) = \psi_\mu(P_L).$$

Wir identifizieren deshalb M_L und P_L.

Lemma 3.14. *Es sei angenommen, daß es für jede Primstelle v von $\mathbf{Q}$ und jedes L einen Isomorphismus*

$$\eta_L(v) : \mathcal{M}_L(v) \to \mathcal{P}_L(v)$$

gibt, der auf dem Kern M_L die Identität ist. Dann gibt es einen Isomorphismus $\eta_L : \mathcal{M}_L \to \mathcal{P}_L$, so daß $\eta_L(v)$ für jedes v zur Lokalisierung von η_L äquivalent ist. Die Familie $\{\eta_L\}$ ist bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt und die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{L'} & \longrightarrow & \mathcal{M}_L \\ {\scriptstyle \eta'_L}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \eta_L} \\ \mathcal{P}_{L'} & \longrightarrow & \mathcal{P}_L \end{array} \tag{3.1}$$

sind bis auf äquivalenz kommutativ.

Es sei $\mathcal{M}_L$ durch den Kozyklus $\{m_{\varrho,\sigma} | \varrho, \sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})\}$ definiert, und $\mathcal{P}_L$ durch $\{p_{\varrho,\sigma}\}$. Dann sind $\{m_{\varrho,\sigma}\}$ und $\{p_{\varrho,\sigma}\}$ lokal äquivalent. Nach dem Hasseprinzip von Lemma 3.5 können wir annehmen, daß $m_{\varrho,\sigma} \equiv p_{\varrho,\sigma}$.

Zwei bis auf Äquivalenz gegebene Isomorphismen $\eta_L, \eta'_L : \mathcal{M}_L \to \mathcal{P}_L$ unterscheiden sich um eine Klasse aus $H^1(\mathbf{Q}, P_L)$. Infolgedessen können wir aus Lemma 3.9 schließen, daß zwei lokal äquivalente Isomorphismen auch global äquivalent sind. Somit ist die Eindeutigkeit von η_L bewiesen.

Die Kommutativität des Diagramms (3.1) wird ähnlich bewiesen. Es seien nämlich p'_ϱ aus $\mathcal{P}_{L'}$. Repräsentanten der Elemente aus der Gruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ mit $p'_\varrho p'_\sigma = p'_{\varrho,\sigma} p'_{\varrho\sigma}$, und es sei $b_\varrho p_\varrho$, $b_\varrho \in P_L(\bar{\mathbf{Q}})$ das Bild von p'_ϱ. In der gleichen Weise seien m'_ϱ Repräsentanten mit $m'_\varrho m'_\sigma = m'_{\varrho,\sigma} m'_{\varrho\sigma}$, wobei allerdings $m'_{\varrho,\sigma} = p'_{\varrho,\sigma}$, und es sei $a_\varrho m_\varrho$ das Bild von m'_ϱ. Es sei schließlich

$$\eta_{L'}(m'_\varrho) = c'_\varrho \, p'_\varrho, \quad c'_\varrho \in \mathcal{P}_{L'},$$

und es sei c_ϱ das Bild von c'_ϱ in $\mathcal{P}_L$. Wir hätten η_L durch die Kommutativität von (3.1) definieren können, nämlich

$$\eta_L(m_\varrho) = a_\varrho^{-1} b_\varrho c_\varrho p_\varrho. \tag{3.m}$$

Somit folgt die Kommutativität aus der Eindeutigkeit.

Um η_L überhaupt zu definieren, nützen wir Lemma 3.10 aus und wählen L' derart, daß die Transitionshomomorphismen $H^1(\mathbf{Q}_v, P_{L'}) \to H^1(\mathbf{Q}_v, P_L)$ für alle v Null sind. Ein möglicher Isomorphismus $\xi : \mathcal{M}_{L'} \to \mathcal{P}_{L'}$ wird durch $m'_\varrho \to p'_\varrho$ definiert, denn $m'_{\varrho,\sigma} = p'_{\varrho,\sigma}$. Die Lokalisierung $\xi(v)$ unterscheidet sich von $\eta_{L'}(v)$ um ein α_v aus $H^1(\mathbf{Q}_v, P_L)$. Wir definieren η_L durch (3.m), indem wir c'_ϱ und folglich c_ϱ nicht mittels $\eta_{L'}$, das noch nicht vorhanden ist, definieren, sondern mittels ξ. Dann unterscheiden sich $\eta_L(v)$ und die Lokalisierung von η_L um das Bild von α_v in $H^1(\mathbf{Q}_v, P_L)$, das nach Voraussetzung Null ist.

Wir benötigen im nächsten Abschnitt eine Aussage, die uns garantiert, daß wir die Gerben $\mathcal{M}_L$ und $\mathcal{P}_L$ als Untergerben von $\mathcal{G}_L$ identifizieren können.

Lemma 3.15. *Mit den Bezeichnungen des vorigen Lemmas sei außerden angenommen, daß die lokalen Homomorphismen in der unendlichen Stelle*

$$\psi_\mu \circ \zeta_{v_1} \text{ und } \phi_\mu \circ \zeta'_{v_1}$$

von $\mathcal{W}$ nach $\mathcal{G}_L$ für alle L zueinander äquivalent sind. Dann ist das folgende Diagramm bis auf Äquivalenz kommutativ.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_L \arrow[dr, "\phi_\mu"] \arrow[dd, "\eta_L"'] & \\
& \mathcal{G}_L \\
\mathcal{P}_L \arrow[ur, "\psi_\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Nach Voraussetzung bilden die lokalen Homomorphismen ζ_v und ζ'_v für jede Stelle eine für variables L kompatible Familie. Daher ist dies auch für die lokalen Homomorphismen $\psi_\mu \circ \zeta_v$ und $\phi_\mu \circ \zeta'_v$ von $\mathcal{G}_L$ richtig. Für eine nichtarchimedische Stelle sind diese lokalen Homomorphismen somit nach Lemma 3.13 äquivalent, während dies für die unendliche Stelle nach Voraussetzung richtig ist. Nach Identifikation von $\mathcal{M}_L$ mit $\mathcal{P}_L$ unterscheiden sich die Einbettungen ϕ_μ und ψ_μ um eine Klasse aus $H^1(\mathbf{Q}, {}^L S)$, die folglich lokal trivial ist. Die Behauptung folgt aus dem Hasseprinzip für $H^1(\mathbf{Q}, {}^L S)$ ([De2], C.1).

Wir bemerken, daß wir im §2 die Gerbe $\mathcal{T}_{\nu_1,\nu_2}$ und den Homomorphismus τ_μ explizit konstruiert haben, ohne jedoch eine eindeutige Charakterisierung gegeben zu haben. Für die Gerbe $\mathcal{P}$ und den Homomorphismus τ_μ, der einem Kocharakter eines Torus, der die Serre-Bedingung erfüllt, zugeordnet ist, folgt eine solche Charakterisierung unmittelbar aus den Lemmata 3.14 und 3.15. Wir überlassen die Formulierung dem Leser (man benutze die Universaleigenschaft der Serre-Gruppe).

§4. DIE MOTIVISCHE GALOISGRUPPE

In diesem Abschnitt führen wir die motivische Galoisgruppe ein, indem wir die zugehörige Tannakakategorie definieren und beschreiben. Zunächst erinnern wir an die Beziehung zwischen Gerben und Tannakakategorien in einer Form, die wir verständlich finden, und zeigen, wie sich die Terminologie des §2 mit der in [DM] und [Sa] vergleicht.

Der Begriff einer Galoisgerbe über einem Körper k der Charakteristik Null, mit zugehörigen Kern G, wurde bereits zu Anfang des §2 definiert. Dort wurde auch der Begriff eines Homomorphismus zwischen Galoisgerbe erklärt. In jenem Abschnitt hatten wir neben der zu einer über k definierten linearen algebraischen Gruppe G assoziierten neutralen Galoisgerbe $\mathcal{G}_G$ auch Beispiele kennengelernt. Wenn V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über der algebraisch abgeschlossenen Hülle $\bar{k}$ von k ist, können wir eine Galoisgerbe $\mathcal{G}_V$ einführen.

Sie besteht aus allen Isomorphismen $g : V \to V$, die additiv und σ-linear bezüglich eines $\sigma = \sigma(g) \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ sind. Der Homomorphismus $g \to \sigma(g)$ definiert eine exakte Sequenz

$$1 \to GL(V) \to \mathcal{G}_V \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to 1.$$

Der Schnittkeim ist durch die Wahl einer K-Basis von V für eine endliche Erweiterung K von k gegeben. Eine Darstellung der Galoisgerbe $\mathcal{G}$ ist ein Homomorphismus $\mathcal{G} \to \mathcal{G}_V$. Die Kategorie aller Darstellungen einer gegebenen Galoisgerbe $\mathcal{G}$ ist mit einer offensichtlichen k-linearen Struktur, einem Tensorprodukt und einem Einsobjekt **1**, der Darstellung, die durch die natürliche Projektion nach $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ definiert wird, versehen.

Obgleich diese Begriffe einer Gerbe und der ihr zugeordneten Tannakakategorie nicht die üblichen sind, hängen sie für die uns interessierenden Fälle eng mit denen von [DM] und [Sa] zusammen. Aus [DM], §3.10, folgt, daß jede Gerbe im Sinne von Giraud, die einer Tannakakategorie über k entspricht, ein inverser Limes von algebraischen Gerben ist. Es sei $\underline{\mathcal{G}}$ eine algebraische Gerbe im Sinne von Giraud (der besseren Unterscheidung von den Galoisgerben wegen unterstreichen wir das Symbol), und es sei $Q \in \mathrm{ob}\underline{\mathcal{G}}_{\mathrm{Spec}\,\bar{k}}$ ein Objekt. Wir werden dem Paar $(\underline{\mathcal{G}}, Q)$ eine Galoisgerbe $\mathcal{G}$ zuordnen und zeigen, daß diese Zuordnung eine Äquivalenz von Kategorien darstellt. Dabei ist ein Homomorphismus $(\underline{\mathcal{G}}, Q) \to (\underline{\mathcal{H}}, R)$ in der ersten Kategorie ein Paar bestehend aus einem cartesischen Funktor $\Phi : \underline{\mathcal{G}} \to \underline{\mathcal{H}}$ und einem Isomorphismus in $\underline{\mathcal{H}}_{\mathrm{Spec}\,\bar{k}}$,

$$\tau : \Phi(Q) \cong R.$$

Bei dem Wörterbuch zwischen algebraischen Tannakakategorien und algebraischen Gerben müssen beim Ersetzen der Giraudgerben durch Galoisgerben die Tannakakategorien ersetzt werden durch algebraische Tannakakategorien, *zusammen* mit einem Faserfunktor über $\bar{k}$.

Nach der letzten Proposition im Anhang zu [DM] existiert eine endliche Erweiterung k' von k und ein Objekt $Q_{k'}$ aus $\underline{\mathcal{G}}_{\mathrm{Spec}\,\bar{k}'}$, dessen inverses Bild in $\underline{\mathcal{G}}_{\mathrm{Spec}\,\bar{k}}$, mit einem Isomorphismus mit Q versehen ist. Anders gesagt (siehe Anhang zu [DM]) ist Q mit einem Abstiegsdatum über k' ausgestattet. Es sei $\sigma Q \in \mathrm{ob}\ \underline{\mathcal{G}}_{\mathrm{Spec}\,\bar{k}}$ das Objekt, das durch Zurückziehen mittels $\sigma : \bar{k} \to \bar{k}$ entsteht. Dann ist das Abstiegsdatum nichts anderes als ein System von Isomorphismen $\phi_\sigma : Q \to {}^\sigma Q$ für $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, das die übliche Kozykelbedingung erfüllt. Wir definieren

$$\mathcal{G} = \{\phi : Q \to {}^\sigma Q | \sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)\}.$$

Weil es einen offensichtlichen Isomorphismus

$$\sigma : \mathrm{Isom}(Q, {}^\varrho Q) \to \mathrm{Isom}({}^\sigma Q, {}^{\sigma\varrho} Q)$$

gibt, sowie eine Paarung

$$\mathrm{Isom}(Q, {}^\varrho Q) \times \mathrm{Isom}({}^\varrho Q, {}^{\varrho\sigma} Q) \to \mathrm{Isom}(Q, {}^{\varrho\sigma} Q),$$

bildet $\mathcal{G}$ eine Gruppe, und zwar eine Erweiterung von $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ durch $G(\bar{k})$ mit $G \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathrm{Aut}(Q)$. Nach Voraussetzung ist G eine algebraische Gruppe über $\bar{k}$. Das Abstiegsdatum definiert eine Zerfällung der Erweiterung über $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k')$. Auf diese Weise erhalten wir eine Galoisgerbe $\mathcal{G}$.

Ein Quasi-Inverses ist leicht zu definieren. Es sei $\mathcal{G}$ eine Galoisgerbe. Dann ist die Tannakakategorie $\mathrm{Rep}\ \mathcal{G}$ mit einen Faserfunktor über $\bar{k}$ ausgestattet, der einer Darstellung den zugehörigen Vektorraum über $\bar{k}$ zuordnet. Wir erhalten also die zu der Tannakakategorie $\mathrm{Rep}\mathcal{G}$ zugeordnete Giraudgerbe $\underline{\mathcal{G}}$ samt einem Element Q aus $\mathrm{ob}\ \mathcal{G}_{\mathrm{Spec}\,\bar{k}}$, dem Faserfunktor. Da für beliebiges $\underline{\mathcal{G}}$ zwei Objekte aus $\mathrm{ob}\underline{\mathcal{G}}_{\mathrm{Spec}\,\bar{k}}$ isomorph sind, ist $\mathcal{G}$ bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt. Der Isomorphismus zwischen zwei möglichen $\mathcal{G}$ ist bis auf Konjugation mit einem Element aus $G(\bar{k})$ eindeutig bestimmt. Folglich unterscheiden wir nicht allzusehr zwischen $\underline{\mathcal{G}}$ und $\mathcal{G}$.

Die Kategorie der Motiv über einem beliebigen Körper kann konstruiert werden, wenn die Standardvermutungen vorausgesetzt werden, und wir werden die Konstruktion weiter unten skizzieren. Diese Kategorie ist eine rigide abelsche Tensorkategorie über **Q** mit End(**1**) $=$ **Q**. Falls der Körper von positiver Charakteristik ist, besitzt die Kategorie keinen Faserfunktor über **Q**, obwohl die Etalkohomologie einen Faserfunktor über $\mathbf{Q}_l$ liefert. Das bereitet unerwartet Schwierigkeiten, denn der Beweis des Satzes III, 3.2.2 in [Sa] ist lückenhaft, wie in [DM] hervorgehoben wird. Infolgedessen ist die Kategorie der Motive nicht ohne weiteres eine Tannakakategorie im Sinne von [DM]. Der Anmerkung am Ende von [DM] zufolge ist diese Lücke vielleicht nicht ernst. Es stellt sich aber heraus, daß für uns hier das Problem belanglos ist, denn es wird von den (sehr starken) Standardvermutungen sowieso behoben.

Um die spätere Darlegung nicht unterbrechen zu müssen, führen wir die notwendigen Betrachtungen an dieser Stelle aus.

Es sei C eine rigide abelsche Tensorkategorie über k mit End (**1**)$=$ k, und es sei k' eine Erweiterung von k ohne sonstige Eigenschaften. Wie in [DM], p. 156 führen wir die zu C äquivalente Unterkategorie der im wesentlichen konstanten Ind-Objekte C^e von Ind(C) ein (siehe [Sa], II.2.3.4). Der Funktor $i : C^e \to \mathrm{Ind}(C)_{(k')}$ wird formal durch dieselben Formeln wie in [DM] definiert. Es gilt

$$\mathrm{Hom}\big(i(X),\ i(Y)\big) \cong k' \otimes_k \mathrm{Hom}(X, Y).$$

Es sei $C_{k'}$ die von $i(X), X$ in C^e, erzeugte abelsche Tensor-Unterkategorie von Ind$(C)_{(k')}$ ([DM], 1.14). Wir betrachten i als einen Funktor von C nach $C_{k'}$. Wenn ω ein k'-wertiger Faserfunktor auf C ist, können wir ω' wie in [DM] einführen und dasselbe kommutative Diagramm bekommen.

(4.d)
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[dr, "\omega"'] & C_{k'} \arrow[d, "\omega'"] \\ & \mathrm{Vec}_{k'} \end{tikzcd}$$

Wir setzen voraus, daß es ein ω gibt, für das ω' exakt und treu ist, und zeigen, daß C dann eine Tannakakategorie ist.

Es gibt wenig zu zeigen. Aus (4.d) folgt

$$\mathrm{Aut}^{\otimes}\omega = \mathrm{Aut}^{\otimes}\omega'.$$

Dann schließen wir aus [DM], Th. 2.11, daß FIB(C) ([DM], §3.6) eine affine Giraudgerbe $\underline{\mathcal{G}}$ ist. Es muß weiter gezeigt werden, daß

$$C \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Rep}_k\underline{\mathcal{G}}$$

eine Äquivalenz von Kategorien ist. Wenn $C_0 \subseteqq C$, gibt es einen Funktor $\mathrm{FIB}(C) \to \mathrm{FIB}(C_0)$. Da jedes Φ aus $\mathrm{Rep}_k\underline{\mathcal{G}}$ sich durch $\mathrm{FIB}(C_0)$ faktorisiert mit C_0 endlich erzeugt, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß C endlich erzeugt ist ([DM], §1.14), denn C ist eine gefilterte Vereinigung seiner endlich erzeugten Unterkategorien. In diesem Fall können wir wegen der Proposition am Ende von [DM] k' durch eine endliche Galoiserweiterung ersetzen, ohne daß die Exaktheit und Treuheit von ω' verloren geht. Es sei also k' endlich und galois'sch.

Da können wir $C_{k'}$ mit $C_{(k')}$ identifizieren, indem wir $i(x)$ im obigen Sinne mit dem $i(x)$ von [DM], p. 156, identifizieren. Mittels des Morphismus id $\to ij$ wird X in $C_{k'}$ ein Unterobjekt von $ij(X)$. Wenn wir zu dualen Objekten übergehen, wird jedes X von $C_{k'}$ Quotient eines Objekts aus $i(C)$.

Es sei $\underline{\mathcal{G}}' = \mathrm{FIB}(C_{k'})$, i^* der induzierte Funktor $i^* : \mathrm{FIB}(C_{k'}) \to \mathrm{FIB}(C)$, und $i^{**} : \mathrm{Rep}_k\underline{\mathcal{G}} \to \mathrm{Rep}_{k'}\underline{\mathcal{G}}'$. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\lambda} & \mathrm{Rep}_k\underline{\mathcal{G}} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i^{**}} \\ C_{k'} & \xrightarrow[\lambda']{} & \mathrm{Rep}_{k'}\underline{\mathcal{G}}' \end{array}$$

ist kommutativ.

Der Funktor i ist exakt und treu, und

$$\dim_k \mathrm{Hom}(X,Y) = \dim_{k'} \mathrm{Hom}\big(i(X), i(Y)\big).$$

Wenn Φ_1 und Φ_2 in $\mathrm{Rep}_k\underline{\mathcal{G}}$ liegen, dann ist die Abbildung

(4.e) $$\mathrm{Hom}\big(\Phi_1, \Phi_2\big) \otimes_k k' \to \mathrm{Hom}(\Phi_1(\omega), \Phi_2(\omega)\big)$$

eine Einbettung. Wir stellen unsere Naivität unten bloß, indem wir den Grund dafür geben. Daraus folgt, daß

(4.f) $$dim_k\, \mathrm{Hom}(\Phi_1, \Phi_2) \leqq dim_{k'}\, \big(\mathrm{Hom}(i^{**}\Phi_1, i^{**}\Phi_2)\big).$$

Da λ' eine Äquivalenz von Kategorien ist, ist λ folglich volltreu und die Ungleichung (4.f) eine Gleichung.

Weil $i^{**}\Phi_1$ ein Unterobjekt von einem $\lambda' i(X) = i^{**}\lambda(X)$ ist, ist Φ_1 ein Unterobjekt von $\lambda(X)$. Der Quotient Φ_2 ist ein Unterobjekt von $\lambda(Y)$, und Φ_1 der Kern von einem Morphismus $\lambda(X) \to \lambda(Y)$. Weil λ volltreu ist, liegt Φ_1 im wesentlichen Bild von λ.

Nach der Definition ([DM], p. 153) gibt es für jeden Automorphismus σ von k' über k lineare Isomorphismen

$$\alpha_i : \Phi_i(\omega) \to \Phi_i(\omega) \otimes_\sigma k', \quad i = 1, 2$$

die mit $\mathrm{Hom}(\Phi_1, \Phi_2)$ verträglich sind. Es sei $\phi \in \mathrm{Hom}(\Phi_1, \Phi_2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha_2\phi &= (\phi \otimes 1)\alpha_1, \\ \alpha_2 a &= (1 \otimes a)\alpha_1 = (\sigma^{-1}(a) \otimes 1)\alpha_1, \quad a \in k. \end{aligned} \tag{4.g}$$

Wenn (4.e) keine Einbettung wäre, gäbe es ein minimales r und

$$\phi_1, \ldots, \phi_r \in \mathrm{Hom}(\Phi_1, \Phi_2),\ a_1, \ldots, a_r \in k',$$

so daß $\{\phi_1, \ldots, \phi_r\}$ über k linear unabhängig ist, während

$$\sum_{i=1}^{r} a_i\phi_i = 0$$

in $\mathrm{Hom} = \big(\Phi_1(\omega), \Phi_2(\omega)\big)$. Es ist notwendigerweise $r \geqq 2$. Aus (4.g) folgern wir für jedes σ,

$$\sum_{i=1}^{r} \sigma^{-1}(a_i)\phi_i = 0,$$

woraus wir sofort einen Widerspruch bekommen.

Wir kommen jetzt zur Konstruktion der Kategorie der Motive. Es sei $V_{\mathbf{F}}$ die Kategorie der glatten projektiven, nicht notwendig zusammenhängenden Varietäten über $\mathbf{F}$. Falls $X \in \mathrm{ob}V_{\mathbf{F}}$, so bezeichne $C^*(X)$ den graduierten Q-Vektorraum der algebraischen Zykel (graduiert nach Kodimension) modulo *numerischer Äquivalenz.* Wir bilden aus $V_{\mathbf{F}}$ eine neue Kategorie $CV_{\mathbf{F}}$ mit denselben Objekten, die wir der Klarheit halber mit $h(X)$ bezeichnen, und mit Morphismen die algebraischen Korrespondenzen vom Grad Null von X nach Y, ([Sa], A.0.3.3)

$$\mathrm{Hom}_{CV_{\mathbf{F}}}\big(h(X), h(Y)\big) = CV^0(X, Y).$$

Falls also X irreduzibel von der Dimension n ist, so ist $CV^0(X,Y) = C^n(X \times Y)$. Die Kategorie $CV_{\mathbf{F}}$ ist eine $\mathbf{Q}$-lineare Kategorie mit einer direkten Summe $\oplus$ (die der disjunkten Vereinigung entspricht) und einem Tensorprodukt $\otimes$ (das dem kartesischen Produkt entspricht) mit Einselement $\mathbf{1} = h(\mathrm{Spec}\,\mathbf{F})$, das mit natürlichen Assoziativitäts- und Kommutativitätsgesetzen [DM], §1.1, versehen ist. Die Zuordnung $X \to h(X)$ ist ein *kontravarianter* Funktor (Graph eines Morphismus)

$$h : V_{\mathbf{F}}^{\mathrm{opp}} \to CV_{\mathbf{F}}.$$

Die "falsche" Kategorie der *effektiven* Motive $\dot{M}_{\mathbf{F}}^{+}$ ist die pseudoabelsche (Karoubi-) Hülle von $CV_{\mathbf{F}}$, die aus $CV_{\mathbf{F}}$ durch formales Hinzufügen der Bilder und Kerne von Projektoren entsteht ([DM], p. 201). In $\dot{M}_{\mathbf{F}}^{+}$ zerfällt $h(\mathbf{P}^1)$,

$$h(\mathbf{P}^1) = \mathbf{1} \oplus L.$$

Dabei ist $\mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(M \otimes L, N \otimes L)$ für zwei effektive Motive M und N ([Sa], VI, 4.1.2.5). Die "falsche" Kategorie der Motive $\dot{M}_{\mathbf{F}}$ entsteht aus $\dot{M}_{\mathbf{F}}^{+}$ durch formales Invertieren des Objekts L. Es sei $T = L^{-1}$ das "Tate-Motiv" und $M(n) = M \otimes T^n$. Dann ist

$$\mathrm{Hom}_{\dot{M}_{\mathbf{F}}}\big(M(m), N(n)\big) = \mathrm{Hom}(M \otimes L^{N-m}, N \otimes L^{N-n}), \quad N \geqq m, n.$$

Wir wollen aus der so konstruierten $\otimes$-Kategorie eine ($\mathbf{Z}$-) graduierte polarisierte Tannakakategorie machen. Dazu müssen wir die Standardvermutungen über algebraische Zyklen annehmen. Wir fixieren im weiteren ein $l \neq p$ und arbeiten mit der graduierten l-adischen Kohomologie $H_l^*(X) = \bigoplus H^i(X, \mathbf{Q}_l)$. Sie ist mit der Zykelabbildung

$$\gamma^i : C^i(X) \to H_l^{2i}(X)(i)$$

und der Spurabbildung

$$\mathrm{Tr}_X : H_l^{2n}(X)(n) \to \mathbf{Q}_l, \quad n = dim\, X$$

versehen. Es gelten die Künnethformel, die Poincarédualität und der starke Lefschetzsatz. Die Standardvermutungen besagen:

1. Die Zykelabbildungen γ^i sind injektiv.
2. Die durch einen ampeln Divisor definierte Abbildung

$$l^{n-2p} : C^p(X) \to C^{n-p}(X)$$

ist bijektiv für $0 \leqq 2p \leqq n = dim\, X$.

3. Auf den primitiven algebraischen Zyklen

$$C^p_{pr}(X) \underset{\mathrm{Df.}}{=} \mathrm{Ker}\, l^{n-2p+1} = C^p(X) \cap H^{2p}_{pr}(X)$$

ist die symmetrische Bilinearform

$$C^p_{pr}(X) \times C^p_{pr}(X) \to \mathbf{Q}, \ (x, y) \mapsto (-1)^p \cdot \mathrm{Tr}_X(l^{n-2p} xy)$$

positiv definit für $0 \leqq 2p \leqq n$. Mittels Zerlegung in primitive Komponenten und passende Zeichensetzung ([Sa], VI. A.2.2.2.3) erhält man auf ganz $C^p(X)$ eine positiv-definite symmetrische Bilinearform

$$(x, y) \to \mathrm{Tr}_X(x \cdot *y).$$

(Diese Vermutungen sind nicht voreinander unabhängig [K].)

Aus diesen Vermutungen folgt, daß es Elemente

$$\pi^i \in C^{2n}(X \times X), \quad n = dim\, X$$

gibt, die die Zerlegung in Künnethkomponenten der Diagonale in der l-adischen Kohomologie geben:

$$\Delta_X = \sum \pi^i \in \bigoplus H_l^{2n-i}(X) \otimes H_l^i(X).$$

(Diese letzte Tatsache ist in Wirklichkeit über **F** bewiesen [K-M].)

Somit erhalten wir eine Zerlegung von $\mathrm{id}_{\mathrm{h(X)}}$ in paarweise orthogonale Idempotente

$$\mathrm{id}_{\mathrm{h(X)}} = \pi^0 \oplus \cdots \oplus \pi^{\mathrm{n}}$$

und entsprechend eine Zerlegung in $\dot{M}_{\mathbf{F}}^+$

$$h(X) = h^0(X) \oplus \cdots \oplus h^n(X).$$

Diese Graduierung der Objekte in $CV_{\mathbf{F}}$ erweitert sich in offensichtlicher Weise in eine Graduierung der Objekte aus $\dot{M}_{\mathbf{F}}$, so daß die Künnethformel gilt.

Um die Kategorie der *echten* Motive $M_{\mathbf{F}}$ aus der Kategorie der *falschen* Motive $\dot{M}_{\mathbf{F}}$ zu erhalten, ändern wir das Kommutativitätsgesetz ψ und den *homogenen* Objekten ab durch

$$\psi = (-1)^{r \cdot s} \dot{\psi} : M \otimes N \tilde{\longrightarrow} N \otimes M, \quad \deg M = r, \deg N = s$$

und setzen es linear fort. Wir wollen zeigen, daß wir auf diese Weise eine halbeinfache Tannakakategorie über **Q** erhalten haben. Dazu überzeugen wir uns zunächst davon, daß die Standardvermutungen zur Folge haben, daß die l-adische Kohomologie einen treuen exakten Funktor $H_l : M_{\mathbf{F}_{\mathbf{Q}_l}} \to \mathrm{Vec}_{\mathbf{Q}_l}$ definiert. Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus der Injektivität der kanonischen Abbildung

(4.h) $$\mathrm{Hom}(M, N) \otimes \mathbf{Q}_l \to \mathrm{Hom}\big(H_l^*(M), H_l^*(N)\big).$$

Es sei X eine Varietät. Die Bilinearform $\mathrm{Tr}_X(x \cdot y)$ auf $C^*(X)$ nimmt Werte in **Q** und ist wegen der Standardvermutungen nicht-ausgeartet. Sie ist die Einschränkung der entsprechenden Bilinearform mit Werten in $\mathbf{Q}_l$ auf der l-adischen Kohomologie. Folglich ist der Kern der natürlichen Abbildung

$$C^*(X) \otimes \mathbf{Q}_l \to H_l^*(X)$$

im Kern der Bilinearform auf $C^*(X) \otimes \mathbf{Q}_l$, die durch $\mathbf{Q}_l$-lineare Erweiterung aus der Bilinearform auf $C^*(X)$ entsteht, enthalten. Er ist folglich Null. Die obige Behauptung ist somit bewiesen, falls M und N die zu Varietäten assoziierten Motive sind. Dann aber folgt die Behauptung leicht auch für effektive Motive und schließlich auch für alle Motive. Als nächstes bemerken wir, daß der Beweis von Prop. 6.5 in [DM] (vgl. [Sa], VI.4.2.2) zeigt, daß jedes unzerlegbare Motiv einfach ist. (In loc.cit. wird nicht benutzt, daß der dort verwendete treue Funktor Werte in $\mathrm{Vec}_{\mathbf{Q}}$ hat; ein treuer **Q**-linearer Funktor nach $\mathrm{Vec}_{k'}$ für eine beliebige Erweiterung k' von **Q** leistet dieselben Dienste.) Wir können also (mit derselben Bemerkung) das Lemma 6.6 in [DM] anwenden und schließen, daß $M_{\mathbf{F}}$ eine halbeinfache **Q**-lineare abelsche Tensorkategorie ist. Offenbar ist $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = \mathbf{Q}$, so daß lediglich die Rigidität der Kategorie noch nachzuweisen ist. Diese folgt wie in [DM], p. 204 unten. Man erhält

$$h(X)^{\vee} = h(X)(n),$$

falls X eine irreduzible Varietät der Dimension n ist. Daß $M_{\mathbf{F}}$ eine Tannakakategorie ist, folgt jetzt aus der Injektivität von (4.h), die das treue exakte ω' in (4.d) ergibt.

Die Kategorie der Motive hat zusätzliche Strukturen. Genauer gesagt, ist $M_{\mathbf{F}}$ mit seiner **Z**-Graduierung w und dem Tate-Motiv T ein Tate-Tripel über **Q** [DM], §5. Es existiert eine Polarisierung π_M dieses Tate-Triples, die durch die Eigenschaft, daß für eine Varietät X die Polarisierungsmenge $\pi_M\big(h^r(X)\big)$ die Form $\mathrm{Tr}_X(x \cdot *y)$ enthält, charakterisiert ist.

Falls wir als Grundkörper an Stelle von **F** den Körper $\bar{\mathbf{Q}}$ der algebraischen Zahlen nehmen, so wurde in [DM] eine Kategorie der Motive $M_{\bar{\mathbf{Q}}}$ konstruiert. Dabei werden in der eben skizzierten Konstruktion die algebraischen Korrespondenzen (modulo numerischer Äquivalenz) durch die von den *absoluten Hodgezykeln* vermittelten kohomologischen Korrespondenzen ersetzt. Ein Vorteil dieses Vorgehens ist, daß keine unbewiesenen Vermutungen verwendet werden müssen. Ein Nachteil ist, daß die Reduktion modulo p eines absoluten Hodgezykels nicht definiert ist. Im folgenden interessiert uns nur die von den abelschen Varietäten vom CM-Typ und $\mathbf{P}^1$ erzeugte Unter-Tannakakategorie ([DM], 1.14.) $CM_{\bar{\mathbf{Q}}}$ von $M_{\bar{\mathbf{Q}}}$. Damit die Konstruktionen von $CM_{\bar{\mathbf{Q}}}$ und $M_{\mathbf{F}}$ verträglich sind, müssen wir für das weitere die *Hodgevermutung für abelsche Varietäten vom CM-Typ annehmen*. Die Standardvermutungen über algebraische Zyklen für diese Varietäten sind dann übrigens eine Folgerung aus der Hodgetheorie. Eine abelsche Varietät vom CM-Typ über $\bar{\mathbf{Q}}$ hat gute Reduktion modulo p, wie auch die projektive Gerade. Genauer gesagt, ist eine solche abelsche Varietät bereits über einer endlichen Erweiterung K von **Q** definiert. Nach eventueller Vergrößerung von K besitzt sie gute Reduktion in der von der fixierten Einbettung von $\bar{\mathbf{Q}}$ in $\bar{\mathbf{Q}}_p$ ausgezeichneten Stelle über p ([Se-Ta], Th. 6).

Dabei ist die Spezialisierungsabbildung auf den Chowringen ein Homomorphismus [Fu], 20.3.1.:

$$A(X) \to A(X_{\mathbf{F}}).$$

Aus den Standardvermutungen folgt, daß sich diese Abbildung über die *numerischen* Äquivalenzklassen faktorieiert, und dies kompatibel mit den Zykelabbildungen in der l-adischen Kohomologie, d.h. das folgende Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} C^*(X) & \longrightarrow & C^*(X_{\mathbf{F}}) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \mathbf{H}_l^{2*}(X)(*) & \xrightarrow{\sim} & H_l^{2*}(X_{\mathbf{F}})(*). \end{array}$$

In der Tat, falls $x \in A(X)$ numerisch äquivalent zu Null ist, so ist $\mathrm{Tr}_X(x \cdot *x) = 0$, also auch das Bild von x in $A(X_{\mathbf{F}})$ numerisch äquivalent zu Null. Man sieht leicht, daß man auf diese Weise einen Tensor-Funktor erhält, der die Reduktion modulo p dieser Motive beschreibt

$$\mathrm{red} : CM_{\bar{\mathbf{Q}}} \to M_{\mathbf{F}}.$$

Genauer sei $L \subseteqq \bar{\mathbf{Q}}$ ein CM-Körper und ${}^L CM_{\bar{\mathbf{Q}}}$ die Unter-Tannakakategorie von $CM_{\bar{\mathbf{Q}}}$, die von den abelschen Varietäten vom CM-Typ durch L und von $\mathbf{P}^1$ erzeugt wird. Für $L \subseteqq L'$ erhalten wir

$${}^L CM_{\bar{\mathbf{Q}}} \to {}^{L'} CM_{\bar{\mathbf{Q}}}.$$

Dazu fassen wir eine abelsche Varietät X mit komplexer Multiplikation durch L als direkten Summanden der abelschen Varietät (bis auf Isogenie) mit komplexer Multiplikation durch $L', X \otimes_L L'$ (mit offensichtlicher Definition) auf. Die rationale Kohomologie definiert einen natürlichen Faserfunktor von ${}^L CM_{\bar{\mathbf{Q}}}$ über $\mathbf{Q}$:

$${}^L CM_{\bar{\mathbf{Q}}} \to \mathrm{Vec}_{\mathbf{Q}}, \quad h(X) \mapsto \oplus H^i(X \times_{\bar{\mathbf{Q}}} \mathbf{C}, \mathbf{Q}).$$

Deligne ([D2], (A)) hat gezeigt, daß die entsprechende neutralisierte Gerbe über $\mathbf{Q}$ die zur Serregruppe gehörige Giraudgerbe $\underline{\mathcal{G}}_L = \underline{\mathcal{G}}_{{}^L S}$ ist ($\underline{\mathcal{G}}_{{}^L S}$ entspricht der Galoisgerbe $\mathcal{G}_L = \mathcal{G}_{{}^L S}$), und daß der den obigen Funktoren entsprechende Homomorphismus die natürliche Projektion ist,

$$\mathcal{G}_{L'} \to \mathcal{G}_L.$$

Es sei ${}^L M_{\mathbf{F}}$ die Unter-Tannakakategorie von $M_{\mathbf{F}}$, die durch das Bild von ${}^L CM_{\bar{\mathbf{Q}}}$ unter dem Reduktionsfunktor erzeugt wird ([DM], 1.14). Weil ${}^L CM_{\bar{\mathbf{Q}}}$ eine algebraische Tannakakategorie ist, ist auch ${}^L M_{\mathbf{F}}$ eine algebraische Tannakakategorie ([DM], 2.20). Ihre Gerbe bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_L$. Falls $L \subseteqq L'$, so ist der Homomorphismus von Gerben $\mathcal{M}_{L'} \to \mathcal{M}_L$ surjektiv, weil der Funktor ${}^L M_{\mathbf{F}} \to {}^{L'} M_{\mathbf{F}}$ volltreu ist und jedes Unterobjekt eines Bildes das Bild eines Unterobjektes ist ([DM], 2.21, siehe Anmerkung 1 am Ende des Abschnitts). Wir erhalten kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathcal{M}}_{L'} & \xrightarrow{\phi_{L'}} & \underline{\mathcal{G}}_{L'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\mathcal{M}}_L & \xrightarrow{\phi_L} & \underline{\mathcal{G}}_L. \end{array}$$

Um die von uns gewünschten Eigenschaften von $\mathcal{M}_L$ nachzuweisen, müssen wir die *Tatevermutung* für die l-adische Kohomologie (für das von uns fixierte l) von algebraischen Varietäten über endlichen Körpern [Sa], A.4 *annehmen.* Es sei $\mathrm{Tate}_{\mathbf{F}_{p^m}}$ die Tannakakategorie über $\mathbf{Q}_l$ der stetigen halb-einfachen l-adischen Darstellungen der Galoisgruppe $T_m = \mathrm{Gal}(\mathbf{F}/\mathbf{F}_{p^m})$, die mit einem natürlichen Faserfunktor versehen ist

$$\omega_m : \mathrm{Tate}_{\mathbf{F}_{p^m}} \to \mathrm{Vec}_{\mathbf{Q}_l}.$$

Wir bilden den direkten Limes (Restriktion)

$$\mathrm{Tate}_{\mathbf{F}} = \varinjlim \mathrm{Tate}_{\mathbf{F}_{p^m}}$$

und erhalten so eine neutralisierte, halbeinfache Tannakakategorie über $\mathbf{Q}_l$. Das Frobeniuselement in $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}/\mathbf{F}_{p^m})$ definiert einen Isomorphismus $T_m \cong \hat{\mathbf{Z}}$. Die proalgebraische Gruppe $\mathbf{T}_m = \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_m)$ ist die algebraische Hülle von T_m über $\mathbf{Q}_l$, und es ist

$$\mathrm{Rep.cont.}_{\mathbf{Q}_l}(T_m) \to \mathrm{Rep.}_{\mathbf{Q}_l}(\mathbf{T}_m)$$

(vgl. [Sa], V.0.3.1.). Insbesondere ist $\mathbf{T}_m$ abelsch und folglich ([DM], 2.23), weil $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_1}(\mathbf{T}_m)$ eine halbeinfache Tannakakategorie ist, ein projektiver Limes von algebraischen Gruppen von multiplikativem Typ. Wir wollen die Charaktergruppe von $\mathbf{T}_m$ bestimmen. Dazu erweitern wir die Skalare von $\mathbf{Q}_l$ nach $\bar{\mathbf{Q}}_l$, so wie dies am Anfang dieses Abschnitts erklärt wurde.

$$\mathrm{Rep.cont.}_{\mathbf{Q}_l} T_{m\bar{\mathbf{Q}}_l} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep.}_{\mathbf{Q}_l} \mathbf{T}_{m_{\bar{\mathbf{Q}}_l}} = \mathrm{Rep}_{\bar{\mathbf{Q}}_l} \mathbf{T}_m.$$

(Für die letze Identifikation vgl. [DM], 3.12.) Man sieht leicht ein, daß die Kategorie links einfach die Kategorie der diagonalisierbaren Darstellungen von T_m in einem $\bar{\mathbf{Q}}_l$-Vektorraum, bei denen die Eigenwerte des Frobeniuselements l-adische Einheiten sind, ist. Diese bilden eine halbeinfache Tannakakategorie über $\bar{\mathbf{Q}}_l$, in der die einfachen Objekte den Rang 1 ([DM], 1.7.3.) haben. Weiterhin werden die einfachen Objekte durch die Gruppe $\mathcal{O}^*_{\bar{\mathbf{Q}}_l}$ der l-adischen Einheiten parametrisiert. Wir schließen ([Sa], VI.3.5.1.) daß

$$X^*(\mathbf{T}_m) \cong \mathcal{O}^*_{\bar{\mathbf{Q}}_l}.$$

Die Transitionsabbildung $X^*(\mathbf{T}_m) \to X^*(\mathbf{T}_{m'})$ für $m|m'$ schickt π nach $\pi^{\frac{m'}{m}}$.

Im nächsten Lemma gehen wir zu Galoisgerben über. Folglich ist ϕ_L nur bis auf Konjugation mit einem Element aus ${}^LS(\bar{k})$ bestimmt.

Lemma 4.1. *Es sei L galois'sch. Der kanonische Homomorphismus*

$$\mathcal{M}_L \xrightarrow{\phi_L} \mathcal{G}_L$$

is injektiv. Die Kerne M_L von $\mathcal{M}_L$ und P_L von $\mathcal{P}_L$ sind als Untertori von ${}^LS$ identisch.

Beweis. Aus den Definitionen folgt, daß jedes Objekt aus ${}^LM_{\mathbf{F}}$ isomorph zu einem Subquotienten von $\mathrm{red}(X)$ für ein $X \in \mathrm{ob}^L CM_{\bar{\mathbf{Q}}}$ ist. Daher ([DM], 2.21) ist die erste Aussage klar (siehe Anm. 1). Wir hatten weiter oben gezeigt, daß die l-adische Kohomologie einen treuen Funktor von Tannakakategorien über $\mathbf{Q}_l$ definiert

$${}^LM_{\mathbf{F}_{\mathbf{Q}_l}} \xrightarrow{H_l} \mathrm{GradTate}_{\mathbf{F}}.$$

Die Tatevermutung über $\mathbf{F}$ ist *äquivalent* zur Aussage, daß dieser Funktor volltreu ist ([Sa], A.4). (Diese Vermutung ist eine Folgerung der Tatevermutung über endlichen Körpern.) Weil die Tannakakategorie $\mathrm{GradTate}_{\mathbf{F}}$ halbeinfach ist, ist dann auch jedes Unterobjekt eines Bildes das Bild eines Unterobjekts. Folglich ist der Homomorphismus auf den Charaktermoduln der Kerne injektiv ([DM], 2.21, siehe Anmerkung 1)

$$X^*(M_L) \to X^*(\mathbf{T}) = \varinjlim X^*(\mathbf{T}_m).$$

Weil M_L eine algebraische Gruppe ist, folgt aus der Definition des direkten Limes auf der rechten Seite, daß $X^*(M_L)$ torsionfrei ist und somit M_L ein Torus.

Wir betrachten das Diagramm mit den offensichtlichen Pfeilen

$$\begin{tikzcd}
& X^*(M_L) \arrow[dl, hook'] & \\
X^*(\mathbf{T}) & & X^*({}^L S) \arrow[ul] \arrow[dl, "X^*(\psi_L)"] \\
& X^*(P_L) \arrow[ul, hook] &
\end{tikzcd}$$

Dabei ist die Surjektivität des oberen schrägen Pfeils bereits klar, während sie für den unteren schrägen Pfeil aus Lemma 3.6 folgt. Somit genügt es für den Beweis, die Kommutativität des Diagramms nachzuweisen. Wir betrachten ein Element $\chi \in X^*({}^L S)$ der Form

$$\chi = \sum n_\sigma \cdot [\sigma], \quad n_\sigma + n_{\iota\sigma} = 1,$$

$n_\sigma = 0$ oder 1. Sein Bild unter $X^*(\psi_L)$ ist (siehe Rechnung nach 3.7) die Weilzahl $\pi_\chi = \pi \in L$ mit

(1) $\pi \cdot \bar{\pi} = q$

(2) $|\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L_v/\mathbf{Q}_p)} \sigma\pi|_p = q^{-\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L_v/\mathbf{Q}_p)} n_\sigma}$ für $v|p$.

Hierbei ist $q = p^m$ mit genügend großem m. Andererseits entspricht χ einer abelschen Varietät vom CM-Typ (L, Φ) bis auf Isogenie mit $\Phi = \{\sigma | n_\sigma = 1\}$, [Mu2], p. 212. Diese abelsche Varietät ist über einer endlichen Erweiterung von $\mathbf{Q}$ definiert und hat dort gute Reduktion modulo p über einem endlichen Körper $\mathbf{F}_q$. Es sei π der Frobeniusendomorphismus dieser abelschen Varietät über $\mathbf{F}_q$ aufgefaßt als Element von L. Dies ist eine Einheit außerhalb ∞ und p (Existenz der l-adischen Kohomologie) und erfüllt (1) (Weilvermutungen) und (2) (Formel von Shimura-Taniyama). Folglich sind die Bilder von χ unter den beiden Homomorphismen von $X^*({}^L S)$ nach $X^*(\mathbf{T})$ identisch. Die Behauptung folgt, weil solche Elemente $X^*({}^L S)$ erzeugen ([D2], A.2.).

Korollar 4.2. *Es sei L galois'sch. ${}^L M_{\mathbf{F}}$ ist die Unter-Tannakakategorie der Motive, deren Frobeniusendomorphismen bzgl. eines hinreichend großen endlichen Körpers alle Eigenwerte in L haben.*

Die Tannakakategorie ${}^L M_{\mathbf{F}}$ ist mit dem Faserfunktor über $\mathbf{Q}_l$ ausgestattet, der durch die l adische Kohomologie definiert wird, für jedes $l \neq p$:

$$ {}^L M_{\mathbf{F}} \xrightarrow{H_l} \mathrm{Vec}_{\mathbf{Q}_l}. $$

Dieser definiert eine Trivialisierung ζ_l' von $\mathcal{M}_L$ über $\mathbf{Q}_l$. Die kristalline Kohomologie (tensorisiert mit $\mathbf{Q}$) ordnet jedem Motiv ein (F)-Isokristall über dem Quotientenkörper $k = F(\mathbf{F})$ der Wittvektoren über $\mathbf{F}$ zu (siehe Anmerkung 2 am Ende des Abschnitts). Die zur Tannakakategorie der Isokristalle über k gehörige Gerbe ist die Dieudonnégerbe $\mathcal{D}$. Genauer gesagt ist diese Tannakakategorie zu dem gefilterten inversen System der Gerben $\mathcal{D}^{L_n}$ gehörig, wobei L_n die unverzweigte Erweiterung vom Grade n von $\mathbf{Q}_p$ bezeichnet. Dies folgt aus [Sa], VI.3.3.2 (siehe auch die Anmerkung zum nächsten Abschnitt). Die kristalline Kohomologie definiert somit einen Homomorphismus von Gerben

$$ \zeta_p' : \mathcal{D} \to \mathcal{M}_L. $$

Die so konstruierten lokalen Homomorphismen sind offensichtlich kompatibel bezüglich der Abänderung von L. Für $v = l \neq p$ sind die lokalisierten Gerben $\mathcal{P}_L(v)$ und $\mathcal{M}_L(v)$ als neutrale Gerben mit demselben Kern isomorph. Für $v = p$ sind die Isomorphieklassen von $\mathcal{P}_L(v)$ bzw. $\mathcal{M}_L(v)$ als Gerben über $\mathbf{Q}_p$ mit $M_L = P_L$ eindeutig bestimmt durch die Einschränkungen der lokalen Homomorphismen ζ_p bzw. ζ_p' auf den Kern. Um zu zeigen, daß diese Einschränkungen identisch sind, genügt es, die Einschränkungen ν^{L_n} bzw. ${\nu'}^{L_n}$ von $\psi_L \circ \zeta_p : \mathcal{D}^{K_n} \to \mathcal{G}_L$ bzw. $\phi_L \circ \zeta_p' : \mathcal{D}^{K_n} \to \mathcal{G}_L$ zu vergleichen. Die erste ist gegeben durch die Formel

$$ |\prod_{\mathrm{Gal}(L_n/\mathbf{Q}_p)} \sigma\pi_\chi|_p = q^{-\langle v^{L_n}, \chi\rangle}, \quad \chi \in X^*({}^L S). $$

Der Homomorphismus $\phi_L \circ \zeta_p' : \mathcal{D}^{L_n} \to \mathcal{G}_L$ definiert ein Element b aus Kottwitz's Menge $B({}^L S)$ (vgl. Anmerkung zum §5). Der Homomorphismus ${\nu'}^{L_n}$ ist durch die Folge der Anstiege des Newtonpolygons der zu $\phi_L \circ \zeta_p'$ gehörigen Isokristallstruktur auf den Darstellungen von ${}^L S$ gegeben (vgl. [K4], §4.2). Kottwitz hat gezeigt ([K4], 4.3), daß

$$ \langle {\nu'}^{L_n}, \chi\rangle = n \cdot \mathrm{val}\big(\chi(b)\big), $$

wobei val die normalisierte Bewertung bezeichnet. Die gewünschte Gleichheit folgt, weil im Fall, daß $\chi = \chi_\phi$ zu einer abelschen Varietät vom CM-Typ (L, Φ) über $\mathbf{F}_q$ gehört, sein Frobeniusendomorphismus π_χ in folgender Beziehung zum F des Dieduonnémoduls steht ([Dem], p.63):

$$ \pi_\chi = b \cdot \sigma(b) \cdots \sigma^{m-1}(b). $$

Um die lokale Zusatzstruktur von $\mathcal{M}_L$ in der unendlichen Stelle zu definieren, verwenden wir die graduierte Polarisierung π_M des Tatetripels $\big({}^L M_{\mathbf{F}}, w, \mathbf{1}\,(1)\big)$. Weil es Motive von ungeradem Grad in ${}^L M_{\mathbf{F}}$ gibt, dürfen wir

[DM], 5.20 anwenden. Das dort beschriebene Tatetripel $(\mathbf{V}, w, T)$ ist gerade die graduierte Tannakakategorie, die zur $\mathbf{R}$-Gerbe $\mathcal{W}$ gehört. Somit erhalten wir einen bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmten Homomorphismus von Gerben

$$\zeta'_\infty : \mathcal{W} \to \mathcal{M}_L,$$

der auf den zugehörigen Tate-Triplen einen Funktor definiert

$$\left({}^L M_{\mathbf{F}}, w, \mathbf{1}(1)\right) \to (\mathbf{V}, w, T),$$

der bis auf Isomorphie durch die Eigenschaft charakterisiert ist, daß er die Polarisierung π_M in die kanonische Polarisierung π_{can} von $(\mathbf{V}, w, T)$ überführt. Wir wollen zeigen, daß die Komposition $\phi_L \circ \zeta'_\infty$ äquivalent zu $\xi_\mu : \mathcal{W} \to \mathcal{G}_L$ ist. Aber gerade wie ${}^L M_{\mathbf{F}}$ ist auch ${}^L CM_{\bar{\mathbf{Q}}}$ in natürlicher Weise mit einer graduierten Polarisierung π_{CM} versehen und unter dem Reduktionsfunktor geht π_{CM} in π_M über. Somit ist die Komposition $\phi_L \circ \zeta'_\infty$ der durch die Prop. 5.20 in [DM] zu $({}^L CM_{\mathbf{Q}}, \pi_{CM})$ assoziierte Homomorphismus von $\mathcal{W}$ nach $\mathcal{G}_L$. Dieser Homomorphismus ist aber leicht zu bestimmen. Auf den Kernen ist er durch die Graduierung gegeben, also gleich dem Gewichtshomomorphismus

$$v = \mu + \iota\mu : \mathbf{G}_m(\mathbf{C}) \to {}^L S(\mathbf{C}).$$

Die graduierte Polarisierung π_{CM} auf der neutralen Tannakakategorie ${}^L CM_{\bar{\mathbf{Q}}}$ ist von der Form π_C für ein wohlbestimmtes Hodgeelement $C \in {}^L S(\mathbf{R})$ $\big($[DM], 4.22 und 4.25 (b)$\big)$. Aus der Hodgetheorie folgt, daß $C = \nu(i)$. In der Tat induziert C auf einer $\mathbf{R}$-rationalen Darstellung V von ${}^L S$ gerade den zu der auf V induzierten Hodgestruktur gehörigen Weiloperator [W] und die von Weil definierte Bilinearform [W], IV, Cor. zu Th. 7, liegt in $\pi_{CM}(V)$. Nach Definition des Homomorphismus $\phi_L \circ \zeta'_\infty$ ([DM], 5.20) geht also das gewählte Erzeugende $w_\iota \mathcal{W}$ mit $w_\iota^2 = -1$ über in

$$v(i) \rtimes \iota \in {}^L S(\mathbf{C}) \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}).$$

Es ist klar, daß dieser Homomorphismus äquivalent zu $\xi_\mu : \mathcal{W} \to \mathcal{G}_L$ ist:

$$\mu(i)(v(i) \rtimes \iota)\mu(i)^{-1} = \mu(-1) \rtimes \iota.$$

Zusammenfassend haben wir gezeigt, daß in jeder Stelle v die Gerben $\mathcal{P}_L(v)$ und $\mathcal{M}_L(v)$ isomorph sind. Wegen der vorhergehenden Bemerkungen sind überdies die Voraussetzungen des Lemmas 3.15 erfüllt. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Satz 4.4. *Es gibt eine Familie von Isomorphismen, $\eta_L : \mathcal{M}_L \to \mathcal{P}_L$, so daß $\eta_L \circ \zeta'_v \cong \zeta_v$, und so daß folgende Diagramme bis auf Äquivalenz kommutativ sind:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_{L'} \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{L'}"'] & \mathcal{M}_L \arrow[d, "\eta_L"] \\
\mathcal{P}_{L'} \arrow[r] & \mathcal{P}_L
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_L \arrow[rd, "\phi_L"] \arrow[d] & \\
\mathcal{P}_L \arrow[r, "\psi_L"'] & \mathcal{G}_L
\end{tikzcd}$$

Anmerkung 1. Die zitierte Literaturstelle behandelt allerdings nur Tensorfunktoren $\omega : C' \to C$ zwischen *neutralen* Tannakakategorien über k. Um sie hier anwenden zu können, genügt es, sich davon zu überzeugen, daß, falls ω eine der beiden unten stehenden Voraussetzungen erfüllt, so auch der nach einer endlichen Basiskörpererweiterung k_1/k entstehende Funktor $\omega_{(k_1)} : C'_{(k_1)} \to C_{(k_1)}$. Die Voraussetzungen lauten:

1. ω ist volltreu und jedes Unterobjekt von $\omega(X'), X' \in \operatorname{ob} C'$, ist isomorph zum Bild eines Unterobjekts von X'.

2. Jedes Objekt in C ist Subquotient eines Objekts der Form $\omega(X'), X' \in \operatorname{ob} C'$.

Die Tannakakategorie $C_{(k_1)}$ kann identifiziert werden mit der Kategorie der k_1-Moduln $\big(X, \alpha_X : k_1 \to \operatorname{End}(X)\big)$ in C ([DM], p. 156). Dabei ist der Funktor $i = i_{k_1|k} : C \to C_{(k_1)}$ (äußeres Tensorprodukt mit k_1) linksadjungiert zu $j = j_{k_1/k} : C_{(k_1)} \to C$, der (X, α_X) nach X schickt. Es ist $k_1 \otimes_k \operatorname{Hom}(X, Y) = \operatorname{Hom}\big(i(X), i(Y)\big)$. Jetzt möge ω die Voraussetzung 1 erfüllen. Für $(X', \alpha_{X'}), (Y', \alpha_{Y'}) \in \operatorname{ob} C'_{k_1)}$ ist

$$\operatorname{Hom}\big((X', \alpha_{X'}), (Y', \alpha_{Y'})\big) = \operatorname{Hom}\Big(\big(\omega(X'), \omega(\alpha_{X'})\big), \big(\omega(Y'), \omega(\alpha_{Y'})\big)\Big)$$

als Untermengen von $\operatorname{Hom}\big(\omega(X'), \omega(Y')\big)$, weil ω nach Voraussetzung volltreu ist. Also ist $\omega_{(k_1)}$ volltreu. Entsprechend sei (Y, α_Y) ein Unterobjekt von $\big(\omega(X'), \omega(\alpha_{X'})\big)$. Nach Voraussetzung ist Y isomorph zu einem Objekt der Form $\omega(Y')$ für ein Unterobjekt Y' von X'. Wegen der Volltreuheit von ω definiert dann α_Y eine k_1-Modulstruktur $\alpha_Y : k_1 \to \operatorname{End}(Y')$ auf Y' und (Y, α_Y) ist isomorph zum Bild unter $\omega_{(k_1)}$ des Unterobjekts $(Y', \alpha_{Y'})$ von $(X', \alpha_{X'})$. Jetzt möge ω die Voraussetzung 2. erfüllen. Es sei X_1 ein Objekt von $C_{(k_1)}$ und $j(X_1)$ ein Subquotient von $\omega(X')$. Der Adjunktionshomomorphismus identifiziert X_1 mit einem Unterobjekt von $i \circ j(X_1)$, das seinerseits ein Subquotient von $i\big(\omega(X')\big) = \omega_{(k_1)}\big(i(X')\big)$ ist.

Anmerkung 2. Einer Mitteilung von L. Illusie zufolge ist das Problem der Definition einer Zykelklasse in der kristallinen Kohomologie mit den üblichen formalen Eigenschaften jetzt gelöst. Für die *rationale* kristalline Kohomologie ist eine solche Lösung von H. Gillet und W. Messing angegeben worden (unveröffentlicht); für die "ganze" kristalline Kohomologie wurde eine Lösung von M. Gros erzielt (Thèse de 3[me] cycle, Orsay 1983).

§5. EINE VERMUTUNG ÜBER SHIMURAVERIETÄTEN UND IHRE FOLGEN

Für die Definition einer Shimuravarietät wird der Leser auf [D1] hingewiesen. Eine Shimuravarietät ist einer über $\mathbf{Q}$ definierten algebraischen Gruppe G, einem über $\mathbf{R}$ definierten Homomorphismus h von $\mathbf{S} = \mathrm{Res}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}\mathbf{G}_m$ nach G, und einer offenen kompakten Untergruppe K aus $G(\mathbf{A}_f)$ zugeordnet. Es sei $\mathcal{G} = \mathcal{G}_G$ die neutrale Gerbe

$$G(\bar{\mathbf{Q}}) \rtimes \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}).$$

Was gegeben ist, ist nicht tatsächlich h, sondern die Konjugationsklasse X_∞ von h bezüglich $G(\mathbf{R})$. Dieser Klasse ordnen wir eine Äquivalenzklasse von Homomorphismen von Gerben über $\mathbf{R}$ zu,

$$\xi_\infty : \mathcal{W} \to \mathcal{G}.$$

Die Gruppe $\underline{\mathbf{S}}$ ist mit einem kanonischen Kogewicht μ versehen, und $(z, w) \to z^\mu w^{\bar{\mu}}, \bar{\mu} = \iota(\mu)$, ist ein Isomorphismus von $\underline{\mathbf{S}}$ mit $\mathbf{G}_m \times \mathbf{G}_m$, der über $\mathbf{C}$ definiert ist. Wir definieren $\xi_\infty(z) = h(z^{\mu+\bar{\mu}}), z \in \mathbf{C}^\times, \xi_\infty(w) = h((-1)^\mu) \rtimes \iota$, wenn $w = w(\iota)$.

Da $\mu+\bar{\mu}$ zentral ist, definiert ξ_ω einen Homomorphismus der Gerbe $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ nach $\mathcal{G}_{G_{\mathrm{ad}}} = \mathcal{G}_{\mathrm{ad}}$ und folglich eine Klasse a in $H^1(\mathbf{R}, G_{\mathrm{ad}})$.

Lemma 5.1. *Es sei G' die der Klasse a entsprechende $\mathbf{R}$-Form von G. Dann ist $G'_{\mathrm{ad}}(\mathbf{R})$ kompakt.*

Es sei T eine über $\mathbf{R}$ definierte Cartanuntergruppe, durch die h sich faktorisieren läßt. Dann ist $h(\mu)$ ein Kogewicht von T, das wir gleichfalls mit μ bezeichnen. Wenn α eine Wurzel von T ist, können wir die Wurzelvektoren $X_\alpha, X_{-\alpha}$ so wählen, daß

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha,\ \alpha(H_\alpha) = 2,\ \iota(X_\alpha) = \pm X_{-\alpha}.$$

Wenn das Vorzeichen positiv ist, ist die Wurzel α nicht kompakt, und wenn es negativ ist, ist α kompakt. Das Vorzeichen ist $-(-1)^{\langle\mu,\alpha\rangle}$ (siehe [Sh], §4). Wenn wir zu G' übergehen, wird die Wirkung von ι durch die von $(-1)^\mu\iota = \iota'$ ersetzt. Für ι' gilt also

$$\iota'(X_\alpha) = -X_{-\alpha}$$

für jedes α, und $G'_{\mathrm{ad}}(\mathbf{R})$ ist daher kompakt, denn jede Wurzel von G' ist kompakt.

Wir haben eine Primzahl p ein für allemal fixiert. Es wird vorausgesetzt daß G über einer unverzweigten Erweiterung von $\mathbf{Q}_p$ zerfällt. Es wird weiter vorausgesetzt, daß die kompakte Untergruppe, die die Shimuravarietät definiert, ein Produkt ist:

$$K = K^p \cdot K_p$$

mit $K^p \subset G(\mathbf{A}_f^p)$ und $K_p \subset G(\mathbf{Q}_p)$. Die Zeit ist sicherlich nicht reif, eine Vermutung über die Reduktion von Shimuravarietäten zu formulieren, ohne K_p starke Einschränkungen aufzuerlegen, obwohl spezielle Fälle gewiß zugänglich sind $([C], [DR])$. Wir setzen eine der zwei folgenden Bedingungen voraus. Entweder (a) K_p ist hyperspeziell im Sinne von [T], §3.1. oder (b) G_{ad} ist über $\mathbf{Q}_p$ anisotrop, und K_p ist die maximale kompakte Untergruppe von $G(\mathbf{Q}_p)$. Der Leser wird leicht die Betrachtungen dieses Abschnitts ein bißchen verallgemeinern. Da aber in dieser Arbeit hauptsächlich der Fall (a) betrachtet wird, und in einer weiteren noch zu schreibenden Arbeit des zweiten Autors der Fall (b), und da uns der natürliche Rahmen für die nachstehenden Vermutungen keineswegs klar ist, haben wir es vorgezogen, bei diesen beiden Fällen zu bleiben.

Wir setzen auch voraus, daß die derivierte Gruppe G_{der} von G einfach-zusammenhängend ist, eine Annahme, die die Allgemeinheit nicht beschränkt, und deren Grund wir später erklären werden. Es sei $\mathfrak{k}$ die Komplettierung der maximal unverzweigten Erweiterung $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}$ von $\mathbf{Q}_p$. Auf $\mathfrak{k}$ operiert $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}/\mathbf{Q}_p)$. Das Gebäude $\mathcal{B}(G,\mathfrak{k})$ ist in [T] definiert. In den Fällen (a) und (b) gibt es Facetten $w_1,\ldots,w_r$ minimaler Dimension und Punkte $x_i \in w_i$, so daß die Menge $\{x_1,\ldots,x_r\}$ unter $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}/\mathbf{Q}_p)$ erhalten bleibt, und so daß K_p der Stabilisator in $G(\mathbf{Q}_p)$ des Mittelpunkts des von $\{x_1,\ldots,x_r\}$ aufgespannten Simplex ist.

Wir führen zunächst den Begriff eines zulässigen Homomorphismus $\phi : \mathcal{Q} \to \mathcal{G}$ ein. Dieser Homomorphismus läßt sich allerdings durch ein $\mathcal{Q}_L$ faktorisieren, und wir arbeiten oft mit $\mathcal{Q}_L$ statt $\mathcal{Q}$. Es sind vier Bedingungen zu erfüllen. Es sei erstens G_{ab} der Quotient G/G_{der} und h_{ab} die Verkettung,

$$\underline{\mathbf{S}} \to G \to G_{\mathrm{ab}}.$$

Wir schreiben $h_{\mathrm{ab}}(z,w) = z^{\mu_{\mathrm{ab}}} \cdot w^{\bar{\mu}_{\mathrm{ab}}}$. Da die Gruppe G_{ab} ein Torus ist, können wir den μ_{ab} zugeordneten Homomorphismus $\psi_{\mu_{\mathrm{ab}}} : \mathcal{Q} \to \mathcal{G}_{\mathrm{ab}} = \mathcal{G}_{G_{\mathrm{ab}}}$ einführen.

(5.a) *Das Kompositum*

$$\phi_{\mathrm{ab}} : \mathcal{Q} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathrm{ab}}$$

ist $\psi_{\mu_{\mathrm{ab}}}$ *äquivalent.*

Es sind etliche Homomorphismen nach $\mathcal{G}$ vorhanden:

(i) $\zeta_\infty = \zeta_{v_1} : \mathcal{W} \to \mathcal{G}$,

(ii) $\zeta_p = \zeta_{v_2} : \mathcal{D} \to \mathcal{G}$,

(iii) $\zeta_l : \mathcal{G}_l \to \mathcal{G},\ l \neq p$.

(5.b) *Das Kompositum* $\phi \circ \zeta_\infty$ *ist* ξ_∞ *äquivalent.*

(5.c) *Das Kompositum* $\phi \circ \zeta_l$ *ist der kanonischen Neutralisierung* ξ_l *von* $\mathcal{G}$ *über* $\mathbf{Q}_l$ *äquivalent.*

Die Bedingung an der Stelle p ist umständlicher zu klären. Es seien $w_1^0,\ldots,w_r^0$ und $x_i^0 \in w_i^0$ die K_p definierenden speziellen Facetten und Punkte und

$$\mathcal{X} = \{(x_1,\ldots,x_r) | \exists g \in G(\mathfrak{k}) \text{ mit } x_i = g \cdot x_i^0\ \forall i\}.$$

Wir definieren $\sigma(i), 1 \leqq i \leqq r,\ \sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ mittels der Gleichung

$$\sigma(x_i^0) = x_{\sigma(i)}^0.$$

Dem Lemma 2.1 zufolge gibt es eine unverzweigte Erweiterung L von $\mathbf{Q}_p$, so daß $\zeta_p = \phi \circ \zeta_p$ als ein Homomorphismus von $\mathcal{D}^L$ nach $\mathcal{G}$ aufgefaßt werden kann, der selbst durch einen Homomorphismus ξ_p der Erweiterung

$$1 \to L_1^\times \to \mathcal{D}_{L_1}^L \to \mathrm{Gal}(L_1/\mathbf{Q}_p) \to 1$$

nach $G(L_1) \rtimes \mathrm{Gal}(L_1/\mathbf{Q}_p)$ definiert wird, wobei L_1 eine endliche Galoiserweiterung von $\mathbf{Q}_p$ ist. Es sei L_2 der maximale über L unverzweigte Unterkörper von L_1. Der $\mathcal{D}_{L_1}^L$ definierende Kozyklus ist eigentlich auf $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q}_p)$ definiert. Folglich ist $\mathrm{Gal}(L_1/L)$ und insbesondere $\mathrm{Gal}(L_1/L_2)$ in $\mathcal{D}_{L_1}^L$ eingebettet, und die Einschränkung von ξ_p auf $\mathrm{Gal}(L_1/L_2)$ durch einen 1-Kozyklus dieser Gruppe mit Werten aus $G(L_1)$ definiert. Nach einem Satz von Steinberg (siehe [Se], S. 3) gibt es eine unverzweigte Erweiterung L' von L, so daß dieser Kozyklus aufgefaßt als Kozyklus von $\mathrm{Gal}(L_1L'/L_2L')$ mit Werten aus $G(L_1L')$ trivial wird. Infolgedessen können wir L durch L_2L' ersetzen und ξ_p durch einen äquivalenten Homomorphismus ξ'_p und annehemen, daß $L_1 = L$.

Der Homomorphismus ξ'_p schickt dann $\mathcal{D}_L^L$ nach $G(L) \rtimes \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q}_p)$. Die Gruppe $\mathcal{D}_L^L$ ist der Weilgruppe $W_{L/\mathbf{Q}_p}$ isomorph, und $W_{L/\mathbf{Q}_p}$ ist auf die natürliche Weise in $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}/\mathbf{Q}_p)$ abgebildet. Es sei ξ der durch die Kommutativität des folgenden Diagramms definierte Homomorphismus von $W_{L/\mathbf{Q}_p}$ nach $G(\mathfrak{k}) \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}/\mathbf{Q}_p)$:

$$\begin{tikzcd}
 & W_{L/\mathbf{Q}_p} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
G(L)\rtimes\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q}_p) & G(L)\rtimes\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}/\mathbf{Q}_p) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}/\mathbf{Q}_p) \\
 & G(\mathfrak{k})\rtimes\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}/\mathbf{Q}_p). &
\end{tikzcd}$$

Es sei w ein Urbild des Frobeniuselements σ unter dem kanonischen Homomorphismus $W_{L/\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}/\mathbf{Q}_p)$. Das Element w ist bis auf eine Einheit aus $L^\times$ eindeutig bestimmt. Es kann daher ein zweites mögliches w' als $x \cdot \sigma(x)^{-1} \cdot w$ geschrieben werden mit $x \in \mathfrak{k}^\times$. Die Einschränkung von ξ'_p aud $\mathcal{D}_L^L = \mathbf{G}_m$ ist algebraisch. Es sei $c = \xi'_p(x)$. Es gilt $\xi(w') = c\xi(w)c^{-1}$. Folglich ist $F = \xi(w)$ bis auf Konjugation mit einem Element aus $\xi'_p(\mathfrak{k}^\times)$ durch ξ'_p allein bestimmt.

Wenn wir h durch einen Torus T faktorisieren, definiert es ein Kogewicht μ von T. Obwohl μ selbst von h abhängt und nicht allein von seiner Konjugationsklasse, ist die Bahn von μ unter der Weylgruppe wohldefiniert und unabhängig von h und in einem offensichtlichen Sinn von T. Folglich können wir für eine beliebige Cartanuntergruppe T von G der Shimuravarietät eine Bahn $\{\mu\}$ in $X_*(T)$ zuordnen. Andererseits sind je zwei Punkte y, z aus $\mathcal{B}(G, \mathfrak{k})$ in einem Apartment enthalten und $z = y + a$ mit $a \in X_*(T) \otimes \mathbf{R}$. Es ist wiederum a nicht eindeutig bestimmt, sondern nur seine Bahn under der Weylgruppe, die wir mit $\mathrm{inv}(z, y)$ bezeichnen.

Die Gruppe $G(\mathfrak{k}) \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}/\mathbf{Q}_p)$ operiert auf $\mathcal{X}$

$$g \rtimes \sigma : (x_1, \ldots, x_r) \to \big(g\sigma(x_1), \ldots, g\sigma(x_r)\big)$$

und auch auf dieselbe Weise auf $\mathcal{B}(G,\mathfrak{k})$. Es sei X_p die Menge der $x=(x_1,\dots,x_r)$ aus $\mathcal{X}$ derart, daß für jedes i

$$\mathrm{inv}\,(x_{\sigma(i)},Fx_i)=\{\mu\}.$$

(5.d) *Die Menge X_p ist nicht leer,*

Wir setzen

$$X_l=\{x\in G(\bar{\mathbf{Q}}_l)|\phi\circ\zeta_l=\mathrm{ad}\,x\circ\xi_l\},\ l\neq p.$$

Da

$$G(\mathbf{Q}_l)=\{g\in G(\bar{\mathbf{Q}}_l)|\mathrm{ad}\,g\circ\xi_l=\xi_l\},$$

operiert $G(\mathbf{Q}_l)$ von rechts auf X_l und ist einfach transitiv. Wir wollen ein beschränktes Produkt $X^p=\prod_l X_l$ einführen. Nach [T], §3.9 können wir eine endliche Menge S und für $l\notin S$ einen hyperspeziellen Punkt x_l in $\mathcal{B}(G,\mathbf{Q}_l)$ bestimmen. Weder S noch die x_l sind eindeutig bestimmt, aber zwei mögliche Familien von x_l sind fast überall gleich. Es wird folglich für jede endliche Erweiterung L' von $\mathbf{Q}$ und fast jede Primstelle v von L eine hyperspezielle Untergruppe K_v ausgezeichnet. Es sei ϕ durch $q_\varrho\to g_\varrho\times\varrho$ definiert. Dann wird, mit den Bezeichungen des zweiten Abschnitts, $\phi\circ\zeta_1$ durch $\varrho\to\phi\big(e_\varrho(l)\big)\cdot g_\varrho\rtimes\varrho$ definiert, $\varrho\in\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_l/\mathbf{Q}_l)$. Wir können aber eine endliche Erweiterung L' von $\mathbf{Q}$ wählen, so daß $\phi(e_\varrho)\cdot g_\varrho$ in $G(\mathbf{A}_{L'})$ liegt für jedes ϱ. Folglich liegt $\phi\big(e_\varrho(l)\big)\cdot g_\varrho\in\prod_{v/l}K_v$ für fast alle l und jedes ϱ. Der Kozykel $\{\phi\big(e_\varrho(l)\big)\cdot g_\varrho\}$ kann dann für fast jedes l in $\prod_{v/l}K_v$ berandet werden, was eine ausgezeichnete Untermenge von X_l für fast jedes l liefert und dementsprechend ein beschränktes Produkt.

Es sei

$$I_\phi=\{g\in G(\bar{\mathbf{Q}})|\mathrm{ad}\,g\circ\phi=\phi\}.$$

Die Gruppe I_ϕ operiert auf $X_l, l\neq p$ und auf X^p. Es seien

$$J_\phi=\{g\in G(\bar{\mathbf{Q}})|\mathrm{ad}\,g\circ\xi_p=\xi_p\}$$

und

$$J'_\phi=\{g\in G(\mathfrak{k})|\mathrm{ad}\,g\circ\xi'_p=\xi'_p\}.$$

Die Gruppe J'_ϕ operiert auf X_p. Wenn $\xi'_p=\mathrm{ad}\,h\circ\xi_p$, bildet $g\to hgh^{-1}$ die Gruppen I_ϕ und J_ϕ in J'_ϕ ab. Folglich operiert I_ϕ auf X_p. Es sei

$$X_\phi(K)=I_\phi\backslash X_p\times X^p/K^p.$$

Es sei jetzt $\mathfrak{p}$ eine Primstelle von E, dem Reflexkörper der Shimuravarietät

$$\mathrm{Sh}=\mathrm{Sh}_K=\mathrm{Sh}_K(G,h).$$

Wir nehmen an, $\mathfrak{p}$ sei durch die Einbettungen $E \subset \bar{\mathbf{Q}} \subset \bar{\mathbf{Q}}_p$ definiert. Die Einbettung $\bar{\mathbf{Q}} \subset \bar{\mathbf{Q}}_p$ kann ja immer so gewählt werden. E ist unverzweigt an der Stelle p. Es sei $r = [E_\mathfrak{p} : \mathbf{Q}_p]$ und $\Phi(x_1, \ldots, x_r) = F^r(x_1, \ldots, x_r)$. Dann operiert Φ auf X_p und auf X_ϕ.

Es sei $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ der Ring der ganzzahligen Elemente aus $E_\mathfrak{p}$. Wir suchen ein Modell von Sh über $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ mit mindestens folgenden Eigenschaften, und wir vermuten, daß es existiert, wenn K^p genügend klein ist.

(5.e) *Es sei κ der Restklassenkörper von $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ und $\bar{\kappa}$ seine algebraisch abgeschlossene Hülle. Dann ist* $\mathrm{Sh}\,(\bar{\kappa})$ *als Menge mit Wirkung des Frobeniuselements isomorph der Vereinigung über Äquivalenzklassen von zulässigen ϕ der Mengen $X_\phi(K)$ mit Wirkung von ϕ.*

(5.5) *Wenn* Sh *über E eigentlich ist, dann ist das Modell eigentlich über $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$.*

(5.g) *Wenn K_p hyperspeziell ist* [T], *ist das Modell über $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ glatt.*

Im nächsten Abschnitt werden wir die Ergebnisse des vorigen Abschnitts anwenden, um diese Vermutung zu begründen. In diesem Abschnitt versuchen wir, sie anschaulicher zu machen, und den Übergang zu weiteren Ergebnissen von Kottwitz vorzubereiten. Wir werden ohne weiteres von ihm stammende Begriffe und Ergebnisse benutzen.

Wir fangen mit einem einfachen Beispiel an, das uns erlaubt, die Vorzeichen nachzuprüfen. G sei $\mathbf{G}_m$, so daß $X_*(G) = \mathbf{Z}$, und h sei der Homomorphismus $(z, w) \to zw$, so daß $\mu = 1 \in \mathbf{Z}$. Die entsprechende Varietät Sh ist von der Dimension Null und ihre Punktmenge ist

(5.h) $$\mathrm{Sh}\,(\bar{\mathbf{Q}}) \cong \mathbf{Q}^\times \backslash I_f / K^p \cdot K_p,\ I_f = \mathbf{A}_f^\times.$$

Wir betrachten nur den fall, daß $K_p = \mathbf{Z}_p^\times$. In der Definition von Deligne, die wir benutzen, treten zwei Inverse auf (siehe [D1], §2.2.3), nämlich das Inverse des Reziprozitätsisomorphismus der Klassenkörpertheorie, der selbst das Inverse des herkömmlichen ist. Folglich wirkt das Frobeniuselement auf $\mathrm{Sh}\,(\bar{\mathbf{Q}})$ als $a \in I_f \to pa$, wobei p als Element aus $\mathbf{Q}_p^\times$ aufzufassen ist.

Andererseits nach (5.a) stellt $\phi = \psi_\mu$ die einzige zulässige Klasse dar. Wenn wir $x \in X^p$ wählen, können wir die Abbildung $t \to xt$ verwenden, um X^p mit I_f^p zu identifizieren. Es ist ferner $I_\phi = \mathbf{Q}^\times$. Es sei $\mathcal{O}$ der Ring der ganzzahligen Elemente aus $\mathfrak{k}$. Dann ist $\mathcal{X} = \mathfrak{k}^\times / \mathcal{O}^\times = \mathbf{Q}_p^\times / \mathbf{Z}_p^\times$.

Der Homomorphismus $\psi_\mu \circ \zeta_p$ ist $\xi_{-\mu}$ äquivalent. Da G über $\mathbf{Q}$ zerfällt, ist $\xi_{-\mu}$ auf $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathbf{Q}_p}$ definiert als

$$z \to z^{-1}.$$

Weil wir das Inverse des herkömmlichen Reziprozitätsisomorphismus nehmen, entspricht p^{-1} dem Frobeniuselement, und p^{-1} wird auf $p \rtimes 1 \in G(\mathbf{Q}_p) \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}/\mathbf{Q}_p)$ abgebildet. Folglich schickt F das Element $a \in \mathfrak{k}^\times \,(\mathrm{mod}\ \mathcal{O}^\times)$ nach pa. Nach dem Vorzeichen, das in [T], Gl. 1.2(1) vorkommt, ist

$$\mathrm{inv}(a, pa) = -\omega(p^{-1}) = 1 = \mu.$$

Folglich ist $X_p = \mathcal{X} = \mathbf{Q}_p^\times / K_p$, und

(5.i) $$I_\phi \backslash X_p \times X^p / K^p \cong \mathbf{Q}^\times \backslash I_f / K^p \cdot K_p.$$

Die Abbildungen (5.h) und (5.i) definieren eine Identifizierung von $I_\phi \backslash X_p \times X^p / K^p$ und Sh($\bar{\mathbf{Q}}$), unter der $F = \Phi$ der Wirkung des Frobeniuselements entspricht. Wir heben hervor, daß diese Identifizierung keinesweg kanonisch ist.

Es ist klar, daß Sh ein Modell über $\mathbf{Z}_p$ mit guter Reduktion besitzt, und die Vermutung ist daher in diesem Fall trivial gültig. Im allgemeinen, wenn G ein Torus ist, kann die Vermutung leicht nachgeprüft werden.

$\mathcal{X}$ ist dann $T(\mathfrak{k})/T(\mathcal{O})$. Wenn T über der unverzweigten Erweiterung L von $\mathbf{Q}_p$ zerfällt, sei $k = [L : \mathbf{Q}_p]$ und σ sei ein Frobeniuselement aus $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q}_p)$. Die Fundamentalklasse ist $a_{i,j} = 1,\ 0 \leqq i,\ j \leqq k,\ i + j < k,\ a_{i,j} = p^{-1},\ 0 \leqq i, j \leqq k,\ i + j \geqq k$ und $1 \times \sigma \in \mathcal{D}_L^L$ entspricht dem Urbild in $W_{L/\mathbf{Q}_p}$ eines Frobeniuselements. Folglich ist $F = p^\mu \times \sigma$.

Es ist, wenn ν wie in [T], §1.2 definiert wird,

$$\mathrm{inv}(x, Fx) - \mu = \mathrm{inv}\big(x, \sigma(x) + \nu(p^\mu)\big) - \mu = \mathrm{inv}\big(x, \sigma(x)\big),$$

woraus leicht folgt, daß

$$X_p \cong T(\mathbf{Q}_p)/T(\mathbf{Z}_p).$$

Es sei r die kleinste Potenz von σ, die μ fixiert. Der Körper E ist über $\mathbf{Q}_p$ unverzweigt und $r = [E : \mathbf{Q}_p]$. Folglich ist

$$\Phi = p^{-\nu_2} \times \sigma^r,$$

wo rechts σ jetzt den Frobeniusautomorphismus von $\mathfrak{k}/\mathbf{Q}_p$ bedeutet, und

$$-\nu_2 = \mu + \sigma\mu + \ldots + \sigma^{r-1}\mu.$$

Daher wirkt Φ aud X_p als Verschiebung durch $p^{-\nu_2} \in T(\mathbf{Q}_p)$, und $p^{-\nu_2}$ ist nichts als das Bild von $p \in E^\times$ unter dem in [De1], §2.2.3 definierten Homomorphismus $NR(\mu) : E^\times \to T$.

Diese Bemerkungen ermöglichen es, $T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A}_f)/K^p \cdot K_p$ mit $I_\phi \backslash X_p \times X^p / K^p$ zu identifizieren, so daß Φ der Frobeniussubstitution in $\mathfrak{p}$ entspricht, und somit die Vermutung nachzuprüfen.

Es sei T eine Cartanuntergruppe von G, die über $\mathbf{Q}$ definiert ist. T sei fundamental, d.h. die Gruppe $T_{\mathrm{ad}}(\mathbf{R})$ sei kompakt, wobei T_{ad} das Bild von T in der adjungierten Gruppe G_{ad} ist. Dann können wir h so wählen, daß es durch T faktorisiert und folglich ein Kogewicht μ von T definiert:

$$h(x, w) = z^\mu w^{\bar{\mu}}.$$

Es sei $\psi_{T,\mu}$ das Kompositum

$$\mathcal{Q} \xrightarrow{\psi_\mu} \mathcal{G}_T \subseteqq \mathcal{G} = \mathcal{G}_G.$$

Lemma 5.2. *$\psi_{T,\mu}$ ist zulässig.*

Die Bedingungen (5.a) und (5.c) sind klar, sowie auch (5.b), denn die Fundamentalklasse im Unendlichen ist durch $a_{\iota,\iota} = -1$ definiert, und folglich ξ_∞ nach Definiton zu $\psi_\mu \circ \xi_\infty$ äquivalent.

Es sei

$$\nu_p = \nu_2 = - \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{v_2}/\mathbf{Q}_p)} \sigma\mu.$$

Es sei P die über $\mathbf{Q}_p$ definierte parabolische Untergruppe, die T enthält, und deren Wurzeln durch $\langle \nu_p, \alpha \rangle \leqq 0$ definiert wird. Die Gruppe P enthält den Levifaktor J, dessen Wurzeln durch $\langle \nu_p, \alpha \rangle = 0$ definiert sind. Der Körper $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}$ zerfällt J.

Wir können annehmen, daß der X_p definierende Homomorphismus durch $\xi'_p = \mathrm{ad}\, h \circ \xi_p$ definiert wird mit $h \in T(\bar{\mathbf{Q}}_p)$. Dann ist $J_\phi \subseteqq J(\bar{\mathbf{Q}}_p)$ bzw. $J'_\phi \subseteqq J(\mathfrak{k})$. In der Tat ist J der Zentralisator des Bildes des Kerns von $\mathcal{D}$, so daß ξ_p bzw. ξ'_p eine getwistete Form $\mathcal{J}_\phi$ bzw. $\mathcal{J}'_\phi$ von J definiert, und J_ϕ bzw. J'_ϕ ist die Gruppe der $\mathbf{Q}_p$-rationalen Punkte auf dieser getwisteten Form.

Die Bruhat-Tits-Gebäude $\mathcal{B}(G, \mathfrak{k}), \mathcal{B}(J, \mathfrak{k})$ sowie $\mathcal{B}(G, \mathbf{Q}_p), \mathcal{B}(J, \mathbf{Q}_p)$ werden in [T], §2.1 gekennzeichnet. Da J einen maximalen zerfallenden Torus von G enthält, ergibt diese Charakterisierung ein kommutatives Diagramm von Einbettungen (siehe auch [T] §2.6):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(J, \mathbf{Q}_p) & \subseteqq & \mathcal{B}(G, \mathbf{Q}_p) \\ \cap\| & & \cap\| \\ \mathcal{B}(J, \mathfrak{k}) & \subseteqq & \mathcal{B}(G, \mathfrak{k}). \end{array}$$

Wir brauchen auch eine über $\mathbf{Q}_p$ definierte elliptische Cartanuntergruppe T' von J, die über $\mathfrak{k}$ zerfällt, und so, daß die maximale kompakte Untergruppe von $T'(\mathbf{Q}_p)$ in K_p enthalten ist. Im Fall (b) ist die zweite Bedingung automatisch erfüllt, und für die Existenz von T' können wir auf [Kn], S.271 verweisen. Im Fall (a) weisen wir auch darauf hin, sowie auch auf [T], §3.4 und auf SGAD. Es liegen dann $x_1^0, \ldots, x_r^0$ im Apartment von T' (siehe [T], §3.6).

Es sei μ' ein bezüglich J zu μ konjugiertes Kogewicht von T'. Wir zeigen zunächst, daß wenn F' mittels $\xi_{-\mu'}$ statt ξ_p oder des äquivalenten $\xi_{-\mu}$, aber wie F definiert wird, dann gilt

(5.j) $$\mathrm{inv}(x^0_{\sigma(i)}, F' x_i^0) = \{\mu'\} = \{\mu\}.$$

Die Gruppe T' ist über einer unverzweigten Erweiterung zerfallend. Folglich nach dem, was wir schon im abelschen Fall ausgerechnet haben, ist $F' = p^{\mu'} \rtimes \sigma$ und

$$F' x_i^0 = \sigma(x_i^0) - \mu'.$$

Somit wäre (5.j) bewiesen.

Unser Ziel war aber zu zeigen, daß X_p nicht leer ist, und dazu genügt es zu zeigen, daß $\xi_{-\mu}$ und $\xi_{-\mu'}$ als Homomorphismen von $\mathcal{D}$ nach $\mathcal{G}_J$ äquivalent sind, wenn das Bild von T' in der adjungierten Gruppe von J anisotrop ist, wie wir annehmen können. Das folgt sofort aus den Ergebnissen von Kottwitz [K4] (siehe Anmerkung am Ende des Abschnitts). Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen dieser Homomorphismen mit $C(J)$. Weil das Bild T' in J_{ad} anisotrop ist, ist

$$\nu'_p = - \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_v/\mathbf{Q}_p)} \sigma\mu' = \nu_p$$

zentral. Dabei wird angenommen, daß L genügend groß ist, damit L_{v_2} den Torus T' zerfällt. Infolgedessen liegen die Klassen von $\xi_{-\mu}$ und $\xi_{-\mu'}$ in $C(J)_b \cong B(J)_b$ (siehe Anmerkung) und werden nach Kottwitz durch Elemente aus $X^*\big(Z(\hat{J})^{\Gamma(p)}\big)$ gekennzeichnet, wobei $\Gamma(p) = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}/\mathbf{Q}_p)$ und $Z(\hat{J})$ das Zentrum der Zusammenhangskomponente der L-Gruppe bedeutet. Nach der Definition entspricht $\xi_{-\mu}$ dem Charakter $z \to z^{\mu}$ und $\xi_{-\mu'}$ dem Charakter $z \to z^{\mu'}$, und diese sind auf $Z(\hat{J})$ gleich. Genauer gesagt, in der von Kottwitz definierten Bijektion steht ein Vorzeichen zur Verfügung. Wir wählen es so, daß $\xi_{-\mu}$ dem Charakter $z \to z^{\mu}$ entspricht.

Wir können jetzt erklären, warum wir angenommen haben, daß G_{der} einfach zusammenhängend ist. Es sei zunächst G beliebig. Dann können wir eine z-Erweiterung G' im Sinne von Kottwitz [K1] finden und eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "h'"] \arrow[dr, "h"'] & G' \arrow[d, "\alpha"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Wir können auch annehmen ([MS2], §3.4), daß der Reflexkörper $E(G', h')$ der Körper $E = E(G, h)$ ist. Es sei A der Kern von α.

Es sei K' eine offene kompakte Untergruppe von $G'(\mathbf{A}_f)$ mit $\alpha(K') \subseteqq K$. Die Abbildung

$$G'(\mathbf{Q})\backslash G'(\mathbf{A})/K' \to G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/K$$

ist die Einschränkung eines über E definierten Morphismus von $\mathrm{Sh}_{K'}(G', h')$ nach $\mathrm{Sh}_K(G, h)$ auf die Menge der komplexwertigen Punkte. Sie ist surjektiv, denn $G'(\mathbf{Q}_v) \to G(\mathbf{Q}_v)$ ist surjektiv für jede Primstelle von **Q**. Es folgt aus [T], §3.9.1, daß $\alpha(K')$ eine Untergruppe von endlichem Index in K ist, und daß wir sogar annehmen können, daß $\alpha(K')$ ein Normalteiler von K ist.

Dann operiert die endliche Gruppe

$$B = A(\mathbf{Q})\backslash \alpha^{-1}(K)/K'$$

von rechts auf $\mathrm{Sh}_{K'}(G', h')$ und der Quotient ist $\mathrm{Sh}_K(G, h)$, weil $G'(\mathbf{Q}) \to G(\mathbf{Q})$ surjektiv ist.

Wir interessieren uns letztendlich für die Kohomologiegruppen gewisser Garben auf $\mathrm{Sh}_K(G, h)$ (siehe [L1]), die einer Darstellung ξ von G zugeordnet sind. Diese können als die Fixpunkte von B in der Kohomologie der zurückgezogenen durch $\xi \circ \alpha = \xi'$ definierten Garben auf $\mathrm{Sh}_{K'}(G', h')$ erhalten werden. Folglich können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit G'. statt G behandeln.

Nichtsdestoweniger können wir den Begriff eines zulässigen Homomorphismus $\phi : \mathcal{Q} \to \mathcal{G} = \mathcal{G}_G$ einführen. Wir werden später anhand eines Beispiels zeigen, daß die Vermutung, wie sie oben ausgedrückt wurde, in gewissen Fällen nicht gleichzeitig für G und G' gelten kann. Dafür brauchen wir einen Satz, den wir zunächst beweisen und der ohnehin für den Übergang zur Spurformel wichtig ist.

Satz 5.3. *Es gelte das Hasseprinzip für G_{sc}. Wenn G über $\mathbf{Q}_p$ quasi-zerfallend ist, und wenn K_p hyperspeziell ist, dann ist jedes zulässige ϕ einem $\psi_{T,\mu}$ äquivalent.*

Wir beginnen den Beweis mit einem Lemma.

Lemma 5.4. *Es gelte das Hasseprinzip für G_{sc}. Es sei G über $\mathbf{Q}_p$ quasi-zerfallend, und ϕ sei zulässig. Dann ist ϕ einem ϕ' äquivalent derart, daß $\phi'(\delta_n)$ für genügend hohes n in $G(\mathbf{Q})$ liegt.*

Wir betrachten ϕ als $\phi : \mathcal{Q}(L, m) \to \mathcal{G}$. Es sei $\gamma_n = \phi(\delta_n)$ und es sei $g_\varrho \times \varrho$ das Bild von q_ϱ. Es gilt

$$\gamma_n = \phi(\delta_n) = \phi(q_\varrho \delta_n q_\varrho^{-1}) = g_\varrho \varrho(\gamma_n) g_\varrho^{-1}.$$

Folglich ist die Konjugationsklasse von γ_n rational.

Es sei G^* die quasi-zerfallende Form von G und $\psi : G \to G^*$ ein Isomorphismus über $\bar{\mathbf{Q}}$ derart, daß $\psi^{-1}\sigma(\psi)$ inner ist für jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Es sei $\gamma_n^* = \psi(\gamma_n)$. Seine Konjugationsklasse ist auch rational. Notfalls ersetzen wir n durch ein Vielfaches von sich selbst, damit die Gruppe $C_{\gamma_n^*}$, die in Th. 4.7 von [K1] auftritt, trivial ist. Dann erlaubt uns dieser Satz, ϕ durch ad $g \circ \phi$ zu ersetzen, so daß γ_n^* rational wird.

Lemma 5.5. *Die Zariski-abgeschlossene Hülle von $\{\delta_n^k | k \in \mathbf{Z}\}$ in $Q(L, m)$ ist $Q(L, m)$.*

Diese abgeschlossene Hülle ist eine algebraische Untergruppe von $Q(L, m)$. Wenn es nicht $Q(L, m)$ selbst wäre, gäbe es einen nicht-trivialen Charakter χ_π von $Q(L, m)$ mit

$$1 = \chi_\pi(\delta_n) = \pi^{\frac{n}{m}}.$$

Folglich ist π eine Einheitswurzel, und $\chi_\pi = 1$, was ein Widerspruch ist.

Der Einfachheit halber benutzen wir ψ, um G und G^* zu identifizieren. Dann ist die Wirkung der Galoisgruppe auf G^* durch

$$\sigma^*(g) = b_\sigma \sigma(g) b_\sigma^{-1}$$

definiert, wobei $b_\sigma \in G(\bar{\mathbf{Q}})$ und $b_\varrho \varrho(b_\sigma) b_{\varrho\sigma}^{-1} \in Z(\bar{\mathbf{Q}})$, wenn Z das Zentrum von G bedeutet. Es sei I^* der Zentralisator von γ_n^* in G^*. Es ist auch der Zentralisator von $\phi\big(Q(L,m)\big)$.

Wir setzen

$$g_\varrho = h_\varrho b_\varrho.$$

Dann ist

$$\gamma_n^* = \gamma_n = g_\varrho \varrho(\gamma_n) g_\varrho^{-1} = h_\varrho b_\varrho \varrho(\gamma_n) b_\varrho^{-1} h_\varrho^{-1} = h_\varrho \varrho^*(\gamma_n^*) h_\varrho^{-1} = h_\varrho \gamma_n^* h_\varrho^{-1}$$

und $h_\varrho \in I^*$.

Wir zeigen zunächst, daß $h_\varrho \varrho^*(h_\sigma) h_{\varrho\sigma}^{-1}$ im Zentrum von I^* liegt, so daß $\{h_\varrho\}$ eine Form I' von I^* definiert, auf der die Galoisgruppe gemäß den Gleichungen

$$\sigma'(h) = h_\sigma \sigma^*(h) h_\sigma^{-1}$$

wirkt. Es gilt nähmlich

$$h_\varrho \varrho^*(h_\sigma) h_{\varrho\sigma}^{-1} = h_\varrho b_\varrho \varrho(h_\sigma) b_\varrho^{-1} h_{\rho\sigma}^{-1} = g_\varrho \varrho(g_\sigma) \varrho(b_\sigma^{-1}) b_\varrho^{-1} h_{\varrho\sigma}^{-1}.$$

Da

$$z = b_{\varrho\sigma} \varrho(b_\sigma^{-1}) b_\varrho^{-1} \in Z(\bar{\mathbf{Q}}),$$

ist das letzte Glied dieser Gleichung gleich

$$g_\varrho \varrho(g_\sigma) b_{\varrho\sigma}^{-1} h_{\varrho\sigma}^{-1} z = g_\varrho \varrho(g_\sigma) g_{\varrho\sigma}^{-1} z = \phi(g_{\varrho,\sigma}) z,$$

und folglich liegt es im Zentrum von I^*.

Nach [K1], Lemma 3.3, können wir annehmen, daß I^* quasi-zerfallend ist. Da I' eine Cartanuntergruppe über $\mathbf{Q}$ enthält, gibt es eine über $\mathbf{Q}$ definierte Cartanuntergruppe T^* von I^* und ein $h \in I^*$, so daß $h h_\varrho \varrho^*(h^{-1}) \in T^*$ für jedes ϱ. Wir ersetzen ϕ durch $\mathrm{ad} h \circ \phi$ und nehmen an, daß $h_\varrho \in T^*$.

Wir zeigen zunächst, daß T^*, das auch eine Cartanuntergruppe von G^* ist, in der Gruppe G vorkommt (im Sinne von [L3]). Das bedeutet, daß es ein $g \in G(\bar{\mathbf{Q}})$ gibt, so daß

$$\sigma^*(t) = g^{-1}\big(\sigma(gtg^{-1})\big)g, \quad t \in T^*.$$

Dann ist gT^*g^{-1} eine über $\mathbf{Q}$ definierte Cartanuntergruppe T von G. Wir ersetzen ϕ durch $\mathrm{ad}\, g \circ \phi$ und folglich γ_n durch $g\gamma_n g^{-1}$, das in $T(\mathbf{Q})$ liegt, weil γ_n in $T^*(\mathbf{Q})$ liegt. Somit wäre Lemma 5.4 bewiesen.

Um zu zeigen, daß T^* in G vorkommt, brauchen wir eine Folge der Betrachtungen von [L3].

Lemma 5.6. *Es gelte das Hasseprinzip für G_{sc}. Wenn die Cartanuntergruppe T^* überall lokal in G vorkommt, und wenn T^*_{ad} in mindestens einer Stelle von* $\mathbf{Q}$ *anisotrop ist, dann kommt T^* in G global vor.*

In [L3] (siehe Lemma 7.15) ist ein Hindernis eingeführt, dessen Verschwinden notwendig und hinreichend ist, damit T^* in G vorkommt. Das Hindernis liegt in $H^{-1}\big(\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q}), X_*(T^*_{\mathrm{sc}})\big)$ modulo

$$\bigoplus_v \xi_v(H^{-1}\big(\mathrm{Gal}(L_v/\mathbf{Q}_v), X_*(T^*_{\mathrm{sc}})\big),$$

wobei ξ_v die natürliche Abbildung von $H^{-1}\big(\mathrm{Gal}(L_v/\mathbf{Q}_v), X_*(T^*_{\mathrm{sc}})\big)$ nach $H^{-1}\big(\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q}), X_*(T^*_{\mathrm{sc}})\big)$ bezeichnet. Wenn aber T^*_{ad} in der Stelle v anisotrop ist, dann ist ξ_v offensichtlich surjektiv, und das Hindernis ohne weiteres Null.

Wir wenden Lemma 5.6 auf unser T^* an. Daß es über $\mathbf{Q}_p$ vorkommt, ist klar, denn G ist nach Voraussetzung über $\mathbf{Q}_p$ quasi-zerfallend. Im Unendlichen erhält man die Twistung I', indem man ξ_∞ auf I^* einschränkt. Folglich ist I' in der Gruppe G' von Lemma 5.1 enthalten. Weil T^* eine Cartanuntergruppe von I' ist, folgt es aus jenem Lemma, daß T^*_{ad} anisotrop über $\mathbf{R}$ ist. Somit kommt es in G vor.

Nach Voraussetzung ist $\sigma \to e_\sigma(l)g_\sigma \rtimes \sigma = a_\sigma \rtimes \sigma, \sigma \in \mathrm{Gal}(L_l/\mathbf{Q}_l)$ zu der kanonischen Neutralisierung von $\mathcal{G}$ äquivalent. Folglich definiert $\sigma_1 : g \to a_\sigma \sigma(g) a_\sigma^{-1}$ eine Form von G, die zu G isomorph ist. Aber $e_\sigma(l)$ liegt in $\phi\big(Q(L,m)\big)$, das im Zentrum von I^* enthalten ist. Für $t \in T^*$ gilt also

$$\sigma_1(t) = \sigma^*(t),$$

und T^* kommt über $\mathbf{Q}_l$ in G vor.

Wir kehren jetzt zum Satz 5.3 zurück, dabei weiter annehmend, daß $\gamma_n = \phi(\delta_n)$ rational ist für genügend hohes n. Der Zentralisator von γ_n sie $\mathcal{I}$. Wenn wir n durch ein zweckmäßiges Vielfaches ersetzen, können wir annehmen, daß $\mathcal{I}$ zusammenhängend ist. Der Homomorphismus ϕ definiert eine Twistung $\mathcal{I}_\phi$ von $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}_\phi(\mathbf{Q}) = I_\phi$.

Es ist $\phi(q_\varrho) = g_\varrho \rtimes \varrho$, wo g_ϱ jetzt in $\mathcal{I}$ liegt, weil γ_n rational ist. Wir brauchen einen über $\mathbf{Q}$ definierten Torus T aus $\mathcal{I}$ und ein $a \in I(\bar{\mathbf{Q}})$ derart, daß $a g_\varrho \varrho(a)^{-1} \in T$ für jedes ϱ. Dann können wir ϕ durch $\mathrm{ad}a \circ \phi$ ersetzen und annehmen, daß

(5.k) $$g_\varrho \varrho(t) g_\varrho^{-1} = \varrho(t)$$

für jedes ϱ und jedes $t \in T(\bar{Q})$. Somit wird T ein über $\mathbf{Q}$ definierter Torus auch von $\mathcal{I}_\phi$.

Die Gruppe $\mathcal{I}$ erfüllt mit G das Hasseprinzip. Wir können daher das folgende Lemma auf $\mathcal{I}$ anwenden, um T zu bekommen. Obwohl das Lemma wohlbekannt sein muß, haben wir keinen Hinweis auf die Literatur.

Lemma 5.7. *Es gelte das Hasseprinzip für G und es sei $\psi_1 : G \to G_1$ ein über $\bar{\mathbf{Q}}$ definierter Isomorphismus derart, daß $\psi_1^{-1}\sigma(\psi_1)$ inner ist. Dann existieren Cartanuntergruppen T und T_1 von G und G_1, beide über $\mathbf{Q}$ definiert, und ein $g \in G_1(\bar{\mathbf{Q}})$, so daß $\mathrm{ad} g \circ \psi_1$ die Gruppe T auf T_1 abbildet und als Isomorphismus zwischen T und T_1 über $\mathbf{Q}$ definiert ist.*

Die Gruppe G_1 ist eine innere Form von G^*, und das Lemma besagt die Existenz einer Cartanuntergruppe T^*, die in G und in G_1 vorkommt. Es ist eine Folge von Lemma 5.6 und den folgenden drei Lemmata, die wir auf G und G_1 anwenden.

Lemma 5.8. ([Sh], Corollary 2.9). *Wenn T^* fundamental in G^* über $\mathbf{R}$ ist, dann kommt es lokal im Unendlichen in G vor.*

Lemma 5.9. *Es seien v eine endliche Stelle von $\mathbf{Q}$ und T^* eine Cartanuntergruppe von G^* über Q_v mit T^*_{ad} isotrop. Dann kommt T in G vor.*

Es sei N der Kern von $G^*_{\mathrm{sc}} \to G^*_{\mathrm{ad}}$. Das Lemma ist eine wohlbekannte Folge der Existenz einer Bijektion: $H^1(\mathbf{Q}_p, G^*_{\mathrm{ad}}) \to H^2(\mathbf{Q}_p, N)$ (siehe [Kn], Satz 2) und der exakten Sequenz

$$H^1(\mathbf{Q}_p, T^*_{\mathrm{ad}}) \to H^2(\mathbf{Q}_p, N) \to H^2(\mathbf{Q}_p, T^*_{\mathrm{sc}}) = 0.$$

Für die Existenz derartiger T^* verweisen wir auf [Kn], S.271.

Lemma 5.10. *Es sei S eine endliche Menge von Primstellen von $\mathbf{Q}$, und es sei für jedes $v \in S$ eine Cartanunergruppe T^*_v von G^* über $\mathbf{Q}_v$ gegeben. Dann existiert eine über $\mathbf{Q}$ definierte Cartanuntergruppe T^* von G^*, die für jedes $v \in S$ über $\mathbf{Q}_v$ zu der Gruppe T^*_v konjugiert ist.*

Es folgt leicht aus der Bruhat-Zerlegung, daß die Varietät G^*_{sc} rational ist. Folglich gilt für G^*_{sc} der schwache Approximationssatz, woraus wir das Lemma sofort schließen, indem wir ein Produkt $\prod_v t_v$ von regulären Elementen aus $T_v(\mathbf{Q}_v)$ approximieren.

Der Torus T, für den (5.k) gilt, ist auch eine über $\mathbf{Q}$ definierte Cartanuntergruppe von G. Aus Lemma 5.1 und Annahme (5.a) folgt, daß T_{ad} über $\mathbf{R}$ anisotrop ist. Wir können daher h so wählen, daß es sich durch T faktorisieren läßt:

$$h(z, w) = z^{\mu_h} w^{\bar{\mu}_h}.$$

Lemma 5.11. *Es gibt ein μ in der Bahn von μ_h unter der Weylgruppe, so daß auf dem Kern ϕ und $\psi_{T,\mu}$ gleich sind, und so daß*

$$\phi(q_\sigma) = b_\sigma \psi_{T,\mu}(q_\sigma),$$

wobei $\{b_\sigma\}$ ein 1-Kozyklus mit Werten aus T ist.

Wir heben hervor, daß $\psi_{T,\mu}$ möglicherweise nicht zulässig ist, denn μ ist vielleicht kein μ_h. Die Einschränkung von ϕ auf $Q(L,m)$ bildet $Q(L,m)$ in T ab und ist über **Q** definiert. Wir können annehmen, indem wir $Q(L,m)$ durch $Q(L,n)$ ersetzen, daß $n=m$. Es sei $\nu_p=\phi(\nu_2)$ ein Kogewicht von T. Es genügt zu zeigen, daß es ein μ in der Bahn von μ_h gibt, so daß

(5.l) $$\mathrm{Nm}_{L_p/\mathbf{Q}_p}\mu=-\nu_p,$$

denn

$$\begin{aligned}|\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L_p/\mathbf{Q}_p)}\sigma\lambda(\gamma_m)|_p &= |\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L_p/\mathbf{Q}_p)}\sigma\phi^*(\lambda)(\delta_m)|_p\\ &= |\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L_p/\mathbf{Q}_p)}\sigma\pi_\lambda|_p\\ &= q^{\langle\nu_2,\chi_{\pi_\lambda}\rangle}.\end{aligned}$$

Folglich ist nach der Definition $\psi_{T,\mu}$ auf $Q(L,m)$ durch $\delta_m\to\gamma_m$ definiert.

Die Existenz von μ werden wir aus der Tatsache schließen, daß X_p nicht leer ist. Den Homomorphismus $\xi_p=\phi\circ\zeta_p$ müssen wir durch $\xi_p'=\mathrm{ad}u\circ\xi_p$ ersetzen, um F zu definieren. Wir können annehmen, daß $u\in T$.

Es sei L eine endliche unverzweigte Erweiterung von $\mathbf{Q}_p$, so daß ξ_p' auf $\mathcal{D}_L^L$ definiert ist, und es sei

$$\xi_p'(d_\sigma)=g_\sigma\rtimes\sigma,$$

wobei σ das Frobeniuselement aus $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q}_p)$ ist. Dem Homomorphismus ξ_p' haben wir eine parabolische Untergruppe P und einen Levifaktor J zugeordnet. Es sei M der Zentralisator eines maximalen zerfallenden Untertorus von T. Die Gruppe M ist ein Levifaktor einer in P enthaltenen, über $\mathbf{Q}_p$ definierten parabolischen Untergruppe Q von G. Die Gruppe M ist quasi-zerfallend.

Wir haben schon gesehen, daß wir das Gebäude $\mathcal{B}(M,\mathfrak{k})$ in $\mathcal{B}(G,\mathfrak{k})$ einbetten können, und zwar so, daß der K_p definierende Punkt x^0 in $\mathcal{B}(M,\mathfrak{k})$ enthalten ist. Wir können sogar annehmen, daß x^0 in dem Apartment zu einer über $\mathbf{Q}_p$ definierten und über $\mathfrak{k}$ zerfallenden Cartanuntergruppe T' von M enthalten ist. Ein Punkt $x\in X_p$ kann als $x=hx^0$ geschrieben werden mit $h=nm$ aus $Q(\mathfrak{k})$. Der Punkt m liegt in $M(\mathfrak{k})$ und n im unipotenten Radikal von Q. Dann ist

(5.m) $$\mathrm{inv}\,(x,Fx)=\mathrm{inv}\,\big(hx^0,g_\sigma\sigma(h)x^0\big)=\mathrm{inv}\,\big(x^0,h^{-1}g_\sigma\sigma(h)x^0\big),$$

denn $\sigma(x^0)=x^0$.

Es sei $\{\mu'\}$ die Bahn in $X_*(T')$, die μ' entspricht. Es sei $t_{\mu'}$ durch

$$\chi(t_{\mu'})=p^{\langle\chi,\mu'\rangle},\ \chi\in X^*(T'),$$

definiert, und es sei $f_{\mu'}$ die charakteristische Funktion der Doppelklasse $K_0 t_{\mu'} K_0$, wobei K_0 den Stabilisator von x^0 in $G(\mathfrak{k})$ bedeutet. Aus (5.m) folgt

$$f_{\mu'}\big(m^{-1} g_\sigma \sigma(m) n'\big) = 1$$

mit

$$n' = \sigma(m)^{-1} g_\sigma^{-1} n^{-1} g_\sigma \sigma(n) \sigma(m)$$

im unipotenten Radikal von Q.

Es gibt ein $\mu'' \in X_*(T')$, so daß

$$m^{-1} g_\sigma \sigma(m) \in (K_0 \cap M) t_{\mu''} (K_0 \cap M).$$

Aus Lemmata 2.3.3 und 2.3.9 von [K3] folgt leicht, daß μ'' in der Bahn von μ' liegt, denn μ' ist ein "winziges Gewicht".

Wenn λ der in Lemma 3.3 von [K3] eingeführte Homomorphismus $M(\mathfrak{k}) \to X^*\big(Z(\hat{M})^\Gamma\big)$ ist, ist $\lambda\big(m^{-1} g_\sigma \sigma(m)\big)$ daher die Einschränkung von μ'' auf $Z(\hat{M})^\Gamma$.

Die Definition von [K3] ist eigentlich nur für endliche Erweiterungen von $\mathbf{Q}_p$ eingenführt. Sie kann aber offensichtlich auf $M(\mathfrak{k})$ erweitert werden.

Die Gleichung (5.1) gilt dann und nur dann, wenn

(5.n) $$[L_p : \mathbf{Q}_p]\langle \mu, \chi \rangle = -\langle \nu_p, \chi \rangle$$

für jedes über $\mathbf{Q}_p$ definierte Gewicht χ von T. So ein Gewicht kann als Gewicht von M aufgefaßt werden, und, wenn μ ein Gewicht von T ist, das zu μ'' in M konjugiert ist, gilt

$$\langle \mu, \chi \rangle = \langle \mu'', \chi \rangle.$$

Es ist ferner μ in der Bahn von μ_h bezüglich der Weylgruppe von G.

Nach der Definition von λ gilt

$$|\chi\big(m^{-1} g_\sigma \sigma(m)\big)| = p^{-\langle \mu'', \chi \rangle}.$$

Weil χ über $\mathbf{Q}_p$ definiert ist, ist

$$\chi\big(m^{-1} g_\sigma \sigma(m)\big)^l = \chi\big(m^{-1} g_\sigma \sigma(g_\sigma) \cdots \sigma^{l-1}(g_\sigma) \sigma^l(m)\big),$$

$I = [L_p : \mathbf{Q}_p]$, und

$$p^{-l\langle \mu'', \chi \rangle} = |\chi(m^{-1} g_\sigma \sigma(g_\sigma) \cdots \sigma^{l-1}(g_\sigma) \sigma^l(m))|.$$

Nach der Definition ist

$$g_\sigma \sigma(g_\sigma) \ldots \sigma^{l-1}(g_\sigma) = \xi'_p(p^{-1}) = p^{-\nu_p},$$

und

$$|\chi(p^{-\nu_p})| = p^{\langle \nu_p, \chi \rangle}.$$

Da

$$|\chi(m)| = |\chi(\sigma^l(m))|,$$

haben wir (5.n) bewiesen.

Der Satz 5.3 ist noch nicht bewiesen. Als nächste Annäherung beweisen wir folgendes Lemma.

Lemma 5.12. *Es gibt ein über* $\mathbf{Q}$ *definiertes* T' *mit* T'_{ad} *anisotrop über* $\mathbf{R}$ *und ein* h'*, das durch* T' *faktorisiert, so daß* ϕ *einem* ϕ' *derart äquivalent ist, daß* $\phi' = \psi_{T,\mu'_{h'}}$ *auf dem Kern von* $\mathcal{G}$ *und*

$$\phi'(q_\sigma) = b_\sigma \psi_{T',\mu_{h'}}(q_\sigma),$$

wobei $\{b_\sigma\}$ *ein 1-Kozyklus mit Werten aus* T' *ist.*

Es sei $\mu = \omega \cdot \mu_h$, mit ω in der Weylgruppe. Dann definiert $1 \to 1, \iota \to (-1)^{\omega\mu - \mu}$ einen 1-Kozyklus α^∞ von $\text{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q}_\infty)$ mit Werten aus $T_{\text{sc}}(\mathbf{C})$, wobei angenommen wird, daß $L_\infty = \mathbf{C}$. Es gibt ein w im Normalisator von T_{sc} in $G_{\text{sc}}(\mathbf{C})$, daß ω repräsentiert, und für das gilt

$$\alpha^\infty_\sigma = w\sigma(w^{-1}), \quad \sigma \in \text{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q}_\infty),$$

(siehe [Sh], Prop. 4.2).

Dem Lemma 7.16 von [L3] zufolge gibt es einen globalen Kozyklus α mit Werten aus T_{sc}, der im Unendlichen zu α^∞ äquivalent ist. Wir können sogar annehmen, indem wir α^∞ und w zweckmäßig abändern, daß α^∞ die Einschränkung von α auf $\text{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q}_\infty)$ ist. Das Bild von α^∞ in $H^1(\mathbf{Q}_\infty, G_{\text{sc}})$ ist trivial. Aus dem Hasseprinzip folgern wir, daß α die triviale Klasse in $H^1(\mathbf{Q}, G_{\text{sc}})$ definiert. Es sei

$$\alpha_\sigma = u^{-1}\sigma(u), \quad u \in G_{\text{sc}}(\bar{\mathbf{Q}}).$$

Der Torus $T' = uTu^{-1}$ und der Homomorphismus $t \to t' = utu^{-1}$ sind beide über $\mathbf{Q}$ definiert. Wir ersetzen ϕ durch $\phi' = \text{ad}\, u \circ \phi$ und folglich γ_n durch $\gamma'_n = u\gamma_n u^{-1}$. Es sei μ' das μ entsprechende Kogewicht von T'. Der Homomorphismus $\psi_{T',\mu'}$ ist definiert und $\psi_{T',\mu'} = \phi'$ auf dem Kern. Es gilt ferner

$$\phi'(g_\sigma) = b'_\sigma \psi_{T',\mu'}(q_\sigma),\ b'_\sigma \in T'.$$

Es kommt also darauf an, zu zeigen, daß $\mu' = \mu_{h'}$, wobei h' noch zu definieren ist.

Es gilt

$$u^{-1}\sigma(u) = w\sigma(w^{-1}),\ \sigma \in \text{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q}_\infty).$$

Folglich ist $uw \in G_{\rm sc}(\mathbf{R})$. Es sei $h' = \operatorname{ad} uw \circ h$. Dann ist

$$\mu_{h'} = \operatorname{ad} u \circ \mu = \mu'.$$

Bis jetzt haben wir die Voraussetzung $G_{\rm der} = G_{\rm sc}$ nicht gebraucht. Alle Lemmata gelten also ohne sie. Im letzten Schritt wird sie gebraucht. Dem vorigen Lemma zufolge ersetzen wir ϕ, T, μ durch $\phi', T', \mu' = \mu_{h'}$.

Der Kozyklus $\{b'_\sigma\}$ nimmt Werte in T und deshalb in G. Da ϕ zulässig ist, stellt das Bild von $\{b_\sigma\}$ in $G_{\rm ab}$ die triviale Klasse dar. Wir können daher annehmen, daß $b_\sigma \in T_{\rm sc}(\bar{\mathbf{Q}})$.

Das nächste Lemma ist eine Bemerkung aus [De1].

Lemma 5.13. *Es sei $G_{\rm sc} = G_{\rm der}$, und $G_{\rm sc}$ erfülle das Hasseprinzip. Dann gilt das Hasseprinzip für das Bild von $H^1(\mathbf{Q}, G_{\rm sc})$ in $H^1(\mathbf{Q}, G)$.*

Wir haben ein Diagramm mit exakten Folgen

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\mathbf{Q}, G_{\rm ab}) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{Q}, G_{\rm sc}) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{Q}, G) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^0(\mathbf{R}, G_{\rm ab}) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{R}, G_{\rm sc}) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{R}, G). \end{array}$$

Darüber hinaus ist das Bild von $H^0(\mathbf{Q}, G_{\rm ab})$ in $H^0(\mathbf{R}, G_{\rm ab})$ dicht, und ein 1-Kozykel mit Werten aus einer kleinen Umgebung des Einselements in $G_{\rm sc}(\mathbf{C})$ ein Rand. Somit folgt das Lemma.

Lemma 5.14. *Es sei G' eine zusammenhängende reduktive Gruppe über $\mathbf{R}$ mit $G'_{\rm ad}(\mathbf{R})$ kompakt, und es sei T' eine Cartanuntergruppe von G'. Dann ist $H^1(\mathbf{R}, T') \to H^1(\mathbf{R}, G')$ injektiv*

Es sei $\{t_\sigma\}$ ein Kozykel mit Werten aus T', der in G' ein Rand ist

$$t_\sigma = g^{-1}\sigma(g).$$

Dann ist $gT'g^{-1}$ auch eine Cartanuntergruppe über $\mathbf{R}$. Da alle Cartanuntergruppen über $\mathbf{R}$ unter $G(\mathbf{R})$ konjugiert sind, können wir annehmen, daß $T' = gT'g^{-1}$. Dann definiert g ein Element aus der Weylgruppe, das auch mittels eines Elementes aus $G(\mathbf{R})$ definiert werden kann. Folglich ist $\{t_\sigma\}$ ein Rand in $T(\mathbf{C})$.

Der Satz 5.3 ist noch nicht bewiesen, aber wir sind so weit, daß ϕ als ein Produkt des Kozyklus $\{b_\sigma\}$ und $\psi_{T,\mu}$ geschrieben ist. Insbesondere

$$\phi(q_\sigma) = g_\sigma \rtimes \sigma,$$

$$\psi_{T,\mu}(q_\sigma) = h_\sigma \rtimes \sigma,$$

$$g_\sigma = h_\sigma b_\sigma,$$

mit h_σ, b_σ aus T.

Der Voraussetzung (5.b) zufolge gilt für $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q}_\infty)$

$$g_\sigma \rtimes \sigma = u(h_\sigma \rtimes \sigma)u^{-1}$$

mit $u \in G(L_\infty)$. Folglich ist die Einschränkung von $\{b_\sigma\}$ auf $\mathrm{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q}_\infty)$ in der getwisteten Gruppe G' trivial und daher schon in T trivial. Aus Lemma 5.13 schließen wir, daß es ein $v \in G(L)$ gibt, so daß

$$b_\sigma = v\sigma(v^{-1}), \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q}).$$

Dann ist

$$v^{-1}(g_\sigma \rtimes \sigma)v = v^{-1}(h_\sigma b_\sigma \rtimes \sigma)v = v^{-1}h_\sigma v \rtimes \sigma. \tag{5.o}$$

Aber der Isomorphismus $t \to v^{-1}tv$ ist ein über $\mathbf{Q}$ definierter Isomorphismus zwischen den zwei über $\mathbf{Q}$ definierten Tori T und $T' = v^{-1}Tv$, und wenn μ' das Bild von μ ist, folgt aus (5.o)

$$\mathrm{ad}\, v^{-1} \circ \phi = \psi_{T',\mu'}.$$

Somit ist Satz 5.3 bewiesen.

Noch nicht veröffentliche Ergebnisse von Kottwitz zeigen, wenigstens im Fall einer anisotropen Gruppe G, wie man die lokale Zetafunktion anhand einer guten Aufzählung der Punkte auf der reduzierten Varietät mittels teils bewiesener, teils unbewiesener Sätze aus der harmonischen Analyse berechnen kann. Die erwünschete Aufzählung, die in Satz 5.21 und Satz 5.25 steht, ergibt sich aus der oben vermuteten Beschreibung, aber nicht ohne weitere Mühe, und der Zweck des übrigen Teils dieses Abschnitts ist es, die dazu nötigen Betrachtungen darzulegen. Wir beginnen mit der Definition einer von Kottwitz eingeführten Invarianten, die wir brauchen werden, und die wir die Kottwitz'sche $\big($oder kürzer $(K-)\big)$Invariante nennen werden.

Die Shimuravarietät entspricht einer Gruppe G und einer Klasse X_∞. Es wird immer noch vorausgesetzt, daß G_{der} einfach-zusammenhängend ist. Es ist der Zweck von [K3] und anderen Arbeiten, die alternierende Summe der Spuren auf zweckmäßigen Kohomologiegruppen eines Produkts einer Potenz des Frobenius an der Stelle $\mathfrak{p}$ von E mit einem Hecke-Operator zu bestimmen. Die Betrachtungen von [K3] wollen wir nicht wiederholen und weitere Betrachtungen von Kottwitz wollen wir nicht vorwegnehmen. Wir bemerken nur, der Verständlichkeit halber, daß wenn es sich um die m^{te} Potenz des Frobenius handelt, dann ist die natürliche Zahl n, die wir jetzt festlegen, gleich $mr, r = [E_\mathfrak{p} : \mathbf{Q}_p]$. Es sei $L_n \subset \bar{\mathbf{Q}}_p$ die unverzweigte Erweiterung von $\mathbf{Q}_p$ vom Grad n.

Es seien gegeben ein halb-einfaches Element ε aus $G(\mathbf{Q})$, ein $\gamma = \big(\gamma(l)\big)_{l\neq p}$, $\gamma(l) \in G(\mathbf{Q}_l)$, und ein $\delta \in G(L_n)$. Die K-Invariante wird dem Tripel $(\gamma, \delta; \varepsilon)$ zugeordnet. Es sei $G(\varepsilon)$ der Zentralisator von ε in G. Er ist zusammenhängend, weil G_{der} einfachzusammenhängend ist. Kottwitz bezeichnet die Zusammenhangskomponenten der L-Gruppen von G und $G(\varepsilon)$ mit $\hat{G}$ und $\hat{G}(\varepsilon)$ und ihre Zentren mit $Z(\hat{G})$ und $Z\big(\hat{G}(\varepsilon)\big)$. Die globale Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ bezeichnet er mit Γ und die lokale Galoisgruppe an der Stelle v mit $\Gamma(v)$. Wir übernehmen diese Bezeichnungen und verkürzen $Z(\hat{G})$ bzw. $Z\big(\hat{G}(\varepsilon)\big)$ zu Z bzw. $Z(\varepsilon)$. Kottwitz betrachtet auch die Gruppe $\big(Z(\varepsilon)/Z\big)^{\Gamma}$ der Γ-invarianten Elemente im Quotienten $Z(\varepsilon)/Z$ sowie die Gruppe $\pi_0\big((Z(\varepsilon)/Z)^{\Gamma}\big)$ ihrer Zusammenhangskomponenten und deren duale Gruppe X. Wir bemerken, daß $Z(\varepsilon)/Z = Z(\hat{H})$ und $\hat{G}(\varepsilon)/Z = H$, wobei $H = G(\varepsilon) \cap G_{\mathrm{der}}$. Für jede Stelle v sei Y_v die Gruppe derjenigen Charaktere von $\pi_0\big((Z(\varepsilon)/Z)^{\Gamma(v)}\big)$, die trivial auf $\pi_0\big(Z(\varepsilon)^{\Gamma(v)}\big)$ sind und X_v ihr Bild in X. Die dem Tripel zugeordnete Invariante $\kappa(\gamma,\delta;\varepsilon) = \kappa(\gamma,\delta)$ wird in der Gruppe $X/\prod_v X_v$ liegen. Das ist die Gruppe $\mathfrak{K}(I_0/F)^D$, die in der Formel (6.5.1) von [K5] vorkommt.

Um $\kappa(\gamma,\delta)$ zu definieren, müssen wir $(\gamma,\delta;\varepsilon)$ einige Bedingungen auferlegen. Zunächst fordern wir:

(i) ε ist in $G(\mathbf{R})$ elliptisch.

(ii) Für jedes $l \neq p$ sind $\gamma(l)$ und ε stabil konjugiert. Da G_{der} einfach-zusammenhängend ist, bedeutet das, daß ε und $\gamma(l)$ in $G(\bar{\mathbf{Q}}_l)$ konjugiert sind. Für fast jedes l sollen ε und $\gamma(l)$ in $G(\mathbf{Q}_l)$ konjugiert sein.

(iii) Wenn σ das Frobeniuselement aus $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}/\mathbf{Q}_p)$ bezeichnet und

$$N_{L_n/\mathbf{Q}_p}\delta = \delta\sigma(\delta)\cdots\sigma^{n-1}(\delta),$$

so soll $N_{L_n/\mathbf{Q}_p}\delta$ in $G(\bar{\mathbf{Q}}_p)$ zu dem Element ε konjugiert sein.

Jedes $h \in X_\infty$ kann geschrieben werden als

$$h(z,w) = z^{\mu_h} w^{\bar{\mu}_h} = z^{\mu} w^{\bar{\mu}}.$$

Es sei $\mathcal{M}_{\mathbf{C}}$ die μ enthaltende Konjugationsklasse von Homomorphismen von $\mathbf{G}_m$ nach G. Sie hängt nur von X_∞ ab und nicht von h, und definiert auch $\mathcal{M}_{\bar{\mathbf{Q}}}$ sowie $\mathcal{M}_{\bar{\mathbf{Q}}_p}$, denn wir haben $\bar{\mathbf{Q}}$ in $\mathbf{C}$ und $\bar{\mathbf{Q}}_p$ eigenbettet.

Alle Elemente aus $\mathcal{M}_{\bar{\mathbf{Q}}_p}$ (oder $\mathcal{M}_{\mathbf{C}}$) definieren ein und denselben Homomorphismus μ_2 in

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, G_{\mathrm{ab}}) = X^*(Z).$$

Andererseits definiert δ offensichtlich ein Element der in [K4] eingeführten Menge $B(G_{\mathrm{ab}})$ und folglich nach dem dort bewiesenen Satz ein Element aus $X^*(Z^{\Gamma(p)})$, wobei hervorzuheben ist, daß $Z = \hat{G}_{\mathrm{ab}}$. An δ stellen wir folgende Bedingung.

$\big(*(\delta)\big)$ Das von δ definierte Element aus $X^*(Z^{\Gamma(p)})$ ist die Einschränkung von μ_2.

Die zweite Bedingung ist eine Forderung an ε. Es sei $M = M(\varepsilon)$ der Zentralisator in G des maximalen über $\mathbf{Q}_p$ zerfallenen Torus im Zentrum von $G(\varepsilon)$. Wenn $\mu : \mathbf{G}_m \to M$, dann läßt sich μ durch wenigstens eine Cartanuntergruppe T faktorisieren und definiert daher ein Element aus $X_*(T)$, dessen Konjugationsklasse wohlbestimmt ist. Für eine beliebige Cartanuntergruppe $\hat{T}$ von $\hat{M}$ definiert μ also eine Bahn unter der Weylgruppe von M in $X^*(\hat{T})$ und schließlich ein wohlbestimmtes Element $\mu_1 \in X^*\big(Z(\hat{M})\big)$, das weder von T noch von $\widehat{T}$ abhängt. Da G über einer unverzweigten Erweiterung von $\mathbf{Q}_p$ zerfällt, so auch M, und der in [K3], §3 definierte Homomorphismus $\lambda = \lambda_M : M(\mathbf{Q}_p) \to X^*\big(Z(\hat{M})\big)^{\Gamma(p)}$ steht zur Verfügung.

Die zweite Bedingung lautet:

$\big(*(\varepsilon)\big)$ Es existiert ein $\mu : \mathbf{G}_m \to M$, das über L_n definiert ist, das mittels der Einbettung $M \subsetneqq G$ ein Element aus $\mathcal{M}_{\bar{\mathbf{Q}}_p}$ definiert, und so daß die Gleichung

$$\lambda(\varepsilon) = \mathrm{Nm}_{L_n/\mathbf{Q}_p}\mu_1$$

gilt.

Die Invariante $\kappa(\gamma, \delta; \varepsilon)$ wird als ein Charakter auf dem Urbild U von $\big(Z(\varepsilon)/Z\big)^{\Gamma}$ in $Z(\varepsilon)$ definiert und zwar als ein Produkt

$$\kappa(\gamma, \delta; \varepsilon) = \prod_v \beta(v). \tag{5.p}$$

Dabei ist $\beta(v)$ die Einschränkung auf U eines Charakters $\beta'(v)$ des Urbilds U_v von $\big(Z(\varepsilon)/Z\big)^{\Gamma(v)}$. Fast alle $\beta'(v)$ sind trivial, und das Produkt ist auf Z trivial.

Für $v = l \neq p$ sind ε und γ_l stabil konjugiert. Folglich gibt es ein $c \in G(\bar{\mathbf{Q}}_l)$, so daß

$$\gamma_l = c\varepsilon c^{-1},$$

und $\{b_\sigma\} = \{c^{-1}\sigma(c)\}$ ist ein 1-Kozykel von $\Gamma(v)$ mit Werten aus $G(\varepsilon)$. Nach [K2], Prop. 6.4, definiert er ein Element aus $\pi_0\big((Z(\varepsilon)^{\Gamma(v)}\big)^D$. Da das Bild des Kozykels in G_{ad} trivial ist, ist dieses Element trivial auf $\pi_0(\hat{G}_{\mathrm{ab}}^{\Gamma(v)}) = \pi_0(Z^{\Gamma(v)})$, und definiert daher einen Charakter von $\pi_0\big(Z(\varepsilon)^{\Gamma(v)}\big)/\pi_0(Z^{\Gamma(v)})$, den wir auf $\pi_0\big((Z(\varepsilon)/Z)^{\Gamma(v)}\big)$ erweitern können, wenn wir bemerken, daß die Zusammenhangskomponente von $\big(Z(\varepsilon)/Z\big)^{\Gamma(v)}$ das Bild der Zusammenhangskomponente von $Z(\varepsilon)^{\Gamma(v)}$ ist. Indem wir den so erhaltenen Charakter von U_v hochheben, bekommen wir $\beta'(v)$. Es ist auf Z trivial.

An der Stelle p gilt

$$\mathrm{Nm}_{L_n/\mathbf{Q}_p}\delta = c\varepsilon c^{-1},$$

wobei c ein Element aus G mit Koeffizienten in $\bar{\mathbf{Q}}_p$ ist. Nach dem Satz von Steinberg können wir annehmen, daß $c \in G(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}})$. Es gilt

$$\delta^{-1}c\varepsilon c^{-1}\delta = \sigma(\delta)\cdots\sigma^n(\delta) = \sigma(c\varepsilon c^{-1}) = \sigma(c)\varepsilon\sigma(c^{-1}).$$

Folglich ist $b = c^{-1}\delta\sigma(c)$ mit ε vertauschbar und definiert (mit der Bezeichnung von [K4]) ein Element aus $B\big(G(\varepsilon)\big)$, das nur von ε und δ abhängt.

Lemma 5.15. *b ist wesentlich (basic) im Sinne von [K4].*

Es sei n' durch n teilbar, $n' = kn$. Dann ist

$$b\sigma(b)\cdots\sigma^{n-1}(b) = \varepsilon c^{-1}\sigma^n(c),$$

so daß erstens $c^{-1}\sigma^n(c) \in G(\varepsilon)$, und zweitens

$$b\sigma(b)\cdots\sigma^{n'-1}(b) = \varepsilon^k c^{-1}\sigma^{n'}(c).$$

Nach den Definitionen ([K4], §4) muß gezeigt werden, daß für n' genügend hoch es einen Homomorphismus ν' von $\mathbf{G}_m$ nach dem Zentrum von $G(\varepsilon)$ gibt, so daß

$$\varepsilon^k c^{-1}\sigma^{n'}(c) = \nu'(p) d^{-1}\sigma^{n'}(d),$$

mit $d \in G(\mathfrak{k}, \varepsilon)$. Es sei T eine Cartanuntergruppe von $G(\varepsilon)$ über $\mathbf{Q}_p$. Es sei

$$|\lambda(\varepsilon)|_p^k = p^{-\nu'(\lambda)},\ \lambda \in X^*(T).$$

Wenn k genügend hoch ist, ist $\nu'(\lambda) \in \mathbf{Z}$ für jedes $\lambda \in X^*(T)$ und folglich $\nu' \in X_*(T)$. Es ist klar, daß ν' unter der Galoisgruppe invariant ist. Es ist daher $\nu' : x \to x^{\nu'}$ ein über $\mathbf{Q}_p$ definierter Homomorphismus von $\mathbf{G}_m$ *nach dem Zentrum* von $G(\varepsilon)$. Für n' hoch ist $c^{-1}\sigma^{n'}(c)$ in einer vorgegebenen Umgebung von 1 enthalten. Da die Eigenwerte von $\nu'(p)^{-1}\varepsilon^k$ Einheiten sind, können wir k durch ein hohes Vielfaches ak ersetzen, und ν' durch $a\nu'$, und annehmen, daß

$$\varepsilon^k c^{-1}\sigma^{n'}(c) = \nu'(p)\cdot e,$$

wobei e in einer vorgegebenen Umgebung V von 1 in $G(\mathfrak{k}, \varepsilon)$ liegt. Aber wie bei dem Beweis von [K3], Lemma 1.4.9, implizit bemerkt wird, gibt es ein V, so daß für jede natürliche Zahl n' gilt $V \subseteqq \{x\sigma^{n'}(x)^{-1} | x \in G(\mathfrak{k}, \varepsilon)\}$.

Es sei $\alpha(p)$ das im Sinne von [K4] b entsprechende Element aus $X^*\big(Z(\varepsilon)^{\Gamma(p)}\big)$. Wegen $*(\delta)$ muß die Einschränkung von $\alpha(p)$ auf $Z^{\Gamma(p)}$ der Einschränkung von μ_2 gleich sein. Folglich gibt es einen Charakter $\beta'(p)$ von U_p, der auf $Z(\varepsilon)^{\Gamma(p)}$ gleich $\alpha(p)$ ist, und auf Z gleich μ_2. Es ist ferner $\beta'(p)$ eindeutig bestimmt bis auf einen Charakter von $\pi_0\big((Z(\varepsilon)/Z)^{\Gamma(p)}\big)$, der trivial ist auf $\pi_0\big(Z(\varepsilon)^{\Gamma(p)}\big)$.

Um $\beta'(\infty)$ zu definieren, wählen wir ein $h \in X_\infty$, das sich durch $G(\varepsilon)$ faktorisiert, was möglich ist, weil ε elliptisch ist. Es sei $h(z,w) = z^\mu w^{\bar\mu}$.

Lemma 5.16. (a) *Die Einschränkung $\alpha(\infty)$ von - μ auf $Z(\varepsilon)^{\Gamma(\infty)}$ hängt nicht von der Wahl von h ab.*

(b) Auf $Z^{\Gamma(\infty)}$ ist $\alpha(\infty)$ gleich $-\mu_2$.

Das Lemma, dessen zweite Aussage sowieso klar ist, erlaubt uns $\beta'(\infty)$ zu definieren, genau wie wir $\beta'(p)$ definiert haben, nur daß es auf Z gleich $-\mu_2$ sein soll. Die erste Aussage ist folgenderweise aufzufassen. Wenn $\hat{T}$ eine Cartanuntergruppe von $\hat{G}(\varepsilon)$ ist, dann definiert μ eine Bahn unter der Weylgruppe $\Omega\big(\hat{T}, \hat{G}(\varepsilon)\big)$ in $X^*(T)$. Alle Elemente aus der Bahn haben dieselbe Einschränkung auf $Z(\varepsilon)$ und folglich auf $Z(\varepsilon)^{\Gamma(\infty)}$. Es handelt sich um diese Einschränkung.

Es seien h_1, h_2 zwei Elemente aus X_∞, die sich durch $G(\varepsilon)$ faktorisieren. Wir wollen beweisen, daß die entsprechenden μ_1, μ_2 dieselbe Einschränkung auf $Z(\varepsilon)^{\Gamma(\infty)}$ haben. Das ist allerdings klar, wenn h_1, h_2

unter $G(\varepsilon.\mathbf{R})$ konjugiert sind. Wir können deshalb annehmen, daß sie auch durch eine gemeinsame elliptische Cartanuntergruppe $T \subseteqq G(\varepsilon)$ faktorisieren. Es sei $h_2 = h_1^g = \operatorname{ad} g^{-1} \circ h_1, g \in G(\mathbf{R})$. Dann ist $K_2 = K_1^g$, wenn K_i der Zentralisator von h_i in $G(\mathbf{R})$ ist. Folglich sind T und T^g Cartanuntergruppen von K_2. Wir können daher g durch gk ersetzen, $k \in K_2$, und annehmen, daß $T = T^g$. Das Element g stellt ein Element der Weylgruppe dar, dem wir in der üblichen Weise ([Sh]) eine Klasse in $H^1(\mathbf{R}, T)$ zuordnen. Sie ist durch

$$\iota \to (-1)^{g^{-1}\mu_1 - \mu_1} = (-1)^{\mu_2 - \mu_1}$$

definiert ([MS2], Prop. 4.2). Andererseits ist sie trivial. Folglich definiert $\mu_2 - \mu_1$ die triviale Klasse in $H^1\big(\mathbf{R}, X_*(T)\big)$, woraus sofort folgt, daß $\mu_2 - \mu_1$ trivial auf $\hat{T}^{\Gamma(\infty)}$ ist. Um so mehr ist es auf $Z(\varepsilon)^{T(\infty)}$ trivial, denn $Z(\varepsilon) \subseteqq \widehat{T}$ und die Wirkungen von $\Gamma(\infty)$ auf den beiden Gruppen sind verträglich.

Es bleibt zu zeigen, daß das Produkt $\prod \beta(v)$ auf der Einskomponente $[(Z(\varepsilon)/z)^\Gamma]^0$ trivial ist, d.h. daß $\beta(\infty) \cdot \beta(p)$ auf $[Z(\varepsilon)^\Gamma]^0$ trivial ist. Wir betrachten das Bild von $\alpha(p)$ unter der Verkettung von Abbildungen

$$X^*\big(Z(\varepsilon)^{\Gamma(p)}\big) \to X^*\big(Z(\bar{M})^{\Gamma(p)}\big) \to X^*\big(Z(\bar{M})^{\Gamma(p)}\big) \otimes \mathbf{Q},$$

$$X^*\big(Z(\hat{M})^{\Gamma(p)}\big) \otimes \mathbf{Q} = X^*\big(Z(\varepsilon)\big)^{\Gamma(p)} \otimes \mathbf{Q} \to X^*\big(Z(\varepsilon)\big)^{\Gamma} \otimes \mathbf{Q}.$$

Das Bild von $\alpha(p)$ in $X^*\big(Z(\hat{M})^{\Gamma(p)}\big) \otimes \mathbf{Q}$ ist gleich

$$\frac{1}{n}\lambda_M(\mathrm{Nm}_{L_n/\mathbf{Q}_p} b)|_{Z(\hat{M})^{\Gamma(p)}} = \frac{1}{n}\lambda_M(\varepsilon)|_{Z(\hat{M})^{\Gamma(p)}}.$$

Andererseits ist das Bild von $\mu \in X^*\big(Z(\varepsilon)^{\Gamma(\infty)}\big)$ in $X^*\big(Z(\varepsilon)\big)^\Gamma \otimes \mathbf{Q}$ gleich dem Bild von $\mu_1 \in X^*\big(Z(\hat{M})\big)$, also gleich $\frac{1}{n}\mathrm{Nm}_{L_n/\mathbf{Q}_p}\mu_1$. Die Behauptung folgt daher aus der Bedingung $\big(*(\varepsilon)\big)$.

Die Invariante $\kappa(\gamma, \delta)$ ist jetzt mittels des Produkts (5.p) definiert. Es seien ε und ε' aus $G(\mathbf{Q})$ stabil konjugiert. Die Bedingungen (i), (ii), (iii) gelten auch für $(\gamma, \delta, \varepsilon')$ sowie die Bedingung $*(\delta)$.

Lemma 5.17. *Es erfülle $\varepsilon \in G(\mathbf{Q}_p)$ die Bedingung $*(\varepsilon)$ und es sei $\varepsilon' \in G(\mathbf{Q}_p)$ stabil konjugiert zu ε. Dann erfüllt ε' die Bedingung $*(\varepsilon')$.*

Es sei $\varepsilon' = \varepsilon^g, g \in G(\bar{\mathbf{Q}}_p)$. Dann ist $M' = M^g$, und die daraus abgeleitete Abbildung $M_{\mathrm{ab}} \to M'_{\mathrm{ab}}$ ist über $\mathbf{Q}_p$ definiert. Die Gleichung erlaubt es uns auch $Z(\hat{M})$ mit $Z(\hat{M}')$ zu identifizieren. Dann entsprechen μ und ad $g^{-1} \circ \mu$ derselben Bahn in $X^*(T)$, so daß $\mu_1 = \mu_1'$. Da μ über L_n definiert ist, ist die Konjugationsklasse von ab $g^{-1} \circ \mu$ über L_n definiert. Es folgt aus [K3], Lemma 1.1.3, daß es ein $\mu' : \mathbf{G}_m \to M'$ gibt, das über L_n definiert ist, und das in $M'(\bar{\mathbf{Q}}_p)$ zu dem Homomorphismus ad $g^{-1} \circ \mu$ konjugiert ist, denn G, und folglich auch M', ist über $\mathbf{Q}_p$ quasi-zerfallend. Wenn wir zeigen, daß M_{der} und M'_{der} einfach-zusammenhängend sind, dann folgt es sofort aus der Definition, daß $\lambda_M(\varepsilon) = \lambda_{M'}(\varepsilon')$. Somit wäre das Lemma bewiesen.

Wir betrachten M allein und zeigen zu einem späteren Zweck mehr als jetz eigentlich nötig. M ist ein Levi-Faktor einer über $\mathbf{Q}_p$ definierten quasi-zerfallenden Gruppe G mit G_{der} einfach-zusammenhängend. Da

$M_{\mathrm{der}} \subseteqq M \cap G_{\mathrm{der}}$, nehmen wir augenblicklich an, daß $G = G_{\mathrm{der}}$. Es sei $T \subseteqq M$ eine über $\mathbf{Q}_p$ definierte Cartanuntergruppe von G, die in einer über $\mathbf{Q}_p$ definierten Boreluntergruppe B liegt. Die bezüglich B einfachen Wurzeln $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ von T in G können wir in zwei Mengen einteilen, die Wurzel $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ von T in M und die anderen $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_s$. Als Basis für $X^*(T)$ wählen wir $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ mit $\lambda_i(\hat{\alpha}_j) = \delta_{ij}$, wobei $\hat{\alpha}_j$ die Kowurzel zu α_j ist. Da Kowurzeln bezüglich G auch Kowurzeln bezüglich M sind, ist M_{der} einfach-zusammenhängend. Es ist ferner M das halb-directe Produkt von M_{der} und dem Kern $R \subseteqq T$ von $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Die Gruppe R ist über $\mathbf{Q}_p$ definiert, und $\{\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_s\}$ ist eine Basis für $X^*(R)$. Weil $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_s$ von der Galoisgruppe permutiert werden, ist $H^1(\mathbf{Q}_p, R) = \{1\}$ und $H^1(\mathbf{Q}_p, M) = \{1\}$. Im allgemeinen Fall gilt nur $H^1(\mathbf{Q}_p, M \cap G_{\mathrm{der}}) = \{1\}$.

Lemma 5.18. $\kappa(\gamma, \delta; \varepsilon') = \kappa(\gamma, \delta; \varepsilon)$.

Um diesem Lemma einen Sinn zu geben, müssen wir die Gruppen, in denen die Invarianten liegen, miteinander identifizieren. Es sei $\varepsilon' = g^{-1}\varepsilon g,\ g \in G_{\mathrm{der}}(\bar{\mathbf{Q}})$. Dann ist $u \to u' = g^{-1}ug$ ein Isomorphismus von $G(\varepsilon)$ nach $G(\varepsilon')$, der es uns erlaubt, $G(\varepsilon')$ als eine innere Twistung von $G(\varepsilon)$ zu behandeln, weil für jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ das Element $a_\sigma = g\sigma(g^{-1})$ in $G(\varepsilon)$ liegt. Wir können daher $\hat{G}(\varepsilon')$ mit $\hat{G}(\varepsilon)$ identifizieren sowie $Z(\varepsilon')$ mit $Z(\varepsilon)$, und dann $X'/\prod_v X'_v$ mit $X/\prod_v X_v$. Wir identifizieren $G(\varepsilon')$ mit $G(\varepsilon)$ mittels der Abbildung $u \to u'$. Das ergibt eine neue Wirkung der Galoisgruppe auf $G(\varepsilon)$, die durch die Gleichungen

$$g^{-1}\sigma'(u)g = \sigma(g^{-1}ug)$$

definiert wird. Es ist folglich $\sigma'(u) = a_\sigma \sigma(u) a_\sigma^{-1}$.

Um Lemma 5.18 zu beweisen, brauchen wir zwei zusätzliche Lemmata, die wir nicht nur für $G(\varepsilon)$, sondern für eine beliebige (reduktive) Gruppe G beweisen. Es sei $\{a_\sigma\}$ ein Kozykel von $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ mit Werten aus G, und G' die entsprechende innere Twistung. Man prüft leicht nach, daß die Abbildung $\{v_\sigma\} \to \{v'_\sigma = v_\sigma a_\sigma^{-1}\}$ eine Bijektion $\xi : H^1(\mathbf{Q}, G) \to H^1(\mathbf{Q}, G')$ definiert sowie lokale Bijektionen

$$\xi(v) : H^1(\mathbf{Q}_v, G) \to H^1(\mathbf{Q}_v, G').$$

Wie oben können wir $Z' = Z(G)$ mit Z identifizieren und folglich auch $\pi_0(Z'^{\Gamma(v)})^D$ mit $\pi_0(Z^{\Gamma(v)})^D$. Der Kozykel $\{a_\sigma\}$ definiert eine Klasse $\alpha \in H^1(\mathbf{Q}, G)$ mit Lokalisierungen $\alpha(v)$. Es seien $\delta(v)$ das $\alpha(v)$ entsprechende Element aus $\pi_0(Z^{\Gamma(v)})^D$ (siehe [K2], §6.4, für eine endliche Stelle und [K5], §1.2 für den allgemeinen Fall) und $\eta(v)$ der durch Multiplikation mit $\delta(v)^{-1}$ entstandene Isomorphismus

$$\pi_0(Z^{\Gamma(v)})^D \to \pi_0(Z^{\Gamma(v)})^D = \pi_0(Z'^{\Gamma(v)})^D.$$

Lemma 5.19. *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbf{Q}_v, G) & \xrightarrow{\xi(v)} & H^1(\mathbf{Q}_v, G') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_0(Z^{\Gamma(v)})^D & \xrightarrow[\eta(v)]{} & \pi_0(Z'^{\Gamma(v)})^D \end{array}$$

ist kommutativ.

Wir brauchen eine zentrale Erweiterung

$$1 \to Z \to H \to G \to 1$$

mit H_{der} einfach-zusammenhängend, für die $H^1(\mathbf{Q}_v, H) \to H^1(\mathbf{Q}_v, G)$ surjektiv ist. Für eine nicht-archimedische Stelle ist eine Erweiterung dieser Art in [K2], §6.4 konstruiert. Für eine archimedische Stelle hat eine beliebige z-Erweiterung (siehe [K1], §1), für die Z eine von $\mathbf{C}$ induzierter Torus ist, die erwünschte Eigenschaft. Es genügt, das Lemma für H statt G zu beweisen. Dann können wir nach den Definitionen H durch H_{ab} ersetzen, und für H_{ab} ist die Behauptung klar.

Das zweite Lemma betrifft ein $a \in G(\mathfrak{k})$ derart, daß für ein genügend hohes n, das Produkt $a\sigma(a)\cdots\sigma^{n-1}(a)$ zentral in G ist. Dabei ist σ das Frobeniuselement. Dann definiert a eine Twistung G' von G, für die

$$G'(\mathbf{Q}_p) = \{g \in G(\mathfrak{k}) | a\sigma(g)a^{-1} = g\}.$$

Es definiert $b \to b' = ba^{-1}$ eine Bijektion ξ_p zwischen $B(G)$ und $B(G')$.

Es gilt

$$b'\sigma'(b')\cdots\sigma'^{n-1}(b') = b\sigma(b)\cdots\sigma^{n-1}(b)\sigma^{n-1}(a)^{-1}\cdots\sigma(a)^{-1}a^{-1}.$$

Es folgt dann leicht aus [K4], Prop. 4.3.3, daß ξ_p auch eine Bijektion zwischen $B(G)_b$ und $B(G')_b$ ist. Das a zugeordnete Element $\delta(p)$ liegt in $X^*(Z^{\Gamma(p)})$. Durch Multiplikation mit $\delta(p)^{-1}$ erhalten wir einen Isomorphismus $\eta(p)$,

$$X^*(Z^{\Gamma(p)}) \to X^*(Z^{\Gamma(p)}) = X^*(Z'^{\Gamma(p)}).$$

Lemma 5.20. *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} B(G)_b & \xrightarrow{\xi(p)} & B(G')_b \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^*(Z^{\Gamma(p)}) & \xrightarrow[\eta(p)]{} & X^*(Z'^{\Gamma(p)}) \end{array}$$

ist kommutativ.

Das Lemma wird genau wie das vorherige bewiesen. Man wählt wie in [K2], §6.4 eine zentrale Erweiterung

$$1 \to Z \to H \to G \to 1$$

mit $H_{\text{der}} = H_{\text{sc}}$ und verwendet die Definition von [K4].

Um Lemma 5.17 zu beweisen, wenden wir die zwei Lemmata auf $G(\varepsilon) \cap G_{\mathrm{der}}$ an. Nach Prop. 2.6 von [K5] wäre das Lemma bewiesen, wenn wir zeigen könnten, daß, wenn wir ε durch ε' ersetzen, dann $\beta'(v)$ durch $\delta^{-1}(v)\beta'(v)$ ersetzt werden kann. Dabei ist erstens zu bemerken, daß wir $g \in G_{\mathrm{der}}(\bar{\mathbf{Q}})$ gewählt hatten, damit der Kozykel $\{a_\varrho\}$ in $G(\varepsilon) \cap G_{\mathrm{der}}$ liegt, und zweitens zu erinnern, daß $Z(\varepsilon)/Z = Z(\hat{H})$, wobei $H = G(\varepsilon) \cap G_{\mathrm{der}}$.

Wenn $v = l \neq p$, ist

$$\gamma = c\varepsilon c^{-1} = cg\varepsilon' g^{-1} c^{-1}$$

und

$$g^{-1}c^{-1}\varrho(c)\varrho(g) = g^{-1}(b_\varrho a_\varrho^{-1})g.$$

Folglich wird die Klasse $\alpha(v)$ von $\{b_\varrho\}$ durch $\xi(v)\bigl(\alpha(v)\bigr)$ ersetzt. Wir können daher $\beta'(v)$ durch $\delta^{-1}(v)\beta'(v)$ ersetzen.

An der Stelle p gilt

$$\mathrm{Nm}_{L_n/\mathbf{Q}_p}\delta = cg\varepsilon' g^{-1}c^{-1}.$$

Leider liegt g vielleicht nicht in $G_{\mathrm{der}}(Q_p^{\mathrm{un}})$. Es läßt sich aber als Produkt schreiben, $g = kg_1$ mit $g_1 \in G_{\mathrm{der}}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}})$, $k \in G_{\mathrm{der}}(\bar{\mathbf{Q}}_p) \cap G(\varepsilon)$.

Folglich gilt

$$g\varrho(g)^{-1} = kg_1\varrho(g_1)^{-1}\varrho(k)^{-1},$$

so daß g und g_1 dieselbe Klasse in $H^1(\mathbf{Q}_p, G(\varepsilon) \cap G_{\mathrm{der}})$ liefern. Die durch g definierte Identifizierung von $\hat{G}(\varepsilon')$ und $\hat{G}(\varepsilon)$ ist auch die durch g_1 definierte. Wir können daher g durch g_1 ersetzen, wenn wir zeigen wollen, daß $\beta'(v)$ durch $\delta^{-1}(v)\beta'(v)$ zu ersetzen ist.

Es gilt

$$\mathrm{Nm}_{L_n/\mathbf{Q}_p}\delta = cg_1\varepsilon' g_1^{-1}c^{-1}.$$

Wir ersetzen also b durch

$$b' = g_1^{-1}\bigl(b\sigma(g_1)g_1^{-1}\bigr)g_1,$$

so daß die erwünschte Ersetzung aus Lemma 5.19 und der Verträglichkeit der zwei Bijektionen $B(G)_b \to X^*(Z^{\Gamma(p)})$ und $H^1(\mathbf{Q}_p, G) \to \pi_0(Z^{\Gamma(p)})^D$ folgt ([K4]).

Unendlichen ist die Behauptung, daß $\beta'(\infty)$ durch $\delta^{-1}(\infty)\beta'(\infty)$ ersetzt werden kann, lokal und transitiv. Sie gilt, wenn ε und ε' innerhalb $G_{\mathrm{der}}(\mathbf{R})$ konjugiert sind. Folglich können wir annehmen, daß es eine über $\mathbf{R}$ definierte Cartanuntergruppe T von $G(\varepsilon)$ gibt, so daß $T^g = T$. Wir können weiter annehmen, daß $h : \underline{\mathbf{S}} \to T$. Wenn wir mittels g die zwei Gruppen $Z(\varepsilon)$ und $Z(\varepsilon')$ identifizieren, dann ist $\alpha'(\infty)$ die Einschränkung von $-g\mu$ auf $Z(\varepsilon)^{\Gamma(\infty)}$, d.h. das Produkt von $\alpha(\infty)$ mit dem Inversen der Einschränkung von $g\mu - \mu$. Nach [K5], Th. 1.2, und [MS], Prop. 4.2, ist diese Einschränkung gerade $\delta(\infty)$.

Wir kehren jetzt zu unserer vermuteten Beschreibung der Punkte auf einer reduzierten Shimuravarietät zurück. Es sollen die Voraussetzungen von Satz 5.3 gelten. Es sei m eine vorgegebene natürliche Zahl. Wir betrachten Paare (ϕ, ε) mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\phi : \mathcal{Q} \to \mathcal{G}_G$ ist zulässig.

(ii) $\varepsilon \in I_\phi$.

(iii) Es gibt $\gamma = \big(\gamma(l)\big) \in G(\mathbf{A}_f^p), y \in X^p$, und x in der $G(\mathfrak{k})$-Bahn des Punkts x^0, so daß

$$\varepsilon y = y\gamma \text{ und } \varepsilon x = \Phi^m x.$$

Solche Paare nennen wir *zulässig*. Es wird übringes nicht verlangt, daß x in X_p liegt. Wenn wir y durch yh ersetzen, $h \in G(\mathbf{A}_f^p)$, dann geht γ über in $h^{-1}\gamma h$. Folglich ist die Konjugationsklasse von γ durch das Paar (ϕ, ε) eindeuting bestimmt. Da $\mathcal{I}_\phi$ eine getwistete Form einer Untergruppe von G ist, ist es sowohl global als auch lokal sinnvoll zu behaupten, daß ε zu einem Element aus G stabil konjugiert ist. Insbesondere ist es zu jedem $\gamma(l)$ stabil konjugiert. Es folgt ferner aus Lemma 5.23 weiter unten, daß ε zu einem Element ε_0 aus $G(\mathbf{Q})$ stabil konjugiert ist. Dann ist ε_0 zu jedem $\gamma(l)$ stabil konjugiert. Es folgt leicht aus der Definition von X^p und dem Lemma von Greenberg [G], daß ε_0 und $\gamma(l)$ fast überall konjugiert sind.

Um X_p zu definieren, haben wir ξ_p durch ξ'_p ersetzt und $F = \xi(w) = b \times \sigma$ eingeführt, $b \in G(\mathfrak{k})$. Wenn $\xi'_p = \operatorname{ad} u \circ \xi_p$ ist, dann müssen wir ε durch $\varepsilon' = u\varepsilon u^{-1}$ ersetzen, um seine Wirkung auf X_p und zwecks der Bedingung $\varepsilon x = \Phi^m x$ auch auf $\mathcal{B}(G, \mathfrak{k})$ zu bekommen. Die Bedingung soll deshalb eher $\varepsilon' x = \Phi^m x$ lauten. Nach Lemma 1.4.9 von [K3] hat die Bedingung (ii) zur Folge, daß es ein $c \in G(\mathfrak{k})$ und ein $\delta \in G(L_n)$ gibt, so daß $cb\sigma c^{-1} = \delta\sigma$ und $\mathrm{Nm}_{L_n/\mathbf{Q}_p} \delta = c\varepsilon' c^{-1} = cu\varepsilon u^{-1} c^{-1} = cug\varepsilon_0 g^{-1} u^{-1} c^{-1}$, wenn $\varepsilon = g\varepsilon_0 g^{-1}$. Das Tripel $\gamma, \delta, \varepsilon_0$ erfüllt also die Bedingungen (ii) und (iii) (in denen man ε durch ε_0 ersetze), die zur Definition der K-Invariante gebraucht wurden. Daß die Bedingung (i) auch erfüllt ist, folgt sofort aus (5.b). Die Bedingung $*(\delta)$ folgt aus (5.a), denn b und δ definieren die gleiche Klasse in $B(G)_{\mathrm{ab}}$. Die Bedingung $*(\varepsilon)$ ist auch erfüllt, wie aus Satz 5.21 folgt. Wir können also die Invariante $\kappa(\gamma, \delta; \varepsilon_0)$ einführen. Wir heben sofort hervor, daß das b, das in der Definition der Invarianten auftritt, auch das in $F = b \times \sigma$ vorkommende ist.

Satz 5.21 weiter unten beschreibt diejenigen ε_0, für die es ein zulässiges Paar (ϕ, ε) gibt mit ε und ε_0 stabil konjugiert. Zwei zulässige Paare (ϕ, ε) und (ϕ', ε') heißen *äquivalent*, falls es ein $g \in G(\bar{\mathbf{Q}})$ gibt mit $\phi' = \operatorname{ad} g \circ \phi, \varepsilon' = \operatorname{ad} g(\varepsilon)$. Satz 5.25 zählt die Klassen (ϕ, ε) mit ε zu einem gegebenen ε_0 stabil konjugiert auf. Für die Bedeutung dieser Aufzählung weisen wir auf [K3] und weitere noch nicht geschriebene Arbeiten von Kottwitz hin.

Satz 5.21. *Es existiert dann und nur dann ein zulässiges Paar (ϕ, ε) mit ε stabil konjugiert zu ε_0, wenn ε_0 im Unendlichen elliptisch ist und die Bedingung $*(\varepsilon)$ erfüllt mit $n = rm$.*

Daß ε_0 im Unendlichen elliptisch sein muß, folgt aus den Bedingungen (i) und (ii) an die Zulässigkeit. Um die Notwendigkeit der zweiten Bedingung zu beweisen, brauchen wir einige Vorbereitung, die sich auch beim Beweis von Satz 5.25 als nützlich erweisen wird.

Die Abbildung ϕ heißt *günstig gelegen*, falls $\gamma_n = \phi(\delta_n)$ für hohes n in $G(\mathbf{Q})$ liegt. Dem Lemma 5.4 zur Folge können wir annehmen, daß ϕ günstig liegt. Dann ist $I_\phi = \mathfrak{I}_\phi(\mathbf{Q})$, wobei $\mathfrak{I}_\phi$ eine getwistete Form des Zentralisators $\mathfrak{I}$ von γ_n ist (n genügend hoch). Wenn $\phi(q_\varrho) = b_\varrho \times \varrho$, dann liegt b_ϱ in $\mathfrak{I}$ und $\{b_\varrho\}$ definiert die Twistung. Das Paar (ϕ, ε) heißt *günstig gelegen*, falls ϕ günstig gelegen ist und $\varepsilon \in I_\phi \subseteqq \mathfrak{I}_\phi(\bar{\mathbf{Q}}) = \mathfrak{I}(\bar{Q}) \subseteqq G(\bar{\mathbf{Q}})$ auch in $G(\mathbf{Q})$ liegt. Dann liegt b_ϱ in $G(\varepsilon)$, das notwendigerwise zusammenhängend ist, weil G_{der} einfach-zusammenhängend ist.

Lemma 5.22. *Jedes Paar $(\phi, \varepsilon), \varepsilon \in I_\phi$, ist zu einem günstig gelegenen Paar (ϕ', ε') äquivalent.*

Es ist nützlich, ein stärkeres Lemma zu beweisen. Es sei T eine über $\mathbf{Q}$ definierte elliptische Cartanuntergruppe und $h \in X_\infty$ faktorisiere sich durch T. Es sei $\mu = \mu_h$. Wir sagen, daß (ϕ, ε) in (T, h) *eingeschachtelt* ist, falls $\phi = \psi_{T,\mu}$ und $\varepsilon \in T(\mathbf{Q})$.

Lemma 5.23. *Für jedes Paar $(\phi, \varepsilon), \varepsilon \in I_\phi$ können wir ein äquivalentes Paar (ϕ', ε') finden sowie T' und h', so daß (ϕ', ε') in (T', h') eingeschachtelt ist.*

Es ist klar, daß Lemma 5.22 aus Lemma 5.23 folgt. Der Beweis von Lemma 5.23 wiederholt zum Teil den von Satz 5.3. Wir können annehmen, daß ϕ günstig liegt. Es sei ε_1 ein Element aus I_ϕ, dessen Zentralisatoren in $\mathfrak{I}_\phi, \mathfrak{I}$ oder G Cartanuntergruppen sind, die ε enthalten. Diese Zentralisatoren sind dann alle gleich und werden mit T bezeichnet. Als Untergruppe von $\mathfrak{I}_\phi$ ist T über $\mathbf{Q}$ definiert, aber vielleicht nicht als Untergruppe von G. Die Konjugationsklasse von ε_1 in $G(\bar{\mathbf{Q}})$ ist rational, weil $\mathfrak{I}$ eine innere Twistung von $\mathfrak{I}_\phi$ ist. Wir hatten $\psi : G \to G^*$ bis auf inneren Automorphismus fixiert. Nach dem Satz von Steinberg (siehe [K1]) können wir annehmen, daß $\varepsilon_1^* = \psi(\varepsilon_1)$ rational ist. Es sei $T^* = \psi(T)$ der Zentralisator von ε_1^*. Wir verwenden Lemma 5.6, um zu beweisen, daß T^* in G vorkommt. Wir zeigen, daß es lokal vorkommt, und daß T^* im Unendlichen elliptisch ist.

Daß T^* an der Stelle p in G vorkommt, ist ohne weiteres klar, weil G über $\mathbf{Q}_p$ quasi-zerfallend ist. An einer Stelle $l \neq p$ ist $b_\varrho = c_\varrho d_\varrho, \varrho \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_l/\bar{\mathbf{Q}}_l)$ mit c_ϱ im Bild von Q und folglich im Zentrum von $\mathfrak{I}$ und mit $d_\varrho = u\varrho(u^{-1}), u \in G(\bar{\mathbf{Q}}_l)$. Dann ist $d_\varrho \varrho(\varepsilon_1) d_\varrho^{-1} = \varepsilon_1$ und $u^{-1}\varepsilon_1 u = \varrho(u^{-1}\varepsilon_1 u)$. Folglich ist der Zentralisator T_l von $u^{-1}\varepsilon_1 u$ über $\mathbf{Q}_l$ definiert und $\psi \circ \mathrm{ad} u(T_l) = T^*$. Im Unendlichen ist $b_\varrho = c_\varrho d_\varrho$ mit c_ϱ im Bild von Q und mit

$$d_\iota \times \iota = u\xi_\infty\big(w(\iota)\big)u^{-1},$$

wobei ξ_∞ am Anfang des Abschnitts definiert ist. Es ist daher $g \to u^{-1}gu$ eine über $\mathbf{R}$ definierte Einbettung von $\mathfrak{I}_\phi$ in die durch ξ_∞ definierte Gruppe G'. Inbesondere liegt $u^{-1}\varepsilon_1 u$ in $G'(\mathbf{R})$. Andererseits, wenn ξ durch $h \in X_\infty$ definiert ist und h sich durch T_1 faktorisiert, dann liegt $T_1(\mathbf{R})$ in $G'(\mathbf{R})$. Es ist folglich $\varepsilon_1 = v^{-1}\varepsilon_2 v$ mit $\varepsilon_2 \in T_1(\mathbf{R})$. Da $\varepsilon_1^* = \psi \circ \mathrm{ad} v(\varepsilon_2)$, kommt T^* über $\mathbf{R}$ vor und zwar als T_1, das elliptisch ist.

Es existiert daher ein $g \in G(\bar{\mathbf{Q}})$, so daß $\mathrm{ad}g\big(\psi^{-1}(T^*)\big)$ über $\mathbf{Q}$ definiert ist, und so daß der Homomorphismus $t^* \to t = \mathrm{ad}g\big(\psi^{-1}(t^*)\big) \in \mathrm{ad}g(T)$ auch über $\mathbf{Q}$ definiert ist. Folglich ist $\mathrm{ad}g(\varepsilon_1 \in G(\mathbf{Q})$. Da ε und γ_n in $T(\mathbf{Q})$ liegen, sind $\mathrm{ad}g(\varepsilon)$ und $\mathrm{ad}g(\gamma_n)$ in $\mathrm{ad}g(T)$ enthalten. Wir ersetzen ε, ϕ und T durch $\mathrm{ad}g(\varepsilon), \mathrm{ad}g \circ \phi$ und $\mathrm{ad}g(T)$. Dann sind wir da, wo wir beim Beweis das Satzes 5.3 waren, bevor wir Lemma 5.11 bewiesen hatten, nur daß uns jetzt ein zusätzliches Datum vorgegeben ist, nämlich $\varepsilon \in T(\mathbf{Q})$. Wenn wir Lemma 5.11 und 5.12 sowie die letzte Betrachtung des Beweises von Satz 5.3 anwenden, um ϕ und T schrittweise abzuändern, dann können wir ε mitschleppen, um am Ende die erwünschten ϕ', ε', T_1', h' zu bekommen.

Wir kommen jetzt zu der Notwendigkeit der Bedingung $*(\varepsilon)$. Wir können annehmen, daß es T und h gibt, so daß (ϕ, ε) in (T, h) eingeschachtelt ist. Wir können ferner annehmen, daß $\varepsilon_0 = \varepsilon$. Wir wollen zeigen, daß unter diesen Umständen $M \subseteqq \mathfrak{J}$. Das gilt auch allgemeiner, wenn (ϕ, ε) günstig liegt und $\varepsilon_0 = \varepsilon$. Die allgemeine Behauptung folgt sofort aus der speziellen.

Wie beim Beweis des Lemma 5.2 können wir annehmen, daß $\xi_p' = \xi_{-\mu'}$, wobei μ' ein Kogewicht einer über $\mathfrak{k}$ zerfallenden Cartanuntergruppe T' von $\mathfrak{J}$ ist. Dann ist $F = p^{\mu'} \times \sigma$, wie in dem Lemma 5.2 vorangehenden Beispiel. Es sei $\xi_{-\mu'} = \mathrm{ad}v(\xi_p)$, $\varepsilon' = \mathrm{ad}v(\varepsilon), v \in J(\bar{\mathbf{Q}}_p)$. Es ist

$$\Phi^{tm} = F^{tn} = p^{-t'\nu_2} \times \sigma^{tn},$$

wobei für ein hinreichend hohes s

$$\nu_2 = -\mu' \cdot \sigma\mu' - \cdots - \sigma^{s-1}\mu', \quad tn = t's.$$

Das Element ε' ist mit Φ^{tm} vertauschbar. Wenn aber t so hoch ist, daß T' über L_{tn} zerfällt, dann folgt leicht aus der Bruhat-Zerlegung, daß ε' nur dann mit Φ^{tm} vertauschbar sein kann, wenn es auch mit σ^{tn} und $p^{-t\nu_2}$ vertauschbar ist.

Aus der Gleichung $\varepsilon' x = \Phi^m x$ folgt allgemein

$$(\varepsilon')^t x = \Phi^{tm} x, \ t \in \mathbf{Z}.$$

Sei t so hoch, daß $\sigma^t(x) = x$. Dann hat $k' = p^{t'\nu_2} \cdot \varepsilon'^t$ einen Fixpunkt und seine Eigenwerte sind alle vom Absolutbetrag 1.

Die Zerlegung

$$(\varepsilon')^t = p^{-t'\nu_2} k'$$

ist eine Art polarer Zerlegung von $(\varepsilon')^t$ und ist eindeutig bestimmt. Aus der Eindeutigkeit folgt, daß $p^{-t\nu_2}$ im Zentrum von $G(\varepsilon)$ liegt. Da $\mathfrak{J}$ der Zentralisator von $p^{-t'\nu_2}$ ist und $p^{-t'\nu_2}$ offensichtlich einen ein-dimensionalen zerfallenden Torus erzeugt, ist M in $\mathfrak{J}$ enthalten.

Aus [K3], §3 folgt leicht, daß

$$\lambda_M(\varepsilon) = \frac{1}{t}\lambda_M(\varepsilon^t) = \frac{1}{t}\lambda_M(p^{-t'\nu_2}) = -\frac{t'}{t}\nu_2',$$

und $-\frac{t'}{t}\nu_2$ eigenschränkt auf $Z(\hat{M}) \subseteqq \hat{T}$ ist gleich $\mathrm{Nm}_{L_n/\mathbf{Q}_p}\mu_1'$. Obwohl μ' selbst vielleicht nicht über L_n definiert ist, gibt es nach der Definition von E und dem Lemma 1.1.3 von [K3] ein $\mu : \mathbf{G}_m \to M$, das zu μ' konjugiert ist und das über L_n definiert ist. Es ist offensichtlich $\mu_1 = \mu_1'$.

Wir nehmen jetzt an, daß ε_0 die zwei Bedingungen von Satz 5.21 erfüllt, und beweisen die Existenz eines zulässigen Paares (ϕ, ε) mit ε stabil konjugiert zu ε_0. In $G(\varepsilon_0)$ können wir eine Cartanuntergruppe T von $G(\varepsilon_0)$ über **Q** und ein Kogewicht μ von T finden, so daß T elliptisch im Unendlichen und in p ist, und so daß μ, wenn schon nicht der von Voraussetzung (b) verlangte Homomorphismus von $\mathbf{G}_m$ nach M ist, doch wenigstens in M zu ihm konjugiert ist. Es kann sein, daß $\psi_{T,\mu}$ nicht zulässig ist. Dann verwenden wir den Beweis von Lemma 5.12, um ein $u \in G(\bar{\mathbf{Q}})$ zu finden, so daß $T' = uTu^{-1}$ und $t \to t' = utu^{-1}$ beide über **Q** definiert sind, während $\mu' = \mathrm{ad}u \circ \mu = \mu_h$, $h \in X_\infty$. Notfalls ersetzen wir ε_0 durch $\varepsilon_0' = \mathrm{ad}u(\varepsilon_0)$ und T, μ durch T', μ', damit $\psi_{T,\mu}$ zulässig wird. Dann enthält X^p einen Punkt y aus $\prod_{l \neq p} T(\bar{\mathbf{Q}}_l)$, der notwendigerweise mit ε_0 vertauschbar ist, so daß $\varepsilon_0 y = y\varepsilon_0$. Folglich erfüllt $(\phi, \varepsilon) = (\psi_{T,\mu}, \varepsilon_0)$ die Bedingungen (i), (ii) und einen Teil von (iii), nämlich die Existenz vom Punkt y.

Um den zweiten Teil von (iii) nachzuprüfen, können wir annehmen, daß ξ_p', das X_p und Φ definiert, gleich $\mathrm{ad}u \circ \xi_p = \xi_{-\mu'}$ ist, wobei $u \in M(\bar{\mathbf{Q}}_p)$, und wobei $\xi_{-\mu'}$ einer über $\mathfrak{k}$ zerfallenden elliptischen Cartanuntergruppe T' von M und einem zu μ konjugierten Kogewicht μ' entspricht. Es sei $\varepsilon' = \mathrm{ad}u(\varepsilon)$. Dann ist

$$\Phi^m = p^\nu \times \sigma^n$$

mit

$$\nu = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma^j(\mu').$$

Nach Voraussetzung $*(\varepsilon)$ ist

$$\lambda_M(\varepsilon') = \lambda_M(\varepsilon) = \lambda_M(p^\nu).$$

Da das von μ' definierte Kogewicht von M_{ab} über $\mathbf{Q}_p$ definiert ist, schließen wir, daß das Bild von $(\varepsilon')^{-1}p^\nu$ in der maximalen kompakten Untergruppe von $M_{\mathrm{ab}}(\mathfrak{k})$ liegt. Folglich gibt es ein $c \in T'(\mathfrak{k})$, so daß $c^{-1}(\varepsilon')^{-1}\Phi^m c \in M_{\mathrm{sc}}(\mathfrak{k}) \times \sigma^n$.

Um die Existenz von x zu beweisen, müssen wir (siehe [K3], Lemma 1.4.9) die Existenz eines $u \in G(\mathfrak{k})$ zeigen mit $u^{-1}\varepsilon'^{-1}\Phi^m u = \sigma^n$. Wir suchen eher, was offensichtlich stärker ist, ein $d \in M_{\mathrm{sc}}(\mathfrak{k})$, so daß $d^{-1}c^{-1}\varepsilon'^{-1}\Phi^m cd = \sigma^n$.

Dafür genügt es zu zeigen, daß $c^{-1}\varepsilon'^{-1}\Phi^m c\sigma^{-n} \in M_{\mathrm{sc}}(\mathfrak{k})$ wesentlich ist, denn die Prop. 5.4 von [K4] besagt, daß $B(M_{\mathrm{sc}})_b$ über einer beliebigen endlichen Erweiterung von $\mathbf{Q}_p$, insbesondere über L_n, trivial ist. Nach der Bedingung (4.3.3) von [K4] ist $c^{-1}\varepsilon'^{-1}\Phi^m c\sigma^{-n}$ wesentlich, falls für ein hinreichend hohes t

(5.q) $$c^{-1}(\varepsilon'^{-1}\Phi^m)^t c = e\sigma^{tn}e^{-1}.$$

Für ein hohes r ist $\Phi^{mr} = p^{\nu'} \times \sigma^{rn}$ mit

$$\nu' = \sum_{j=0}^{rn-1} \sigma^j(\mu),$$

und ε' ist mit $p^{\nu'}$ und σ^{rn} vertauschbar. Es ist ferner ν' zentral, und $(\varepsilon')^r$ hat eine polare Zerlegung $(\varepsilon')^r = p^{\nu'}k$. Es ist daher

$$(\varepsilon'^{-1}\Phi^m)^{sr} = k^s \times \sigma^{srn}$$

und

$$c^{-1}(\varepsilon'^{-1}\phi^m)^{sr}c = c^{-1}k^{-s}\sigma^{srn}(c) \times \sigma^{srn} = (c^{-1}k^{-s}c)\big(c^{-1}\sigma^{srn}(c)\big) \times \sigma^{srn}.$$

Für s und r hoch sind k^{-s} und $c^{-1}\sigma^{srn}(c)$ in einer beliebig vorgegebenen Umgebung von 1 erhalten. Somit ist die Existenz von einer Lösung von (5.q) bewiesen und damit der Satz 5.21.

In dem Satz 5.25 weiter unten tritt eine Invariante $i(\varepsilon_0)$ auf, nähmlich die Ordnung des Kerns von

$$H^1\big(\mathbf{Q}, G(\varepsilon_0)\big) \to H^1(\mathbf{Q}, G_{\mathrm{ab}}) \times \prod_v H^1\big(\mathbf{Q}_v, G(\varepsilon_0)\big).$$

Wenn ε_0 durch ein stabil konjugiertes ε_0' ersetzt wird, wird $G(\varepsilon_0)$ durch $G(\varepsilon_0')$, eine getwistete Form von $G(\varepsilon_0)$, ersetzt. Um uns zu vergewissern, daß $i(\varepsilon_0)$ wohldefiniert ist, beweisen wir folgendes einfache Lemma.

Lemma 5.24. *Es seien G eine vorgegebene reduktive Gruppe über $\mathbf{Q}$ ohne E_8-Faktor, A ein Torus über $\mathbf{Q}$ und $G \to A$ ein über $\mathbf{Q}$ definierter surjektiver Homomorphismus. Es sei G' eine innere Twistung von G. Dann sind die Ordnungen der Kerne der beiden Homomorphismen*

$$H^1(\mathbf{Q}, G) \to H^1(\mathbf{Q}, A) \times \prod_v H^1(\mathbf{Q}_v, G)$$

und

$$H^1(\mathbf{Q}, G') \to H^1(\mathbf{Q}, A) \times \prod_v H^1(\mathbf{Q}_v, G')$$

gleich.

Wie beim Beweis von Lemma 4.3.2 von [K2] können wir G durch eine z-Erweiterung ersetzen und annehmen, daß G_{der} einfach-zusammenhängend ist. Dem Lemma 4.3.1 derselben Arbeit zur Folge können wir dann G durch G_{ab} ersetzen, und für G_{ab} ist die Aussage klar.

Wir haben schon bemerkt, daß die Konjugationsklasse des γ_l, das einem zulässigen Paar entspricht, wohlbestimmt ist. Die getwistete Konjugationsklasse von $\delta \in G(L_n)$ ist auch wohlbestimmt. Wenn z.B. $cb\sigma c^{-1} = \delta\sigma$ und $ucb\sigma c^{-1}u^{-1} = \delta'\sigma$ während $\mathrm{Nm}_{L_n/\mathbf{Q}_p}\delta = c\varepsilon' c^{-1}$ und $\mathrm{Nm}_{L_n/\mathbf{Q}_p}\delta' = uc\varepsilon' c^{-1}u^{-1}$, dann ist $\delta' = u\delta\sigma(u)^{-1}$ und $uc\varepsilon' c^{-1}\sigma^n(u)^{-1} = u\mathrm{Nm}_{L_n/\mathbf{Q}_p}\delta\sigma^n(u)^{-1} = uc\varepsilon' c^{-1}u^{-1}$. Folglich liegt u in $G(L_n)$.

Satz 5.25. *Es sei gegeben ein Element ε_0 aus $G(\mathbf{Q})$, das die Voraussetzungen von Satz 5.21 erfüllt, sowie für jedes l eine Konjugationsklasse $\{\gamma_l\}$ in $G(\mathbf{Q}_l)$ und weiter eine getwistete Konjugationsklasse $\{\delta\}$ in $G(L_n)$. Es seien γ_l und ε_0 stabil konjugiert für jedes l und konjugiert für fast jedes l. Es seien auch $\mathrm{Nm}_{L_n/\mathbf{Q}_p}\delta$ und ε_0 stabil konjugiert. Schließlich möchte δ die Bedingung $*(\delta)$ erfüllen. Es entsprechen $\gamma = (\gamma_l)$ und δ dann und nur dann einem zulässigen Paar (ϕ, ε) mit ε stabil konjugiert zu ε_0, wenn $\kappa(\gamma, \delta; \varepsilon_0) = 1$. In diesem Fall entsprechen (γ_l) und δ genau $i(\varepsilon_0)$ nicht äquivalenten Paaren.*

Wir beweisen als erstes: Wenn (ϕ, ε) vorhanden ist, dann ist die K-Invariante $\kappa(\gamma, \delta; \varepsilon_0) = 1$. Wir können annehmen, daß es ein Paar (T, μ) gibt, so daß (ϕ, ε) in (T, h) eingeschachtelt ist. Wir können auch annehmen daß $\varepsilon_0 = \varepsilon$. Dann sind γ_l und ε für jedes l konjugiert. Wir können deshalb das $\beta(v)$, das in (5.p) vorkommt, gleich 1 wählen.

An der Stelle p ist das durch δ und ε definierte b dasselbe, das in $F = b \times \sigma$ vorkommt. Da $\phi = \psi_{T,\mu}$, ist das b entsprechende Element aus $X^*(\big(Z(\varepsilon)^{\Gamma(p)})$ nichts anderes als die Einschränkung von μ auf $Z(\varepsilon)^{\Gamma(p)}$, wie schon beim Beweis das Satz 5.21 erwähnt wurde. Dementsprechend wählen wir $\beta'(p)$ als die Einschränkung von μ auf U_p. Andererseits ist $\mu = \mu_h$ mit einem $h \in X_\infty$, das sich durch $T \subseteqq G(\varepsilon)$ faktorisiert. Folglich können wir $\beta'(\infty)$ als die Einschränkung von $-\mu$ auf U_∞ wählen. Es folgt sofort, daß

$$\kappa(\gamma, \delta; \varepsilon) = \beta(\infty)\beta(p) = 1.$$

Jede Klasse von zulässigen Paaren (ϕ, ε) mit ε stabil konjugiert zu ε_0 enthält ein Paar (ϕ, ε_0). Wir wollen weiter zeigen, daß die Einschränkung von ϕ auf den Kern von $\mathcal{Q}$ von ε_0 allein bestimmt ist, und daß ihr Bild im Zentrum von $G(\varepsilon_0)$ liegt. Es seien ϕ und ϕ' zwei zulässige Homomorphismen von $\mathcal{Q}$ nach $\mathcal{G}_G$ mit $\varepsilon_0 \in I_\phi \cap G(\mathbf{Q})$, $\varepsilon_0 \in I_{\phi'} \cap G(\mathbf{Q})$. Es seien $\gamma_k = \phi(\delta_k)$, $\gamma'_k = \phi'(\delta_k)$. Es muß gezeigt werden, daß für k genügend hoch γ_k und γ'_k zentral in $G(\varepsilon_0)$ und gleich sind. Auf jeden Fall liegen γ_k und γ'_k in $G(\varepsilon_0)$. Es ist auch klar, daß $\gamma_k \equiv \gamma'_k \pmod{G_{\mathrm{der}}}$. Infolgedessen können wir G durch G_{ad} ersetzen und ϕ und ϕ' durch die entsprechenden Verkettungen. Es sei also für den Augenblick G eine adjungierte Gruppe.

Es sei T eine über $\mathbf{Q}$ definierte Cartanuntergruppe von $G(\varepsilon_0)$, die im Unendlichen elliptisch ist und die γ_k enthält. Da ε_0 im Zentrum von $G(\varepsilon_0)$ liegt, ist das durch die Gleichungen

$$|\lambda(\varepsilon_0)|_p = p^{\nu'(x)}, \quad \lambda \in X^*(T)$$

definierte Element ν' aus $X_*(T) \otimes \mathbf{Q}$ zentral, d.h. unter der Weylgruppe von $G(\varepsilon_0)$ invariant. Es existiert eine natürliche Zahl t und ein $\eta = p^{-t\nu'} \in T(\mathbf{Q})$, das außerhalb p eine Einheit ist, so daß

$$|\lambda(\eta)|_p = p^{t\nu'(\lambda)}, \quad \lambda \in X^*(T).$$

Das Element η kann zentral in $G(\varepsilon_0)$ gewählt werden. Es sei $s = \frac{k}{tn}$. Wir zeigen, daß für k genügend hoch $\gamma_k = \eta^s$. Es muß nur nachgewiesen werden, daß $\eta^{-s}\gamma_k$ eine Einheit in jeder endlichen Stelle ist, denn γ_k ist im Unendlichen notwendigerweise elliptisch, und wir können k durch ein Vielfaches ersetzen. Außerhalb p ist die Behauptung klar.

An der Stelle p betrachtet man den Homomorphismus $\xi_p = \phi \circ \zeta_p$ und das entsprechende ν. Einerseits ist ν durch

$$|\lambda(\gamma_k)|_p = q^{-\langle\lambda,\nu\rangle},\ q = p^k,\ \lambda \in X^*(T)$$

definiert (siehe Anmerkung). Andererseits ist, weil (ϕ, ε_0) zulässig ist,

$$|\lambda(\varepsilon_0)|_p = p^{-n\langle\lambda,\nu\rangle}$$

und

$$|\lambda(\eta)|_p = p^{-tn\langle\lambda,\nu\rangle}.$$

Somit ist die Behauptung auch in p bewiesen, wie auch die Gleichung $\gamma_k = \gamma_k'$.

Wir fixieren ein zulässiges und günstig gelegenes (ϕ_v, ε_0). Wenn (ϕ, ε_0) auch zulässig ist, ist $\phi = \phi_0$ auf dem Kern. Es sei $G'(\varepsilon_0)$ die durch ϕ_0 definierte Twistung von $G(\varepsilon_0)$. Wir betrachten einen Homomorphismus ϕ, der mit ϕ_0 auf dem Kern übereinstimmt. Dann ist $\phi(q_\sigma) = a_\sigma\phi_0(q_\sigma)$, wobei $a = \{a_\sigma\}$ ein Kozykel von $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ mit Werten aus $G'(\varepsilon_0)$ ist. Wir schreiben $\phi = a \cdot \phi_0$.

Lemma 5.26. *(ϕ, ε_0) ist dann und nur dann zulässig, wenn das Bild von a in $H^1(\mathbf{Q}, G_{\mathrm{ab}})$ und in $H^1\big(\mathbf{R}, G'(\varepsilon_0)\big)$ trivial ist.*

Wir nehmen dieses Lemma zunächst an und beenden den Beweis von Satz 5.25. Es seien (γ_0, δ_0) und (γ, δ) die zu zulässigen (ϕ_0, ε_0) und (ϕ, ε) gehörenden Paare. Um $\kappa(\gamma_0, \delta_0; \varepsilon_0)$ $\big($bzw. $\kappa(\gamma, \delta; \varepsilon)\big)$ zu definieren, haben wir für jedes v einen Charakter $\beta_0'(v)$ $\big($bzw. $\beta'(v)\big)$ eingegührt. Es ist $\beta'(v)\big(\beta_0'(v)\big)^{-1}$ ein Charakter auf $\big(Z(\varepsilon_0)/Z\big)^{\Gamma(v)}$, obwohl nur seine Einschränkung auf $Z(\varepsilon_0)^{\Gamma(v)}$ eindeutig bestimmt ist. Andererseits wird in [K2], Prop. 6.4 für jedes v der Klasse a ein Charakter $\alpha(v)$ von

$$Z(\hat{G}'(\varepsilon_0))^{\Gamma(v)} = Z(\hat{G}(\varepsilon_0))^{\Gamma(v)} = Z(\varepsilon_0)^{\Gamma(v)}$$

zugeordnet.

Lemma 5.27. *$\alpha(v)$ ist die Einschränkung von $\beta'(v)\big(\beta_0'(v)\big)^{-1}$ auf $Z(\varepsilon_0)^{\Gamma(v)}$.*

Den Beweis stellen wir ebenfalls zurück. Hieraus folgt erstens, daß γ und γ_0 dann und nur dann überall (allerdings außerhalb des Unendlichen und p) konjugiert sind, wenn a außerhalb ∞ and p lokal trivial ist. Wenn $\delta' = u\delta\sigma(u)^{-1}$, $u \in G(L_n)$ und $\mathrm{Nm}_{L_n/\mathbf{Q}_p}\delta = c\varepsilon_0 c^{-1}$, dann ist $\mathrm{Nm}_{L_n/\mathbf{Q}_p}\delta' = uc\varepsilon_0 c^{-1}u^{-1}$ und $b' = c^{-1}u^{-1}\delta' uc = b$, oder wenigstens $b' = vb\sigma(v)^{-1}, v \in G(\varepsilon_0)$, denn c ist nur modulo $G(\varepsilon_0)$ bestimmt. Umgekehrt wenn $b' = vb\sigma(v)^{-1}$, können wir $\delta' = \delta$ wählen. Es sind folglich δ und δ_0 dann und nur dann getwistet konjugiert in $G(L_n)$, wenn a an der Stelle p trivial ist. Daher folgt die letzte Aussage von Satz 5.25 aus den beiden vorhergehenden Lemmata. Es sei jetzt (γ, δ) mit $\kappa(\gamma, \delta; \varepsilon_0) = 1$ und es sei $\big(a(v)\big)$ die zugehörige adelische Kohomologieklasse mit trivialer Komponente im Unendlichen. Aus Lemma 5.27 folgt leicht, daß wir $\big(a(v)\big)$ in eine Kohomologieklasse $\big(\tilde{a}(v)\big)$ mit Werten in $G'(\varepsilon_0)\cap G_{\mathrm{der}}$ liften können, die im Kern der natürlichen Abbildung

$$\bigoplus_v H^1(\mathbf{Q}_v, G'(\varepsilon_0) \cap G_{\mathrm{der}}) \to \big(\pi_0(Z(\varepsilon_0)/Z)^{\Gamma}\big)^D$$

liegt. Wir schließen aus [K5], Prop. 2.6, daß $\big(\tilde{a}(v)\big)$ die Lokalisierung einer globalen Kohomologieklasse ist. Ihr Bild $a \in H^1\big(\mathbf{Q}, G'(\varepsilon_0)\big)$ definiert nach Lemma 5.26 ein zulässiges Paar (ϕ, ε_0). Damit ist der Beweis von Satz 5.25 beendet.

Es bleibt der Beweis der Lemmata 5.26 und 5.27. Die Notwendigkeit der ersten Bedingung von Lemma 5.26 ist klar. Die Notwendigkeit der zweiten Bedingung folgt aus der Injektivität von $H^1\big(\mathbf{R}, G'(\varepsilon_0)\big) \to H^1(\mathbf{R}, G')$, die selbst eine Folge von Lemma 5.14 und dem nächsten Lemma ist.

Lemma 5.28. *Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 5.14. Dann ist $H^1(\mathbf{R}, T') \to H^1(\mathbf{R}, G')$ surjektiv.*

Das Lemma läßt sich sofort auf den Fall einer adjugierten Gruppe zurückführen, für die es besagt, daß jede innere Twistung von G' eine elliptische Cartanuntergruppe enthält. Das ist aber Lemma 5.8.

Jetzt erfülle a die Bedingungen von Lemma 5.26. Wir zeigen gleichzeitig, daß (ϕ, ε_0) zulässig ist, und daß Lemma 5.27 gilt. Die Bedingungen (5.a) und (5.b) sind sicherlich erfüllt. Um die anderen Bedingungen nachzuprüfen, können wir annehmen, daß $a_\varrho \in G(\varepsilon_0) \cap G_{\mathrm{der}}$ für jedes ϱ.

Es sei

$$\phi_0 \circ \zeta_l = \mathrm{ad} y \circ \xi_l, \quad \varepsilon_0 y = y\gamma_l^0, \quad \gamma_l^0 \in G(\mathbf{Q}_l).$$

Dann ist $\{y^{-1}a_\varrho y | \varrho \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_l/\mathbf{Q}_l)\}$ ein Kozykel mit Werten aus G_{der} und folglich trivial, $y^{-1}a_\varrho y = c^{-1}\varrho(c)$. Es sei $y' = yc^{-1}$. Es gilt

$$\phi \circ \zeta_l = \mathrm{ad} y' \circ \xi_l,$$

so daß die Bedingung (5.c) erfüllt ist. Es gilt auch

$$\varepsilon_0 y' = \varepsilon_0 y c^{-1} = y\gamma_l^0 c^{-1} = y' c\gamma_l^0 c^{-1}$$

und

$$\varrho(c\gamma_l^0 c^{-1}) = \varrho(cy^{-1}\varepsilon_0 yc^{-1}) = cy^{-1}\varepsilon_0 yc = c\gamma_l^0 c^{-1},$$

weil $a_\varrho y\varrho(y^{-1})$ mit ε_0 vertauschbar ist. Es ist also $\gamma_l = c\gamma_l^0 c^{-1}$, und $\beta_0'(l)$ ist durch den Kozykel $\{y\varrho(y)^{-1}\}$ definiert und $\beta'(l)$ durch $\{y'\varrho(y')^{-1}\} = \{a_\varrho y\varrho(y)^{-1}\}$. Die Gruppe $G'(\varepsilon_0)$ ist durch den Kozykel $\{y\varrho(y)^{-1}\}$ definiert und wir bekommen $G(\varepsilon_0)$ aus $G'(\varepsilon_0)$ mittels des Kozykels $\{\varrho(y)y^{-1}\}$. Wir wenden Lemma 5.18 auf $G'(\varepsilon_0)$, $G(\varepsilon_0)$ statt G, G' an, um Lemma 5.27 an der Stelle l zu folgern.

Die dem Satz 5.21 vorangehenden Bemerkungen können auf $\mathcal{J}$ angewendet werden. Infolgedessen ist $H^1(\mathbf{Q}_p, \mathcal{J} \cap G_{\mathrm{der}}) = \{1\}$ und $H^1(\mathbf{Q}_p, \mathcal{J}_{\phi_0} \cap G_{\mathrm{der}}) = \{1\}$. Es ist klar, daß ϕ_0 und ϕ dasselbe $\mathcal{J}$ definieren. Da a die triviale Klasse in $\mathcal{J}_{\phi_0}$ definiert, definieren ϕ_0 und ϕ dasselbe Element in $B(\mathcal{J})_b$. Hieraus folgt, daß mit ϕ_0 auch ϕ ein zulässiger Homomorphismus ist. Bis auf die Existenz von x in der Bedingung (iii) ist es auch klar, daß das Paar (ϕ, ε_0) zulässig ist. Die Existenz von x wird wie beim Beweis von Satz 5.21 nachgeprüft. Somit ist Lemma 5.26 bewiesen.

ϕ_0 und ϕ sind Abbildungen von $\mathcal{Q}$ nach $\mathcal{G}_{G(\varepsilon_0)} \subseteqq \mathcal{G}_G$. Um die Behauptung von Lemma 5.27 an der Stelle p nachzuprüfen, können wir $\xi_p = \phi \circ \zeta_p$ durch $\xi_p' = \mathrm{ad}u \circ \xi_p$ mit $u \in G(\varepsilon_0)$ ersetzen, Wir können auch weiter annehmen, daß die Lokalisierung von a mittels eines Kozykels von $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}/\mathbf{Q}_p)$ gegeben ist. Es sei σ das Frobeniuselement. Dann ist $b = a_\sigma \cdot b_\sigma$. Somit folgt die Behauptung in p sofort aus Lemma 5.19, angewendet auf $G(\varepsilon_0), G'(\varepsilon_0)$ und a_σ^{-1}.

Anmerkung. Es seien $\mathcal{D}_n^n = \mathcal{D}_{Ln}^{Ln}$ und $\mathcal{D}^n$ (bzw. $\mathcal{D}_{\mathfrak{k}}^n$) die durch Vorwärtsschieben mittels $L_n \subseteqq \mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}$ (bzw. $L_n \subseteqq \mathfrak{k}$) und Zurückziehen mittels $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}/\mathbf{Q}_p) \to \mathrm{Gal}(L_n/\mathbf{Q}_p)$ erhaltenen Grupen. Wir definieren $\mathcal{D}_n^n$ mittels des fundamentalen Kozykels $a_{\sigma^i,\sigma^j} = 1$, $0 \leqq i,j < n, i+j < n, a_{\sigma^i,\sigma^j} = p^{-1}$, $0 \leqq i,j < n$, $i+j \geqq n$. Wenn σ das Frobeniuselement in $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}/\mathbf{Q}_p)$ ist, dann ist in $\mathcal{D}^n$ und $\mathcal{D}_{\mathfrak{k}}^n$ die n^{te} Potenz von d_σ gleich p^{-1}. Es bilden also die Homomorphismen $\mathcal{D}^{mn} \to \mathcal{D}^n$ (bzw. $\mathcal{D}_{\mathfrak{k}}^{mn} \to \mathcal{D}_{\mathfrak{k}}^n$), die durch $x \to x^m$, $x \in (\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}})^\times$ (bzw. $\mathfrak{k}^\times$), $d_\sigma \to d_\sigma$ eine verträgliche Familie. In $\mathcal{D}_{\mathfrak{k}}^n$ ist jedes Element xd_σ mit $x \in \mathfrak{k}^\times, |x| = 1$ zu d_σ konjugiert.

Jeder Homomorphismus $\xi_p : \mathcal{D} \to \mathcal{G}_G$ ist nach dem Satz von Steinberg (siehe [Se], S. 3) zu einem Homomorphismus ξ_p' äquivalent, der aus

$$\xi_p' : \mathcal{D}^n \to G(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}) \times \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}/\mathbf{Q}_p)$$

abgeleitet werden kann. Nehmen wir an, daß ξ_p selbst so definiert werden kann.

Das Element $\xi(w)$, das in der Definition von X_p auftritt, ist dann nichts anderes als $\xi_p(d_\sigma)$. Allgemein ist $\xi_p(d_\sigma) = b \times \sigma$, und b definiert eine Klasse in $B(G)$, die nur von der Klasse von ξ_p abhängt. Wenn wir n noch genug wählen, ist das $n\nu$, das in [K4], Gl. (4.3.3) vorkommt, die Einschränkung von ζ_p^{-1} auf $(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}})^\times \subseteqq \mathcal{D}^n$, die ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen ist. Wir bekommen auf diese Weise eine Abbildung von $C(G)$, den Klassen in $\mathrm{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{G}_G)$ nach $B(G)$. Es sei $C(G)_b$ das Urbild um $B(G)_b$. Wir wissen nicht, ob $C(G) \to B(G)_b$ bijektiv ist. Aber es folgt leicht aus [K4], daß $C(G)_b \to B(G)_b$ bijektiv ist.

Für Tori hat man den Funktor $C(T) \to B(T)$ sowie den Funktor $\mu \to \xi_{-\mu}$ von $X_*(T)$ nach $C(T)$. Da $\zeta_{-\mu}(d_\sigma) = p^\mu \times \sigma$, bildet die Verkettung $1 \in X_*(\mathbf{G}_m)$ auf $b = p$ ab. Es folgt daher aus Lemma 2.2 von [K4], daß die Verkettung ein Isomorphismus ist. Folglich ist $C(T) \to B(T)$ surjektiv. Sie ist injektiv, weil die Anzahl der Klassen aus $C(T)$ $\big($bzw. $B(T)\big)$ mit einem gegebenen ν gleich $|H^1(\mathbf{Q}_p, T)|$ ist. Für eine allgemeine Gruppe wird die Injektivität auch auf diese Weise bewiesen. Die Surjektivität folgt aus [K4], Prop. 5.3.

§6. DIE VERMUTUNG ALS FOLGE DER STANDARDVERMUTUNGEN IN EINIGEN FÄLLEN

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß für gewisse Shimuravarietäten die Vermutung im §5 eine Folge der Identifizierung der pseudomotivischen Galoisgruppe und der motivischen Galoisgruppe ist, die im §4 unter Annahme der Standardvermutungen und der Tate-Vermutung sowie der Hodge-Vermutung vorgenommen wurde. Dabei lehnen wir uns ziemlich stark an Zink's Arbeit [Z2] an, so daß vom Leser eine wenigstens oberflächliche Kenntnis dieser Arbeit verlangt wird. Wir beginnen mit der Definition der betreffenden Shimuravarietäten und erinnern an einige gruppentheoretische Tatsachen, für deren Beweise wir auf [De3] und [Z2] verweisen.

Es sei D eine einfache endlichdimensionale $\mathbf{Q}$-Algebra vom Grad d^2 über ihrem Zentrum L, die mit einer positiven Involution $x \to x^*$ versehen ist. Es sei L_0 der Invariantenkörper der Involution in L. Es sei (V, ψ) ein symplektischer D-Modul, d.h. ein D-Modul, der mit einer nichtausgearteten alternierenden $\mathbf{Q}$-Bilinearform versehen ist, für die

$$\psi(xu, v) = \psi(u, x^* v), \quad x \in D, u, v \in V.$$

Es sei $dim_Z\, V = d \cdot m$ und $[L_0 : \mathbf{Q}] = n$. Wir nehmen an, daß $(D, *)$ von einem der folgenden beiden Typen ist.

(A) Die Involution ist von zweiter Art, d.h. induziert einen nichttrivialen Automorphismus von L. Dann ist L_0 ein total-reeller Zahlkörper.

(C) Die Involution ist von erster Art, d.h. induziert den trivialen Automorphismus auf L. Falls $K \supseteqq L$ ein Zerfällungskörper von D ist, so finden wir einen Isomorphismus $D \otimes_L K \cong M_d(K)$ und eine K-lineare Fortsetzung der Involution. In Matrixschreibweise soll gelten: $x^* = c\,{}^t x c^{-1}$ mit ${}^t c = c$. In diesem Fall ist L ein total-reeller Zahlkörper.

Es sei G die Gruppe der symplektischen L_0-Ähnlichkeiten, aufgefaßt als algebraische Gruppe über $\mathbf{Q}$.

$$G = \{g \in GL_D(V) | \psi(gu, gv) = \psi\big(c(g)u, v\big), \quad c(g) \in L_0^\times\}.$$

Dies ist eine zusammenhängende reduktive Gruppe über $\mathbf{Q}$, deren derivierte Gruppe einfach-zusammenhängend ist ([De3], 5.8). (Im Fall (A) ist G_{der} ein Produkt von speziellen unitären Gruppen, im Fall (C) ein Produkt von symplektischen Gruppen). Die Gruppen G und G_{der} erfüllen das Hasseprinzip ([De3], 5.11). Weiterhin gibt es einen Homomorphismus

$$h : \underline{\mathbf{S}} \to G_{\mathbf{R}},$$

der bis auf Konjugation dadurch charakterisiert ist, daß die auf V induzierte Hodgestruktur vom Typ $(+1,0)+(0,+1)$ ist und daß $\psi\big(u,h(i)v\big)$ symmetrisch und positiv-definit ist ([Z2], 3.1). Das Paar (G,h) definiert eine Shimuravarietät, wobei zu bemerken ist, daß der Gewichtshomomorphismus $\mu+\bar{\mu}:\mathbf{G}_m\to G$ über $\mathbf{Q}$ definiert ist und $X_*(G_{\mathrm{ab}})$ die Serre-Bedingung (3.e) erfüllt. Durch

$$t(x)=\mathrm{Tr}(x|V_h^{1,0}),\quad x\in D,$$

wird der D-Modul V bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ([De3], 5.10). Es sei

$$E=E(G,h)=\mathbf{Q}\big(t(x)\big),\quad x\in D.$$

Dies ist der Shimurakörper. (Im Fall (C) ist $E=\mathbf{Q}$.) Es sei $K\subsetneqq G(\mathbf{A}_f)$ eine offene kompakte Untergruppe. Die Shimuravarietät $Sh_K(G,h)$ besitzt ein kanonisches Modell über E und ist ein *grobes* Modulschema für das Modulproblem auf (Sch$/E$), das einem E-Schema S folgende Daten zuordnet.

(6.a) (i) *Ein abelsches D-Schema bis auf Isogenie $A,\iota:D\to\mathrm{End}\,A$, so daß*

$$\mathrm{Tr}(x|\mathrm{Lie}^*A)=t(x),\quad x\in D.$$

Hier bezeichnet Lie^*A den Kotangentialraum von A.

(ii) *Eine L_0-homogene Polarisierung Λ, die auf D die Involution $*$ induziert.*

(iii) *Eine Klasse von D-Modulisomorphismen von Garben für die Etaltopologie*

$$\bar{\eta}:H^1(A,\mathbf{A}_f)\xrightarrow{\sim}V\otimes\mathbf{A}_f\quad\mathrm{mod}\,K,$$

die die Bilinearformen auf beiden Seiten bis auf eine Konstante aus $L_0\otimes\mathbf{A}_f$ erhalten.

Hier wird mit $H^1(A,\mathbf{A}_f)=\prod H^1(A,\mathbf{Q}_l)$ die l-adische Kohomologie mit Koeffizienten aus $\mathbf{A}_f$ bezeichnet.

Wir fixieren jetzt wieder unsere Primzahl p. Es seien eine Ordnung O_D in D und ein O_D-invariantes Gitter $V_{\mathbf{Z}}$ in V gewählt, so daß

(6.1) a) p ist unverzweigt in D,

b) $D\otimes\mathbf{Q}_p$ ist ein Produkt von Matrixalgebren und $O_D\otimes\mathbf{Z}_p$ ist eine Maximalordnung,

c) $\psi:V_{\mathbf{Z}_p}\times V_{\mathbf{Z}_p}\to\mathbf{Z}_p$ ist eine perfekte Paarung.

Dann ist $*(O_D\otimes\mathbf{Z}_p)=O_D\otimes\mathbf{Z}_p$. Es sei

$$K_p=G(\mathbf{Q}_p)\cap\mathrm{End}_{O_D}V_{\mathbf{Z}_p}.$$

Dann ist G über $\mathbf{Q}_p$ quasizerfallend und über einer unverzweigten Erweiterung zerfallend, und $K_p\subsetneqq G(\mathbf{Q}_p)$ ist die Gruppe der ganzwertigen Punkte, also ([T], 3.8) eine hyperspezielle Untergruppe. Es sei $K=K^p\cdot K_p$. Um ein Modell von Sh_K über Spec $\mathcal{O}_E \otimes \mathbf{Z}_{(p)}$ zu definieren, formulieren wir das Modulproblem (6.a) um. Ein Punkt dieses Modulproblems mit Werten in einem $\mathcal{O}_E \otimes \mathbf{Z}_{(p)}$-Schema S besteht aus:

(6.b) (i) *Ein abelsches O_D-Schema A bis auf zu p prime Isogenie, so daß*

$$\mathrm{Tr}(x|\mathrm{Lie}^* A) = t(x), \quad x \in O_D.$$

(ii) *Eine L_0-homogene Polarisierung Λ, die auf D gegebene Involution $*$ induziert, so daß ein $\lambda \in \Lambda$ existiert, dessen Grad prim zu p ist.*

(iii) *Eine Klasse von $O_D \otimes \mathbf{A}_f^p$-Modulisomorphismen von Garben für die Etaltopologie*

$$\bar{\eta} : H^1(A, \mathbf{A}_f^p) \text{ ——— } V \otimes \mathbf{A}_f^p \quad \mathrm{mod}\, K^p,$$

die die beiden Bilinearformen bis auf eine Konstante aus $L_0 \otimes \mathbf{A}_f^p$ erhalten.

Wir verweisen auf [Z2], 3.5 für einen Beweis der Tatsache, daß die Modulprobleme (6.a) und (6.b) über Spec E übereinstimmen. Wie im §5 bezeichne $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ den Ring der ganzen Zahlen in $E_\mathfrak{p}$.

Satz 6.2. *Das Modulproblem (6.b) besitzt ein grobes Modulschema über* Spec $(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$. *Falls K^p genügend klein ist, so ist das Modulschema glatt und im Fall, daß $L_0 = \mathbf{Q}$, auch ein feines Modulschema.*

Wir begnügen uns mit einer Skizze des Beweises, der ähnlich dem Beweis des entsprechenden Satzes 1.7 von [Z2] ist. Das O_D-Gitter $\eta^{-1}(V_\mathbf{Z} \otimes \bar{\mathbf{Z}}^p) \subset H^1(A, \mathbf{A}_f^p)$ ist unabhängig von der Wahl von $\eta \in \bar{\eta}$ und definiert ein abelsches O_D-Schema B aus der Isogenieklasse A, das mit einem O_D-Modulisomorphismus $\bar{\eta} : H^1(B, \hat{\mathbf{Z}}^p) \cong V_\mathbf{Z} \otimes \widehat{\mathbf{Z}}^p \,\mathrm{mod}\, K^p$ ausgestattet ist. Man überzeugt sich auf diese Weise, daß das Modulproblem (6.b) äquivalent zu folgendem Modulproblem ist.

(6.c) (i) *Ein abelsches O_D-Schema B, so daß*

$$\mathrm{Tr}(x|\mathrm{Lie}^* B) = t(x), \quad x \in O_D.$$

(ii) *Wie in (6.b),* (ii).

(iii) *Eine Klasse von O_D-Modulisomorphismen*

$$\bar{\eta} : H^1(B, \bar{\mathbf{Z}}^p) \text{ ——— } V_Z \otimes \hat{\mathbf{Z}}^p \quad \mathrm{mod}\, K^p,$$

die die beiden Bilinearformen bis auf eine Konstante aus $L_0 \otimes \mathbf{A}_f^p$ erhalten.

Aus der Methoden von Mumford [Mu2] (oder denen von Artin [A], wenn man sich mit der Konstruktion eines algebraischen Raumes zufrieden gibt) erhalten wir die Existenz eines feinen Modulschemas, falls wir in (ii) die Vorgabe einer effektiven involutionstreuen Polarisierung fordern und falls K^p genügend klein genommen wird. Falls $(B, \Lambda, \bar{\eta})$ ein T-wertiger Punkt des Modulproblems (6.c) ist und $\lambda \in \Lambda$ prim zu p und $\eta \in \bar{\eta}$, so ist, falls E^λ die zugehörige Riemannform bezeichnet,

$$\psi\big(\eta(x), \eta(y)\big) = E^\lambda(tx, y), \quad x, y \in H^1(B, \hat{\mathbf{Z}}^p)$$

für ein $t \in L_0^\times(\mathbf{A}_f^p)$. Die Restklasse $\tau(B, c, \lambda, \bar{\eta})$ von t in dem $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/E_p)$-Modul

$$\big(L_0^\times(\mathbf{A}_f^p)/c(K^p)\big)(+1)$$

ist von der Wahl von $\eta \in \bar{\eta}$ unabhängig und kann als Schnitt dieser Garbe über T aufgefaßt werden. Dabei unterscheiden sich zwei Polarisierungen λ und λ' um ein totales positives Element aus L_0, das eine Einheit in p ist. Wir erhalten somit einen nur von $(B, \Lambda, \bar{\eta})$ abhängigen Schnitt von $L_0^+ \backslash L_0^\times(\mathbf{A}_f)/c(K)(+1)$. Es seien $\tau_1, \ldots, \tau_r$ Schnitte von $L_0^\times(\mathbf{A}_f^p)/c(K_p)(+1)$ über einer endlichen unverzweigten Erweiterung R von $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$, die ein Repräsentantensystem darstellen. Wir betrachten das folgende Modulproblem auf (Sch/R):

(6.d) (i) *wie in* (6.c) *(i).*

(ii) *Eine involutionstreue Polarisierung λ, die in p prinzipal ist.*

(iii) *Eine Klasse von O_D-Modulisomorphismen*

$$\bar{\eta} : H^1(B, \hat{\mathbf{Z}}^p) \longrightarrow V_Z \otimes \hat{\mathbf{Z}}^p \mod K^p,$$

so daß $\tau(B, c, \lambda, \bar{\eta}) = \tau_i$ für ein $i = 1, \ldots, r$.

Falls wir die τ_i so wählen, daß sie Repräsentanten *ganzer* Idele sind, so ist λ eine effektive Polarisierung, deren Grad von τ_i bestimmt ist. Folglich ist nach Mumford das Modulproblem (6.d) für hinreichend kleines K^p durch ein quasiprojektives R-Schema $\tilde{\mathcal{M}}_K$ darstellbar. Dabei operiert die Gruppe $L_0^+ \cap c(K)$ durch Abänderung der Polarisierung auf $\tilde{\mathcal{M}}_K$ (aufgefaßt als $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-Schema). Man überzeugt sich leicht davon, daß diese Action sich über den endlichen Quotienten $L_0^+ \cap c(K)/c(L^\times \cap K)$ faktorisiert und daß der Quotient ein grobes Modulschema für das Modulproblem (6.c) über Spec $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ ist. Falls $L_0 = \mathbf{Q}$, so ist $L_0^+ \cap c(K)$ trivial. Wir zeigen, daß in allgemeinen für hinreichend kleines K^p die Aktion von $L_0^+ \cap c(K)$ auf $\tilde{\mathcal{M}}_K$ frei ist. Sei $\zeta \in L_0^+ \cap c(K)$ und

$$\alpha : (B, \iota, \lambda, \bar{\eta}) \tilde{\to} (B, \iota, \zeta\lambda, \bar{\eta})$$

ein Isomorphismus. Wir müssen zeigen, daß $\zeta \in c(Z^\times \cap K)$. Es sei $K' = K'^p \cdot K_p$ eine hinreichend kleine offene kompakte Untergruppe. Wir betrachten nur $K \subset K'$ und bezeichnen mit $\bar{\eta}'$ die Äquivalenzklasse von $\bar{\eta}$ mod K'. Dann gibt es höchstens einen Isomorphismus

$$\alpha' : (B, \iota, \lambda, \bar{\eta}) \tilde{\to} (B, \iota, \zeta\lambda, \bar{\eta}').$$

Es sei K so klein gewählt, daß $L_0^+ \cap c(K) \subsetneqq (L_0^\times \cap K')^2$. Dann ist $\zeta = \zeta_1^2$ und ζ_1 definiert einen Isomorphismus zwischen $(B, \iota, \lambda, \bar{\eta}')$ und $(B, \iota, \zeta\lambda, \bar{\eta}')$. Aber dann stimmet ζ_1 mit α überein und folglich ist $\zeta_1 \in K$ und $\zeta = \zeta_1^2 \in c(L^\times \cap K)$.

Um uns von der Glattheit von $\tilde{\mathcal{M}}_K$ zu überzeugen, müssen wir zeigen, daß es keine Deformationsobstruktionen gibt. Wir verwenden die Theorie von Grothendieck und Messing [Me]. Dazu sei $T \subsetneqq T'$ eine Nilimmersion von affinen R-Schemata, auf denen p nilpotent ist und die dividierte Potenzen besitzt. Es sei $(B, \iota, \lambda, \bar{\eta})$ ein T-wertiger Punkt des Modulproblems (6.d). Wir betrachten den Wert des Dieudonnékristalls in T',

$$\mathbf{D}(B)_{(T,T')},$$

das mit einer Aktion von O_D und einer alternierenden *perfekten* Bilinearform E^λ mit Werten in $\mathcal{O}_{T'}$ ausgestattet ist, die die Identität

$$E^\lambda(xu, v) = E^\lambda(u, x^* v)$$

erfüllt. Seine Einschränkung auf T ist mit der Hodge-Filtration ausgestattet, die total isotrop bezüglich E^λ ist und für die

$$\mathrm{Tr}(x|\mathrm{Fil}) = t(x), \quad x \in O_D.$$

Es muß gezeigt werden, daß sich diese Filtration in eine total isotrope Filtration von $\mathbf{D}_{(T,T')}$ liften läßt. Die Zerlegung $O_F \otimes \mathbf{Z}_p = \prod O_{F_v}$ liefert eine orthogonale Zerlegung von $(\mathbf{D}_{(T,T')}, E^\lambda) = \bigoplus (D'_v, E'_v)$.

Im Fall (C) ist $L_0 = L$. Wir wählen einen Isomorphismus $O_D \otimes_{O_L} O_{L_v} \cong M_d(O_{L_v})$. Dann wird die Involution $*$ durch eine perfekte *symmetrische* Paarung β auf O_Z^d induziert, vgl. [Z2], 2.9. Wir führen die Bilinearform $\tilde{E}'_v$ mit Werten in $O_{L_v} \otimes \mathcal{O}_{T'}$ ein:

$$\mathrm{Tr}_{L_v/\mathbf{Q}_p} f \cdot \tilde{E}'_v(u, w) = E'_v(u, f \cdot w), \quad f \in O_{L_v}.$$

Dann zerlegt sich der $M_d(O_{L_v}) \otimes \mathcal{O}_{T'}$-Modul $(D'_v, \tilde{E}'_v)$ in $D'_v = O_{L_v}^d \otimes V'$, $\tilde{E}'_v = \beta \otimes \Phi'$, wobei Φ' eine *alternierende* perfekte Bilinearform auf dem $\mathcal{O}_{T'}$-Modul V' ist. Entsprechendes gilt für $\mathbf{D}_{(T,T)}$. Dabei ist $\mathrm{Fil}_v \subset D_v$ durch einen total isotropen (bzgl. Φ) Teil einer Basis von V erzeugt. Da man diese Basis in eine ebensolche Basis von V' liften kann, folgt die Behauptung.

Den Fall (A) behandelt man analog (vgl. [Z2], 3.4).

Damit ist unsere Skizze des Beweises von Satz 6.2 beendet. Wir haben ein glattes Modell über $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ gewonnen, dessen Punkte über $\mathbf{F} = \bar{\kappa}$ wir analysieren wollen, unter Annahme der Gültigkeit der Resultate des §4. Ein *spezieller Punkt* des Modulproblems (6.b) ist durch folgende Daten definiert ([Z2], 4.2): Ein Punkt $(A, \iota, \Lambda, \bar{\eta})$ des Modulproblems, eine CM-Algebra R (=Produkt von CM-Körpern) mit $dim_{\mathbf{Q}} R = 2\, dim\, A/d$, und eine involutionstreue Einbettung

$$\vartheta_\Lambda : R \to \mathrm{End}_D^0 A.$$

Es sei $(A, \iota, \Lambda, \bar{\eta}, R, \vartheta)$ ein spezieller Punkt über $\mathbf{C}$. Dann ist $D \otimes_L R$ eine Matrixalgebra über R ([Z2], 2.8) und wir erhalten eine Zerlegung $A \cong B^d$, wobei B eine abelsche Mannigfaltigkeit mit komplexer Multiplikation (R, Φ) ist. Es sei

$$\mu : \mathbf{C}^\times \to (R \otimes \mathbf{C})^\times = \prod_{\varphi \in \Phi} \mathbf{C}^\times \times \prod_{\varphi \in \Phi} \mathbf{C}^\times, z \mapsto \prod \varphi(z) \times \prod 1.$$

Es sei $T = \{r \in R^\times | r \cdot \bar{r} \in L_0\}$, wobei $r \mapsto \bar{r}$ die Rosatiinvolution auf R bezeichnet. Dann ist T ein maximaler über **Q** definierter Torus von G, der obige Homomorphismus faktorisiert sich über T und ist von der Form $\mu = \mu_h$ für ein $h : \underline{\mathbf{S}} \to G_R$ aus der Konjugationsklasse, die von uns fixiert wurde. Somit definiert $(A, \iota, \Lambda, \bar{\eta}, R, \vartheta)$ einen speziellen Punkt von $\mathrm{Sh}_K(\mathbf{C})$ im üblichen Sinne ([De1], 2.2.4). Der Modul $X_*({}^K S)$ enthält ein ausgezeichnetes Element $\mu = \mu_S$, das ihn erzeugt. Da $X_*(G_{\mathrm{ab}})$ die Serre-Bedingung (3.e) erfüllt, erfüllt auch $X_*(T)$ sie, und es gibt für genügend große Körper K einen über **Q** definierten Homomorphismus $\psi : {}^K S \to T$, der μ_S nach μ schickt. Es sei $G^0 = \{g \in G | c(g) \in \mathbf{Q}^\times\}$. Dann ist μ ein Kogewicht von $T^0 = T \cap G^0$ und $\psi : {}^K S \to T^0$. Wir bezeichnen auch mit ψ den entsprechenden Homomorphismus

$$\mathcal{G}_S \longrightarrow \mathcal{G}_{\Gamma^0} \xrightarrow{\psi_{T^0,\mu}} \mathcal{G}_{G^0} \subseteqq \mathcal{G}_G.$$

Weil $\mathcal{G}_S$ die motivische Galoisgruppe der von den abelschen Varietäten vom CM-Typ erzeugten Tannakakategorie ist, definiert ψ ein Motiv mit zusätzlicher Struktur, und zwar den homogenen Bestandteil vom Grad 1 von $(A, \iota, \lambda, R, \vartheta)$ mit $\lambda \in \Lambda$. Wir führen den Begriff der *Isogenie* zwischen zwei Punkten $(A_1, \iota_1, \Lambda_1, \bar{\eta}_1)$ und $(A_2, \iota_2, \Lambda_2, \bar{\eta}_2)$ des Modulproblems (6.b) ein: das ist eine Isogenie $\alpha : A_1 \to A_2$, die mit ι_1 und Λ_1 und ι_2 und Λ_2 verträglich ist. Die Trivialisierung des Tatemoduls geht also nicht ein. Eine Isogenie prim zu p ist nichts anderes als ein Isomorphismus

$$\alpha : (A_1, \iota_1, \Lambda_1) \xrightarrow{\sim} (A_2, \iota_2, \Lambda_2).$$

In Termen des Modulproblems (6.c) ist eine Isogenie von abelschen Varietäten, $\beta : B_1 \to B_2$, die die Aktionen von O_D und die Polarisationsklassen respektiert. Man spricht von einer Isogenie von speziellen Punkten, falls es einen Isomorphismus $R_1 \cong R_2$ gibt, so daß die Isogenie zusätzlich die Aktion ϑ_1 in die Aktion ϑ_2 überführt.

Satz 6.3. *Die Menge der Isogenieklassen von Punkten von* $\mathrm{Sh}(\bar{\kappa})$ *steht in eineindeutiger Beziehung zu den Äquivalenzklassen von zulässigen Homomorphismen* $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{G}_G$.

Wir nehmen allerdings an, daß $\mathcal{P} \cong \mathcal{M}$ in $\mathcal{G}_S$. Nach Definition von $\mathcal{M}$ entspricht dem einer abelschen Varietät zugeordneten homogenen Motiv $M^1(A)$ vom Grad 1 ein Homomorphismus $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{G}_{V'}$. Da

$$\mathrm{Hom}\big(M^1(A), M^1(A')\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(A, A')$$

ist, wird A als abelsche D-Varietät definiert durch eine mit ϕ verträgliche Einbettung $\iota' : D \to \mathrm{End}\, V'$. Es wird gleichermaßen die duale Varietät A^* durch den kontragredienten Homomorphismus ϕ^* auf V'^* definiert. Wenn

T das Tate-Motiv ist, ist $V'^* = \mathrm{Hom}(V', T)$. Eine Polarisierung entspricht dann einem mit ϕ und ϕ^* verträglichen Homomorphismus $\psi : V' \to V'^*$, d.h. einer Bilinearform ψ' auf V', für die die Gleichung gilt

$$\psi'\big(\phi(g)u,\ \phi(g)v\big) = \tau(g) \cdot \psi'(u, v),$$

wenn τ die T entsprechende Wirkung auf $\bar{\mathbf{Q}}$ bezeichnet. Die Isomorphieklasse von (A, ι, λ) ist offensichtlich durch (V', ι', ψ') bestimmt. Wegen der Existenz einer Normalform können wir annehmen, daß $(V', \iota', \psi') = (V, \iota, \psi)$. Dann liegt das Bild von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{G}_{G^0} \subseteqq \mathcal{G}_V$. Zwei Homomorphismen $\phi_1, \phi_2 : \mathcal{M} \to \mathcal{G}_{G_0}$ sind äquivalent under $G(\bar{\mathbf{Q}})$ genau dann, wenn $(A_1, \iota_1, \lambda_1) \cong (A_2, \iota_2, c\lambda_2)$, $c \in L_0^\times$. Es ist $G_{\mathrm{ab}}^0 = \mathbf{Q}^\times \subseteqq G_{\mathrm{ab}} = L_0^\times$. Da das Kogewicht μ_{ab} sich durch G_{ab}^0 faktorisiert, ist jedes zulässige $\phi : Q \to \mathcal{G}_G$ durch $\mathcal{G}_{G^0}$ faktorisierbar. Weil $X_*(G_{\mathrm{ab}})$ die Serre-Bedingung (3.e) erfüllt, faktorisiert sich ϕ auch durch $\mathcal{P} = \mathcal{M}$.

Um den Beweis zu beenden, genügt es zu zeigen, daß wenn (A, ι, Λ) aus $(A, \iota, \Lambda, \bar{\eta})$ hervorgeht, dann das zugehörige ϕ zulässig ist und umgekehrt. Das wäre wohl nicht schwer. Wir ziehen aber ein anderes Verfahren vor, das unmittelbar ohne Annahme unbeweisener Vermutungen schon jedem $(A, \iota, \Lambda, \bar{\eta})$ ein zulässiges ϕ und jedem zulässigen ϕ ein $(A, \iota, \Lambda, \bar{\eta})$ zuordnet, ohne aber zur Zeit einen Beweis der Bijektivität der so erhaltenen Korrespondenz zuzulassen. Im übrigen ist es nicht ohne weiteres verwendbar, wenn G über $\mathbf{Q}_p$ nicht quasi-zerfallend ist (vgl. zweites Beispiel im §7).

Da A bereits über einem endlichen Körper definiert ist, ist es eine abelsche Varietät vom CM-Typ, und wir können den Punkt $(A, \iota, \Lambda, \bar{\eta})$ als speziellen Punkt $(A, \iota, \Lambda, \bar{\eta}, R, \vartheta)$ auffassen. Nach dem Liftungssatz von Zink [Z2], §4.4, existiert ein diskreter Bewertungsring ungleicher Charakteristik $\mathcal{O}$ mit Restklassenkörper $\bar{\kappa}$ und ein spezieller Punkt $(\tilde{A}, \tilde{\iota}, \tilde{\Lambda}, \tilde{\bar{\eta}}, R, \tilde{\vartheta})$, dessen Reduktion isogen zum Ausgangspunkt ist. Es sei (T, μ) der entsprechende Torus samt Kocharakter in G. Der Homomorphismus $\psi_{T,\mu} : \mathcal{P} \to \mathcal{G}_S \to \mathcal{G}_T \subseteq \mathcal{G}_G$ ist zulässig. Da $\phi \cong \psi_{T,\mu}$ ist ϕ zulssig. Umgekehrt, wenn ϕ zulässig ist, ist ϕ einem $\psi_{T,\mu}$ äquivalent. Es definiert $\psi_{T,\mu}$ uns $(\tilde{A}, \tilde{\iota}, \tilde{\Lambda}, \tilde{\bar{\mu}}, R, \tilde{\vartheta})$, das durch Reduktion $(A, \iota, \Lambda, \bar{\eta})$ liefert.

Im weiteren fixieren wir eine Isogenieklasse $\mathcal{J} = (A, \iota, \Lambda)_{\mathbf{Q}}$ und den entsprechenden zulässigen Homomorphismus ϕ bis auf Äquivalenz. Wir bezeichnen mit $\mathcal{J}_K$ die Menge der Punkte von $\mathrm{Sh}_K(\mathbf{F})$ in $\mathcal{J}$. Es sei $r = [E_{\mathfrak{p}} : \mathbf{Q}_p]$, und $q = p^r$ die Anzahl der Elemente von κ. Falls $(A, \iota, \Lambda, \bar{\eta})$ ein Punkt von $\mathrm{Sh}_K(\mathbf{F})$ ist, so ist das inverse Bild $(A^{(q)}, \iota^{(q)}, \Lambda^{(q)}, \bar{\eta}^{(q)})$ under der r-ten Potenz des Frobenius wieder ein Punkt von $\mathrm{Sh}_K(\mathbf{F})$. Die Existenz des relativen Frobenius

$$\mathrm{Fr}^r : (A, \iota, \Lambda, \bar{\eta}) \to (A^{(q)}, \iota^{(q)}, \Lambda^{(q)}, \bar{\eta}^{(q)}).$$

zeigt, daß wir eine Aktion von $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}/\kappa)$ auf $\mathcal{J}_K$ erhalten, die zudem in offensichtlicher Weise verträglich mit der Abänderung von K^p ist.

Satz 6.4. *Es gibt Bijektinen*

$$\mathcal{J}_K \cong X_\phi(K),$$

so daß die Wirkung von Φ auf der Menge rechts (siehe 5.e) der Wirkung des Frobenius in $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}/\kappa)$ *auf der Menge links entspricht und die verträglich mit der Abänderung von K^p sind.*

Wir fixieren im folgenden einen Punkt $(A_0, \iota_0, \Lambda_0, \bar{\eta}_0)$ von $\mathcal{J}_K$, der die Reduktion modulo p eines speziellen Punkts $(\tilde{A}_0, \tilde{\iota}_0, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{\bar{\eta}}_0)$ ist und der wie im Beweis von 6.2 den Torus (T, μ) definiert.

Eine Isogenie zerlegt sich in die Verkettung einer Isogenie prim zu p und einer Isogenie vom p-Potenzgrad. Wenn ein Element $\eta_0 \in \bar{\eta}_0$ fixiert wird, definiert ein Element $g \in G(\mathbf{A}_f^p)$ eine Isogenie vom Grade prim zu p:

$$(A_0, \iota_0, \Lambda_0, \bar{\eta}_0) \to (A_0, \iota_0, \Lambda_0, \overline{g^{-1} \circ \eta_0}).$$

Dabei definieren zwei Elemente, die sich um ein Element aus K^p unterscheiden, dieselbe Isogenie. Umgekehrt wird jede Isogenie prim zu p durch ein wohlbestimmtes Element aus $G(\mathbf{A}_f^p)/K^p$ vermittelt.

Eine Isogenie $\alpha : (A_0, \iota_0, \Lambda_0) \to (A, \iota, \Lambda)$, deren Grad durch p teilbar ist, definiert $(A, \iota, \Lambda, \bar{\eta})$, wobei $\bar{\eta}$ die Verkettung

$$H^1(A, \mathbf{A}_f^p) \xrightarrow[\sim]{\alpha} H^1(A_0, \mathbf{A}_f^p) \xrightarrow{\eta_0} V \otimes \mathbf{A}_f^p$$

ist. Wir betrachten die p-dividierbare Gruppe X_0 von A_0 und ihren *kontravarianten* Dieudonnémodul M_0 ([Dem]). Der Kotangentialraum von X_0 identifiziert sich in kanonischer Weise mit M_0/FM_0 ([Fo], III.4.3). Dann ist M_0 ausgestattet mit einer Aktion von $O_D \otimes \mathbf{Z}_p$ und einer Klasse von perfekten alternierenden Bilinearformen ψ, die sich alle um eine Einheit aus $O_{L_0} \otimes \mathcal{O}_t$ unterscheiden. Hier bezeichnet $\mathcal{O}_{\mathfrak{k}}$ den Ring der Wittvektoren von $\mathbf{F}$. Wir erweitern die Aktion von $D \otimes \mathbf{Q}_p$ und die Klasse der alternierenden Bilinearformen auf den rationalen Dieudonnémodul $M_{0\mathbf{Q}}$. Es sei Y_p die Menge der Untergitter $M \subset M_{0\mathbf{Q}}$, die folgende Bedingungen erfüllen:

(i) M ist invariant under der Aktion von O_D.

(ii) Es gibt ein Element $c(M) \in (L_0 \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{k}})^\times$, so daß der Dualraum bzgl. einer der Formen ψ gleich ist

$$M^* = c(M) \cdot M.$$

(iii) M ist V- und F-invariant, und es gilt

$$\mathrm{Tr}(x|M/FM) = t(x)$$

(Gleichheit von Elementen von $\mathbf{F}$).

Hilfssatz 6.5. *Die in* (iii) *geforderte V-Invarianz ist eine Folgerung der Bedingung* (ii) *und der F-invarianz.*

Beweis. Es gilt

$$\psi(Fu, Fv) = p \cdot \psi(u, v)^\sigma,$$

wobei $\sigma : \mathcal{O}_{\mathfrak{k}} \to \mathcal{O}_{\mathfrak{k}}$ den Frobenius auf den Wittvektoren bezeichnet. Aus $FV = p$ folgt

$$\psi(u, Vv) = \psi(Fu, v)^{\sigma^{-1}}.$$

Es folgt

$$(FM)^* = V^{-1}M^* = V^{-1} \cdot c(M)M = c(M)^{\sigma^{-1}} \cdot V^{-1}M.$$

Aus der Inklusion $FM \subset M$ folgt somit $VM \subset M$.

Es sei $\alpha : (A_0, \iota_0, \Lambda_0, \bar{\eta}_0) \to (A, \iota, \Lambda, \bar{\eta})$ eine Isogenie. Der Dieudonnémodul von A wird mittels α zu einem Element von Y_p. Indem wir α in seine zu p prime Komponente und seine p-primäre Komponente zerlegen, erhalten wir also ein Element aus $\big(G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\big) \times Y_p$. Sein Bild in

$$Y(K) \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathrm{Aut}(A_0, \iota_0, \Lambda_0)\backslash \mathbf{G}(\mathbf{A}_f^p)/K^p \times Y_p$$

ist nur von $(A, \iota, \Lambda, \bar{\eta}) \in \mathfrak{J}_K$, nicht aber von der Wahl der Isogenie abhängig. In der Tat, wenn α eine Verkettung ist,

$$(A_0, \iota_0, \Lambda_0, \bar{\eta}_0) \xrightarrow{\alpha^p} (A', \iota', \Lambda', \bar{\eta}') \xrightarrow{\alpha_p} (A, \iota, \Lambda, \bar{\eta}),$$

mit $\eta = \eta' \circ \alpha_p^*$, erhält man g, indem man $\eta' = g^{-1} \circ \eta_0 \circ \alpha^{p*}$ schreibt. Dann faßt man α_p als eine Isogenie von A_0 und A auf, um $M(A)$ in $M(A_0)$ einzubetten. Mittels η_0 bildet man $\mathrm{Aut}(A_0, \iota_0, \Lambda_0)$ in $G(\mathbf{A}_f^p)$ ab, und wenn man α durch $\alpha \circ \gamma$ ersetzt, $\gamma \in \mathrm{Aut}(A_0, \iota_0, \Lambda_0)$, dann wird g durch $\gamma^{-1}g$ ersetzt. Es wird $M(A)$ durch $\gamma^{-1}M(A)$ ersetzt wobei zu bemerken ist, daß $\gamma^{-1}M(A)$ nur von der p-primären Komponente von γ abhängt.

Wir zeigen zunächst, daß die soeben definierte Abbildung eine Bijektion von $\mathfrak{J}_K$ auf $Y(K)$ vermittelt. Die Theorie der Dieudonnémoduln zeigt sofort, daß jedes Element aus $G(\mathbf{A}_f^p)/K^p \times Y_p$ eine Isogenie α definiert, so daß die Surjektivität klar ist. Umgekehrt, falls α_1 und α_2 zwei Isogenien mit demselben Bild in $Y(K)$ sind, so erhalten wir zwei Elemente in $G(\mathbf{A}_f^p)/K^p \times Y_p$, die sich um ein Element $\alpha \in \mathrm{Aut}(A_0, \iota_0, \Lambda_0)$ unterscheiden. Es sei $\gamma = \frac{1}{n} \cdot \gamma'$, wobei γ' ein Endomorphismus der abelschen Varietät A_0 ist (und n eine p-Potenz). Falls wir α_1 durch $\alpha_1 \circ \gamma'$ und α_2 durch $\alpha_2 \circ n$ ersetzen, dürfen wir annehmen, daß die Elemente aus $G(\mathbf{A}_f^p)/K^p \times Y_p$, die von α_1 bzw. α_2 definiert werden, identisch sind. Es seien

$$\varphi_1 = \alpha_2\alpha_1^{-1}, \text{ und } \varphi_2 = \alpha_1^{-1}\alpha_2.$$

Falls wir zeigen können, daß φ_1 und φ_2 Morphismen in der Kategorie der abelschen Varietäten bis auf zu p prime Isogenie und nicht nur Isogenien sind, so definieren sie zueinander inverse *Isomorphismen* zwischen $(A_1, \iota_1, \Lambda_1)$ und $(A_2, \iota_2, \Lambda_2)$, die zudem noch mit den Niveaustrukturen verträglich sind. Es sei (mit einem neuen n) $\varphi_1 = \frac{1}{n} \cdot \varphi_1'$ mit $\varphi_1' \in \mathrm{Hom}(A_1, A_2)$. Auf den Dieudonnémoduln erhalten wir eine Inklusion

$$\varphi_1'(M_2) \subseteqq M_1.$$

Weil aber nach Voraussetzung die von α_1 und α_2 definierten Elemente aus Y_p identisch sind, ist $\varphi_1'(M_2) \subseteqq n \cdot M_1$, und somit faktorisiert sich φ_1' über den Quotienten von A_1 nach seinen n-Teilungspunkten, so daß φ_1 ein Morphismus ist. Entsprechend zeigt man, daß φ_2 ein Morphismus ist. In der konstruierten Bijektion entspricht der Wirkung von Φ aud $\mathcal{J}_K$ dem Operator auf $Y(K)$, der über die Y_p-Komponente wirkt und dort das Gitter M durch das Gitter $F^r M$ ersetzt. Das folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß der relative Frobenius Fr: $A \to A^{(p)}$ auf den Dieudonnémoduln eine Abbildung definiert, $M^{(p)} \to M$, die das Gitter $M^{(p)}$ mit FM identifiziert (siehe [Dem], p. 63).

Als nächstens wollen wir die Mengen $Y(K)$ und $X_\phi(K)$ vergleichen. Nach Wahl einer D-linearen L_0-symplektischen Ähnlichkeit $M_{0\mathbf{Q}} \cong V \otimes \mathfrak{k}$ operiert die Gruppe $G(\mathfrak{k}) \rtimes \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\bar{Q}_p)$ auf M_0. (V ist hier wieder ein D-Modul.) Die Menge der Gitter $M \subset M_{0\mathbf{Q}}$, die die Bedingungen (i) und (ii) vor 6.5 erfüllen, bildet einen homogenen Raum unter $G(\mathfrak{k})$ und kann mit $\mathcal{X} = G(\mathfrak{k}) \cdot x^0$ identifiziert werden (Existenz einer Normalform.) Wegen der Natur der Identifikation von $\mathcal{P}$ mit $\mathcal{M}$ bestimmt $\xi_p = \phi \circ \zeta_p$ den rationalen Dieudonnémodul $(M_{0\mathbf{Q}}, F)$ bis auf Isomorphie. Das bedeutet, daß es ein Element $h_1 \in G(\mathfrak{k})$ gibt, so daß

$$F = \mathrm{ad}h_1(F_\phi),$$

wobei $F_\phi = \xi'(d_\sigma)$ der vor (5.d) konstruierte. "Frobenius" ist. Hierbei bezeichnet $d_\sigma \in W_{L_n/\mathbf{Q}_p}$ eine Liftung des Frobeniuselements aus $\mathrm{Gal}(L_n/\mathbf{Q}_p)$ und ξ' den aus $\xi'_p = \mathrm{ad}h(\xi_p) : \mathcal{D}_{L_n}^{L_n} \to \mathcal{G}_G$ zu seiner Konstruktion benutzten Homomorphismus der Weilgruppe $W_{L_n/\mathbf{Q}_p}$ nach $G(\mathfrak{k}) \rtimes \mathrm{Gal}(\mathfrak{k}/\mathbf{Q}_p)$. In der obigen Gleichung ist natürlich die rechte Seite als der von dem dort stehenden Element definierte Operator auf $M_{0\mathbf{Q}}$ zu interpretieren. Wir zeigen, daß die Bedingung

$$\mathrm{inv}\,(x^1, x^2) = \mu,$$

wobei x_i dem Gitter M^i entspricht, gleichbedeutend ist mit der Inklusion

$$pM^1 \subset M^2 \subset M^1,$$

so daß $\mathrm{Tr}(x|M^1/M^2) = t(x),\ x \in O_D$.

Offenbar genügt es dazu überhaubt, zwei Gitter M^1, M^2 zu finden, die die obige Bedingung erfüllen, und so daß für die entsprechenden Punkte $x^i \in \mathcal{X}$ die Invariante gleich μ ist. Es sei T' eine über $\mathbf{Q}_p$ definierte Cartanuntergruppe von G, die über $\mathfrak{k}$ zerfällt und $\mu' \in X_*(T')$ ein Kogewicht, das zu μ konjugiert ist. Wir wählen im zu T' gehörigen Apartment den zu $T'(\mathbf{Z}_p)$ gehörigen speziellen Punkt x^1 ([T], §3.6.1), der einem Gitter M^1 entspricht. Dann operiert $T'(\mathcal{O}_\mathfrak{k})$ auf M^1 und $T'(\mathbf{F})$ auf M^1/pM^1 und die so erhaltene Darstellung ist die Reduktion modulo p dar Darstellung von T' auf $V_{\mathbf{Q}_p}$. Wir setzen

$$M^2 = p \cdot M^1 + \sum_{\langle \mu', x \rangle = 0} \mathbf{F}_\chi \subset M^1,$$

wobei $\mathbf{F}_\chi$ der zu χ gehörige Charakterraum ist. Weil μ' zu μ konjugiert ist, sind dann die in M^1/M^2 auftretenden Charaktere gerade diejenigen Charaktere χ, die in $V_\mathbf{C}$ auftreten und für die $\langle \mu, \chi \rangle = 1$ ist. Es gilt somit

$$\mathrm{Tr}(x|M^1/M^2) = \mathrm{Tr}(x|V_h^{1,0}) \pmod p$$

für $x \in O_D$. Es ist auch offenbar $x^2 = p^{\mu'} x^1$, so daß

$$\mathrm{inv}\,(x^1, x^2) = -\mathrm{inv}\,(x^2, x^1) = \mu$$

(vgl. Beispiel vor 5.2). Wir erhalten, daß für $M \in Y(K)$

$$\mathrm{inv}\,(M, FM) = \mu.$$

Es folgt, daß $h_1 : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ eine Bijektion zwischen X_p und Y_p herstellt, die den Operator Φ in die Aktion des Frobenius überführt, und daß $g \to h_1 \cdot g \cdot h_1^{-1}$ einen Isomorphismus zwischen J_ϕ und $\mathrm{Aut}(M_{0_Q}, \iota, \Lambda)$ definiert. Aus der Definition der motivischen Gerbe folgt, daß wir I_ϕ mit $\mathrm{Aut}(A_0, \iota, \Lambda_0)$ identifizieren können, sowie auch die Operation von I_ϕ auf $X^p/K^p \times X_p$ mit der Operation von $\mathrm{Aut}(A_0, \iota_0, \Lambda_0)$ auf $G(\mathbf{A}_f^p)/K^p \times Y_p$, falls wir den durch die l-adische Kohomologie von A_0 bestimmten Grundpunkt von X^p/K^p wählen und X_p mit Y_p bzw. J_ϕ mit $\mathrm{Aut}(M_{0\mathbf{Q}}, \iota_0, \Lambda_0)$ auf die oben angegebene Weise miteinander identifizieren. Wir erhalten die gewünschte Bijektion zwischen $X_\phi(K)$ und $Y(K)$.

§7. ZWEI BEISPIELE

Das erste Beispeiel wird eine z-Erweiterung im Sinne von Kottwitz [K1] sein,

$$1 \to A \to G' \to G \to 1,$$

so daß die Vermutung des §5 nicht gleichzeitig für G und G' gelten kann. In diesem Beispiel können die derivierten Gruppen von G' und G nicht gleichzeitig einfachzusammenhängend sein. Weiter unten werden wir eine Gruppe G'' über $\mathbf{Q}$ konstruieren und ein $h'' : S \to G''_{\mathbf{R}}$ mit folgenden Eigenschaften.

(7.a) (G'', h'') definiert eine Shimuravarietät.

(7.b) Es sei Z'' das Zentrum von G''. Dann ist

$$H^1(\mathbf{Q}, Z'') = 0 \text{ und } H^1(\mathbf{Q}_v, Z'') = 0$$

für jede Primstelle v von $\mathbf{Q}$.

(7.c) Es sei Z''_{der} das Zentrum von G''_{der}. Dann ist

$$H^2(\mathbf{Q}, Z''_{\mathrm{der}}) \to \prod_v H^2(\mathbf{Q}_v, Z''_{\mathrm{der}})$$

injektiv.

(7.d) Es existiert eine endliche algebraische Gruppe U über $\mathbf{Q}$ und eine Einbettung $u'' : U \to Z''_{\mathrm{der}}$, so daß

$$H^2(\mathbf{Q}, U) \to \prod_v H^2(\mathbf{Q}_v, U)$$

nicht injektiv ist.

Wir betten U in einen induzierten Torus A ein

$$u : U \to A$$

und setzen

$$G' = A \times G''/(u \times u'')(U),\ G = G''/u''(U).$$

Dann ist G' eine z-Erweiterung von G mit A wie oben und

$$G'_{\mathrm{der}} = G''_{\mathrm{der}}, \quad G_{\mathrm{der}} = G''_{\mathrm{der}}/u''(U).$$

Es sei $\bar{G}$ eine innere Twistung von G und $\bar{G}'$ und $\bar{G}''$ die entsprechenden Twistungen von G' und G''.

Als nächstes definieren wir einen Kozyklus g'_σ mit Werten in $\bar{G}'$, dessen Bild in $\bar{G}$ lokal überall trivial ist und in G_{ab} global trivial, dessen Bild in G'_{ab} aber nichttrivial ist. Weil A ein induzierter Torus ist, erhalten wir ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^1(\mathbf{Q}, A/U) & \longrightarrow & H^2(\mathbf{Q}, U) & \longrightarrow & H^2(\mathbf{Q}, A) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \prod_v H^1(\mathbf{Q}_v, A/U) & \longrightarrow & \prod_v H^2(\mathbf{Q}_v, U) & \longrightarrow & \prod_v H^2(\mathbf{Q}_v, A).
\end{array}$$

Der Pfeil in der letzten Spalte ist injektiv. Folglich ist die Klasse $\{a_{\varrho,\sigma}\} \in H^2(\mathbf{Q}, U)$, die lokal überall trivial ist und deren Existenz wir in (7.d) verlangt haben, das Bild einer Klasse aus $H^1(\mathbf{Q}, A/U)$. Es sei $\sigma \to a'_\sigma \in A$ eine Hochhebung eines Repräsentanten dieser Klasse. Der Rand dieser Kette ist ein 2-Kozykel mit Werten in Z''_{der}, der lokal überall trivial ist und somit, wegen (7.c), trivial ist. Es sei $\{z_\sigma\}$ eine Kokette, deren Rand gleich dem Inversen des Rands von $\{a'_\sigma\}$ ist. Dann ist

$$\sigma \to g'_\sigma = a'_\sigma \cdot z_\sigma$$

ein Kozykel mit Werten in $A \cdot Z''_{\mathrm{der}}/U \subset \bar{G}'$. Sein Bild g_σ in $\bar{G} = \bar{G}''/U$ ist das Bild von z_σ. Weil $G_{\mathrm{ab}} = \bar{G}''/\bar{G}''_{\mathrm{der}}$, ist seine Klasse in G_{ab} offensichtlich trivial. Lokal ist

$$z_\sigma = v_\sigma \cdot u_\sigma,$$

wobei v_σ ein Kozykel mit Werten in Z''_{der} ist und $u_\sigma \in U$. Folglich ist g_σ auch das Bild von v_σ und somit wegen (7.b) ein trivialer Kozykel. Somit stellt $\{g_\sigma\}$ lokal überall die triviale Klasse in $\bar{G}$ dar.

Wir definieren h' als $1 \times h''$ und h als Verkettung von h' und der Projektion von G' nach G. Dann definieren (G', h') und (G, h) Shimuravarietäten. Die natürliche Abbildung $\mathcal{G}_{G'} \to \mathcal{G}_G$ ordnet jedem Homomorphismus $\phi' : \mathcal{Q} \to \mathcal{G}_{G'}$ einen Homomorphismus $\phi : \mathcal{Q} \to \mathcal{G}_G$ zu.

Lemma 7.1. *Zwei Homomorphismen ϕ_1' und ϕ_2', die auf dem Kern denselben Homomorphismus nach G'_{ab} induzieren, und die äquivalente Homomorphismen ϕ_1 und ϕ_2 liefern, sind äquivalent.*

Die Homomorphismen ϕ_1 und ϕ_2 seien gleich. Die folgende Sequenz ist exakt:

$$1 \to U \to G' \to G'_{\mathrm{ab}} \times G.$$

Aus den Voraussetzungen folgt somit leicht, daß ϕ_1 und ϕ_2 identische Homomorphismen auf dem Kern definierten. Die Behauptung folgt daher aus $H^1(\mathbf{Q}, A) = 0$.

Wir hatten bereits gesehen (Bemerkung vor 5.3), daß $\mathrm{Sh}_{K'}(G', h')$ eine surjektive Überlagerung von $\mathrm{Sh}_K(G, h)$ mit der Faser

$$A(\mathbf{Q})\backslash\alpha^{-1}(K)/K'$$

ist. Wir wollen als nächstens zeigen, daß falls ϕ' und ϕ zulässig sind, wobei ϕ durch ϕ' geliefert wird, die Menge

$$Y_{\phi'} = I_{\phi'}\backslash X_p' \times X'^p/K'^p$$

eine surjektive Überlagerung der entsprechenden Menge X_ϕ ist mit derselben Faser. Somit kann die Vermutung des §5 nur dann für G' und G gleichzeitig gelten, zumindest in kompatibler Weise, wenn jeder zulässige Homomorphismus ϕ von einem zulässigen Homomorphismus ϕ' kommt. Wir werden weiter unten ein zulässiges ϕ' finden, so daß ϕ' auf dem Kern rational ist und $I = G'$. Dann sind $\vartheta_{\phi'} = \bar{G}'$ und $\vartheta_\phi = \bar{G}$ innere Twistungen von G' und G. Es sei $\{g'_\sigma\}$ der oben konstruierte Kozykel und $\{g_\sigma\}$ sein Bild in $\bar{G}$. Dann ist

$$g \cdot \phi : \mathcal{Q} \to \mathcal{G}_G$$

zulässig. In der Tat, weil das Bild von $\{g_\sigma\}$ in G_{ab} trivial ist, bleibt die Gültigkeit der Bedingung (5.a) beim Übergang von ϕ zu $g \cdot \phi$ erhalten und weil $\{g_\sigma\}$ lokal überall trivial ist, bleiben die Bedingungen b)—d) erhalten. Der Homomorphismus $g' \cdot \phi'$ liefert $g \cdot \phi$ und ist nicht zulässig, da das Bild von g_σ in G'_{ab} nicht trivial ist. Falls es einen zulässigen Homomorphismus $\tilde{\phi}'$ gäbe, der ϕ liefert, so müßte er auf dem Kern denselben Homomorphismus wie $g' \cdot \phi'$ induzieren und somit wegen Lemma 7.1 mit $g' \cdot \phi'$ übereinstimmen, was unmöglich ist.

Für den Beweis der obigen Behauptung präzisieren wir, daß wir G' und G quasizerfallend über $\mathbf{Q}_p$ nehmen und daß K_p' und K_p hyperspeziell genommen sind. Der Torus A zerfällt über einer unverzweigten Erweiterung. Wir dürfen annehmen, daß die Einschränkung von ϕ' auf den Kern über $\mathbf{Q}$ definiert ist. Dann ist $I_{\phi'} = \vartheta_{\phi'}(\mathbf{Q})$ und $I_\phi = \vartheta_\phi(\mathbf{Q})$, und die Sequenz

$$1 \to A \to \vartheta_{\phi'} \to \vartheta_\phi \to 1$$

ist exakt. Folglich ist

$$I_{\phi'} \to I_\phi$$

surjektiv. Genauso schließt man, daß $X'^p \to X^p$ surjektiv ist. Weil auch $G'(\mathfrak{k}) \to G(\mathfrak{k})$ surjektiv ist, ist $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ surjektiv. Dabei ist

$$\mathcal{X}' \subset \mathcal{B}(G', \mathfrak{k}) = \mathcal{B}(A, \mathfrak{k}) \times \mathcal{B}(G'', \mathfrak{k}).$$

Es sei $x' = (g'y^0, g'x^0) \in \mathcal{X}'$ mit Bild in X_p:

$$\operatorname{inv}\big(gx^0, F(gx^0)\big) = \mu'' = \mu.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\operatorname{inv}\big((g'y^0, g'x^0), F(g'y^0, g'x^0)\big) &= \operatorname{inv}\big((g'y^0, g'x^0), \big(\sigma(g')y^0, Fg'x^0\big)\big) \\ &= 0 + u'',\end{aligned}$$

falls $g'y^0$ rational über $\mathbf{Q}_p$ ist. Weil wir ein solches g' immer finden können, ist $X'_p \to X_p$ surjektiv. Wir betrachten die Abbildung

$$X'_p \times X'^p \to X_p \times X^p.$$

Wenn $x'_p \times x'^p$ und $\bar{x}'_p \times \bar{x}'^p$ dasselbe Bild in Y_ϕ haben, so ist für die Bilder in $X_p \times X^p$

$$\bar{x}_p \times \bar{x}^p = \gamma(x_p \times x^p)k^p, \quad \gamma \in I_\phi,\ k^p \in K^p.$$

Da $I_{\phi'} \to I_\phi$ surjektiv ist, können wir nach Abänderung von $\bar{x}'_p \times \bar{x}'^p$ mit γ' annehmen, daß $\gamma = 1$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned}\bar{x}'_p &= a \cdot x'_p \qquad a \in A(\mathbf{Q}_p), \\ \bar{x}'^p &= x'^p g' \qquad g \in \alpha^{-1}(K^p).\end{aligned}$$

Das heißt, daß $Y_{\phi'} \to Y_\phi$ eine surjektive Überlagerung ist mit Faser

$$A(\mathbf{Q})\backslash\alpha^{-1}(K^p) \cdot A(\mathbf{Q}_p)/K'^p \cdot V,$$

wobei V der Stabilisator von y^0 in $A(\mathbf{Q}_p)$ ist. Die Behauptung folgt, weil $K'_p \to K_p$ surjektiv ist und

$$\alpha^{-1}(K_p)/K'_p \cong A(\mathbf{Q}_p)/V.$$

Es bleibt die Konstruktion eines Beispiels. Es sei L eine total imaginäre quadratische Erweiterung eines total reellen Zahlkörpers L_0. Es sei J eine 4-dimensionale hermitesche Form mit Koeffizienten aus L und H_J die entsprechende Gruppe der unitären Ähnlichkeiten

$$H_J(\mathbf{Q}) = \{A \in GL(4, L) | A^*JA = \lambda \cdot J\}.$$

Das Zentrum von H_J ist $L^\times$. Die Gruppe G'' wird ein Produkt der Form

$$G'' = \prod_{(L^i, L_0^i, J^i)} H_{J^i}$$

sein und h'' wird wie üblich gewählt, so daß (7.a) gilt. Die Eigenschaft (7.b) ist offensichtlich. Um (7.c) zu überprüfen, genügt es $G'' = H_J$ zu betrachten. Dann ist Z''_{der} der induzierte Modul

$$Z''_{\mathrm{der}} = \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/L_0)}^{\mathrm{Gal}(\bar{Q}/\mathbf{Q})} \mathbf{Z}/4.$$

Es ist zu zeigen, daß

$$H^2(L_0, \mathbf{Z}/4) \to \prod_v H^2(L_{0_v}, \mathbf{Z}/4)$$

injektiv ist oder, was nach dem Satz von Poitou-Tate ([Se 1], S.II-49) äquivalent ist, daß

$$H^1(L_0, \mu_4) \to \prod_v H^1(L_{0_v}, \mu_4)$$

inektiv ist. Das ist eine Folge des Satzes von Grunewald-Wang ([AT], Chap. 10, Th. 1), weil $-1 \in L_0$ kein Quadrat ist.

Angenommen wir können eine total reelle Galoiserweiterung L_0 von $\mathbf{Q}$ finden und einen Galoismodul U über $\mathrm{Gal}(L_0/\mathbf{Q})$ mit $4U = 0$, und so daß die Lokalisierungsabbildung in (7.d) nicht injektiv ist. Dann können wir offenbar G'' wie oben finden, so daß U in Z''_{der} eingebettet werden kann. Anstelle von U konstruieren wir

$$V = \mathrm{Hom}(U, \mu_4).$$

Wir verlangen somit, daß $4V = 0$, daß V ein $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$-Modul ist für eine galois'sche CM-Erweiterung L von $\mathbf{Q}$, für die die komplexe Konjugation ι als -1 operiert, und daß

$$H^1(\mathbf{Q}, V) \to \prod_v H^1(\mathbf{Q}_v, V)$$

nicht injektiv ist. Wir imitieren das Verfahren von Serre ([Se1], S. III-39). Es sei

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{73}, \sqrt{89}) = \mathbf{Q}\sqrt{-1}) \cdot \mathbf{Q}\sqrt{73}, \sqrt{89}) \\ &= K \cdot L_v, \end{aligned}$$

mit $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q}) &= \mathrm{Gal}(L/L_0) \times \mathrm{Gal}(L/K) \\ &\cong \mathbf{Z}/2 \times (\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2). \end{aligned}$$

Man überprüft leicht, daß alle Zerlegungsgruppen überall trivial oder zyklisch der Ordnung 2 sind. Dies ist klar in den archimedischen Stellen und den Stellen außerhalb 2, 73 und 89, weil dort die Erweiterung L unverzweigt ist. In $\mathbf{Q}_2$ sind 73 und 89 Quadrate, denn $73 \equiv 89 \equiv 1 \bmod 8$. Entsprechend ist

$$\left(\frac{-1}{73}\right) = 1, \left(\frac{89}{73}\right) = \left(\frac{16}{73}\right) = 1$$

und

$$\left(\frac{-1}{89}\right) = 1, \left(\frac{73}{89}\right) = \left(\frac{-16}{89}\right) = 1.$$

Es sei

$$M = \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(L/L_0)}^{\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})} \mu_4.$$

Dann ist M die Menge der μ_4-wertigen Funktionen auf $\mathrm{Gal}(L/K)$ und ι operiert als -1. Es sei $\mathrm{Gal}(L/K) = \{1, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3\}$.

Es sei

$$V_0 = \{(\varepsilon_\varrho) | \varepsilon_\varrho = \pm 1, \prod_{\varrho \in \mathrm{Gal}(L/K)} \varepsilon_\varrho = 1\}$$

und

$$V = V_0 \cup V_0 \cdot v$$

mit

$$v = (\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha), \qquad \alpha \in \mu_4, \ \alpha \neq \pm 1.$$

Dann ist V ein Gal(Ł/$\mathbf{Q}$)-Modul. Wir haben ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(\mathbf{Q}, M) & \longrightarrow & H^0(\mathbf{Q}, M/V) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{Q}, V) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{Q}, M) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\prod_v H^0(\mathbf{Q}_v, M) & \longrightarrow & \prod_v H^0(\mathbf{Q}_v, M/V) & \longrightarrow & \prod_v H^1(\mathbf{Q}_v, V) & \longrightarrow & \prod_v H^1(\mathbf{Q}_v, M).
\end{array}$$

Dabei ist nach dem Grunewald'schen Satz der rechte senkrechte Pfeil injektiv, weil $-1 \in L_0$ kein Quadrat ist. Um zu zeigen, daß die Lokalisierungsabbildung für V nicht injektiv ist, genügte es also, ein Element y aus M/V zu finden, das für jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ die Restklasse eines σ-invarianten Elements y_σ aus M ist, das aber nicht die Restklasse eines $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$-invarianten Elements ist. Die Restklasse y von $(1, -1, -1, -1)$ ist ein solches Element. In der Tat ist es nicht Bild eines $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$-invarianten Elements, denn nur $\pm(1, 1, 1, 1)$ sind invariant.

(i) $\sigma = \iota$. Dann wählen wir $y_\sigma = (1, -1, -1, -1)$.

(ii) $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Dann wählen wir $y_\sigma = (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$.

(iii) $\sigma = \iota \cdot \varrho, \varrho \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Dann wählen wir $y = (z_1, z_\varrho, z_\tau, z_{\tau\varrho})$ mit

$$z_1 = \alpha, \ z_\varrho = -\alpha, \ z_\tau = \alpha, \ z_{\tau\varrho} = -\alpha.$$

Wir brauchen schließlich ein ϕ', so daß $\vartheta_{\phi'}$ eine innere Form von G' ist. Wir definieren ϕ' als $\psi_{T',\mu'}$ mit zweckmäßiger Wahl von (T', μ'). Anstelle von T', μ' genügt es offenbar (T'', μ'') zu finden, so daß das entsprechende Element $\gamma''_n \in G''(\mathbf{Q})$ zentral ist und dafür können wir annehmen, daß G'' von der Form H_J ist. Dann definieren wir T'' mittels einer Erweiterung K vom Grad 4 von L. Es genügt K so zu wählen, daß die über p liegenden Primstellen von K in L träge sind, denn dann ist das Bild von γ''_n in G''_{ad} elliptisch im p und somit, weil es sowieso elliptisch im Unendlichen ist, von endlicher Ordnung. Wir haben noch die Wahl von p, das allerdings unverzweigt in L sein soll, und von K frei. Wir wählen K von der Form $K = L \cdot K_1$, wobei K_1 eine Erweiterung von Grad 4 von **Q** ist, so daß p träge und total verzweigt in K_1 ist. Nämlich, falls $p \equiv 1 \bmod 4$, so gibt es eine Untergruppe vom Index 4 in $\mathbf{Z}_p^\times$, die eine total verzweigte abelsche Erweiterung von Grad 4 von $\mathbf{Q}_p$ definiert, und man nimmt einen total-reellen globalen Körper von Grad 4, der in p diese Gestalt hat. Wir definieren J durch die Gleichung

$$J(x,y) = \mathrm{Tr}_{K/L} x\bar{y}.$$

Wir wollen jetzt ein Beispiel einer Gruppe geben, bei der es zulässige Homomorphismen ϕ gibt, die nicht äquivalent zu einem $\psi_{T,\mu}$ sind. Es sei E eine total-reelle Erweiterung von Grad n von **Q**, in der p prim bleibt. Es sei D eine Quaternionenalgebra über E, die in allen unendlichen Stellen unverzweigt ist und die in p verzweigt ist. Die Gruppe G ist die multiplikative Gruppe D^*, aufgefaßt als algebraische Gruppe über **Q**. Nach Wahl eines Isomorphismus $G_R \cong GL(2)^n_{\mathbf{R}}$ wird $h : \underline{\mathbf{S}} \to G_{\mathbf{R}}$ komponentenweise wie üblich erklärt:

$$h_i : a + b\sqrt{-1} \in \mathbf{C}^* \to \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{R}).$$

Es sei K eine rein imaginäre quadratische Erweiterung von E, die in allen Stellen außerhalb p in D eingebettet ist, während p in ihr zerfällt: $p = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2$. Es sei $q = p^m$. Wie in §3 konstruiert man für genügend hohes m eine Weilzahl $\gamma \in K$ für die $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_i}\gamma / \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_i} q = v_i/2n$, wobei v_1 und v_2 zwei vorgegebene positive Zahlen sind mit

(7.e) $$v_1 + v_2 = 2n.$$

Falls $E = \mathbf{Q}$, so können wir die r_i ungerade (für spätere Zwecke) und voneinander verschieden wählen. Dann ist $K = E(\gamma)$. Es sei $T = K^*$ ein algebraischer Torus. Wir werden erstens $T(\bar{\mathbf{Q}})$ in $G(\bar{\mathbf{Q}})$ einbetten und dann einen zulässigen Homomorphismus $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{G}_G$ konstruieren, wobei die Gruppe $K_p \subset G(\mathbf{Q}_p)$, die in der Bedingung (5.d) vorkommt, die einzige maximale kompakte Untergruppe ist, so daß $\phi(\delta) = \gamma$, d.h. $\phi(\delta_{km}) = \gamma^k$. Dieser liefert das gesuchte Beispiel, da dann offenbar $\gamma \in I_\phi = K^*$ ist, das nicht in $G(\mathbf{Q})$ eingebettet werden kann.

Für die Konstruktion von ϕ benötigen wir einige kohomologische Betrachtungen, die wir vorausschicken. Wir fixieren eine quadratische Erweiterung K' von E, in der p prim bleibt und die in D eingebettet ist. Es sei $L = K'K$. Das folgende Diagramm beschreibt die Situation und definiert die Elemente der Galoisgruppe.

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, dash, "\varepsilon"'] \arrow[d, dash, "\nu"] \arrow[dr, dash, "\eta"] & \\ K \arrow[dr, dash] & K'' \arrow[d, dash] & K' \arrow[dl, dash] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Es ist $\nu = \varepsilon \cdot \eta = \eta \cdot \varepsilon$. Wir betrachten zunächst D^* und K^* als algebraische Gruppen über E und bezeichnen sie mit G^1 und T^1. Wir betten T^1 so in $GL(2)_K$ ein, daß γ nach $\begin{pmatrix} s_1 & \\ & s_2 \end{pmatrix}$ geht, $s_1 \in K,\ s_2 = \eta(s_1)$. Die Operation der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/E)$ auf $GL(2, L)$ ist

$$\eta_* \begin{pmatrix} s_1 & \\ & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2 & \\ & s_1 \end{pmatrix},$$
$$\varepsilon_* \begin{pmatrix} s_1 & \\ & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & \\ & s_2 \end{pmatrix}.$$

Über K' wird G^1 isomorph zu $GL(2)$. Als Twistungskozykel von $\mathrm{Gal}(K'/E)$ wählen wir das Bild in der adjungierten Gruppe der folgenden Kokette in $GL(2)$:

$$1 \to 1,\ \bar{\varepsilon} \to j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier ist $\lambda \in F^\times$ total negativ gewählt und mit $\mathrm{ord}_p \lambda = 1$, so daß λ nicht Norm eines Elements aus K'_p ist. Die getwistete Aktion von $\mathrm{Gal}(K'/E)$ ist

$$\bar{\varepsilon} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} \varepsilon(a) & \varepsilon(b) \\ \varepsilon(c) & \varepsilon(d) \end{pmatrix} j^{-1}.$$

Für die getwistete Aktion von $\mathrm{Gal}(L/E)$ auf γ kommt

$$\text{(7.f)} \qquad \varepsilon \begin{pmatrix} s_1 & \\ & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & \\ & s_2 \end{pmatrix}, \quad \eta \begin{pmatrix} s_1 & \\ & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2 & \\ & s_1 \end{pmatrix}.$$

Der zur obigen Kokette gehörige zentrale 2-Kozykel ist

$$a_{1,1} = a_{1,\bar{\varepsilon}} = a_{\bar{\varepsilon},1} = 1, \quad a_{\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}} = \lambda.$$

Wir betrachten die folgende Kokette von $\mathrm{Gal}(L/E)$ mit Werten in $G^1(L)$:

$$g_\varepsilon = j = g_\eta, \quad g_1 = g_v = 1.$$

Sein Korand ist

$$g_{1,*} = g_{*,1} = 1, \quad g_{v,*} = g_{*,v} = 1, \quad g_{\varepsilon,\eta} = g_{\eta,\varepsilon} = \lambda.$$

Es gilt wegen der obigen Formeln (7.f)

$$\text{(7.g)} \qquad g_\sigma \sigma(\gamma) g_\sigma^{-1} = \gamma, \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(L/E).$$

Also steht auf der linken Seite dieser Gleichung die übliche Aktion von $\mathrm{Gal}(L/E)$ auf $T^1(L)$.

Diese Formel bleibt auch dann richtig, wenn g_σ durch $t_\sigma \cdot g, t_\sigma \in T^1$ ersetzt wird. Wir betrachten daher $\{g_{\varrho,\sigma}\}$ als einen 2-Kozyklus mit Werten in T^1. Seine Klasse in

$$H^2(L/E, T^1) = H^2(L/K, \mathbf{G}_m) = \ker\big(\mathrm{Br}\,(K) \to \mathrm{Br}\,(L)\big)$$

ist offenbar das Bild des Twistungskozykels von G^1 unter der Abbildung von $\mathrm{Br}(E)$ nach $\mathrm{Br}(K)$. Weil der Körper K nach Voraussetzung lokal überall außerhalb p in G^1 eingebettet werden kann, ist die Klasse von $\{g_{\varrho,\sigma}\}$ außerhalb p trivial, während sie in p das Bild des nichttrivialen Elements von $\mathrm{Br}\,(E_p)_2$ ist:

$$\begin{gathered}\mathrm{Br}\,(E_p) \to \mathrm{Br}\,(K_{\mathfrak{p}_1})_2 \oplus \mathrm{Br}\,(K_{\mathfrak{p}_2})_2 \\ \mathbf{Z}/2 \xrightarrow{\text{diagonal}} \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2.\end{gathered}$$

Um jetzt den Homomorphismus ϕ zu definieren, sei $\mathfrak{A}$ ein Links-Repräsentantensystem von $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ modulo $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E)$, das 1 erhält. Dann ist

$$\mathcal{G}_G = \prod_{\tau\in\mathfrak{A}} GL(2,\bar{\mathbf{Q}}) \rtimes \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}),$$

wobei

$$\sigma(\prod_\tau A_\tau) = \prod_\tau \sigma_\tau(A_{\tau'}),\ \tau\sigma = \sigma_\tau\cdot\tau';\quad \tau,\tau'\in\mathfrak{A},\quad \sigma_\tau\in\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E).$$

Auf dem Kern P soll ϕ gegeben sein durch

$$\phi(\delta_k) = (\gamma_\tau^k),\quad \delta_k\in P(L,m),$$

mit $\gamma_\tau = \gamma$ für alle $\tau\in\mathfrak{A}$. Dann ist $\phi|P$ ein über $\mathbf{Q}$ definierter Homomorphismus von Tori, weil $\gamma\in T(\mathbf{Q})$. Also ist $\phi(p_{\varrho,\sigma})$ ein 2-Kozykel von $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ mit Werten in T.

Auf den Erzeugenden p_ϱ von $\mathcal{P}$ definieren wir ϕ versuchsweise durch

$$\phi(p_\varrho) = \prod_\tau g_\tau(\varrho)\times\varrho$$

mit $g_\tau(\varrho) = g_{\varrho\tau}$. Wegen (7.g) gilt dann

$$\begin{aligned}\phi(p_\varrho)\cdot\phi(\delta)\cdot\phi(p_\varrho)^{-1} &= \prod_\tau g_\tau(\varrho)\cdot\varrho_\tau(\gamma)\cdot g_\tau(\varrho)^{-1}\\ &= \prod_\tau \gamma_\tau = \phi(\delta).\end{aligned}$$

Diese Identität bleibt auch dann richting, wenn $g_r(\varrho)$ durch $t_\tau(\varrho)\cdot g_\tau(\varrho)$ mit $t_\tau\in T^1$ ersetzt wird, und diese Abänderung behalten wir uns vor.

Damit ϕ ein Homomorphismus ist, muß auch gelten

$$g_\tau(\varrho)\cdot\varrho_\tau\big(g_{\tau'}(\sigma)\big) = \phi(p_{\varrho,\sigma})\cdots g_\tau(\varrho\sigma).$$

Weil $(\varrho\sigma)_\tau = \varrho_\tau\sigma_\tau$ ist

$$g_\tau(\varrho)\cdot\varrho_\tau\big(g_{\tau'}(\sigma)\big)\cdot g_\tau(\varrho\sigma)^{-1} = g_{\varrho_\tau}\cdot\varrho_\tau(g_{\sigma_{\tau'}})\cdot g^{-1}_{\varrho_{\tau'},\sigma_{\tau'}}.$$

Wir müssen also diesen 2-Kozykel von $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)$ mit Werten in T^1, den wir bereits weiter oben identifiziert haben, mit dem 2-Kozykel $\phi(p_{\varrho,\sigma})$ von $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ mit Werten in T vergleichen. Nach dem Shapirolemma ist $\phi(p_{\varrho,\sigma})$ kohomolog zu einem induzierten Kozykel mit Werten in T^1, und zwar dem auf $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E)$ eingeschränkten Kozykel $\phi^1(p_{\varrho,\sigma})$, wobei $\phi^1 : P \to T^1$ das Element δ nach γ schickt. Nach Konstruktion von $\mathcal{P}$ ist dieser Kozykel trivial außerhalb p und den archimedischen Stellen. Weil K total imaginär ist, ist die Brauergruppe im Unendlichen trivial, also ist der Kozykel auch in den unendlichen Stellen trivial. Um die Klasse des Kozykels in der Stelle p zu bestimmen, können wir ϕ durch $\xi_p = \phi \circ \zeta_p$ ersetzen und dann auf die erste Komponente projizieren. Es sei L' eine Galoiserweiterung von $\mathbf{Q}$, die L enthält. Wir können annehmen, daß L' in p unverzweigt ist. Es sei $\mathfrak{p}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{p}_1$ auf L', und es sei $[L'_{\mathfrak{p}} : \mathbf{Q}_p] = r$. Dann ist ξ_p auf $\mathcal{D}^{L_r}_{L_r}$ definiert. Wenn wir den fundamentalen Kozykel $a_{\sigma^i,\sigma^j}, \sigma$ das Frobeniuselement, auf die gewöhnliche Weise einführen, dann ist $a_{\sigma^i,\sigma^j} = 1, 0 \leqq i,j < r, i+j < r$; $a_{\sigma^i,\sigma^j} = p^{-1}$, $0 \leqq i,j < r, i+j \geqq r$, und

$$\xi^1_p(p^{-1}) = \nu_2(p^{-1}),$$

wobei ν_2 durch

$$|\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L'_{\mathfrak{p}}/\mathbf{Q}_p)} \sigma\lambda(\gamma)|_p = q^{\nu_2(\lambda)}, \quad \lambda \in X^*(T^1)$$

definiert ist.

Nach Definition von γ ist die linke Seite gleich

$$q^{\frac{-(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) r}{2n}},$$

wobei λ_1 und λ_2 eine offensichtliche Bedeutung haben. Der Kozykel über E_p kann daher auf $\mathrm{Gal}(K'_p/E_p)$ definiert werden, und zwar durch

$$\varepsilon \to p^{-(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)}.$$

Da v_1 und v_2 ungerade sind, bekommen wir das Bild in $H^2(K'_p/E_p, T^1)$ des nichttrivialen Kozykels in $H^2(K'_p/E_p, \mathbf{G}_m)$.

Damit sehen wir, daß die beiden zu vergleichenden Kozyklen überall lokal äquivalent sind und folglich äquivalent. Nach Korrektion von $g_\tau(\varrho)$ mit zweckmäßigen $t_\tau(\varrho)$ ist der gesuchte Homomorphismus ϕ definiert. Dabei ist zu bemerken, daß die Äquivalenzklasse von ϕ von der Wahl der Korrekturfaktoren (t_τ) unabhängig ist, denn $H^1(\mathbf{Q}, T) = 0$.

Wie müssen noch nachweisen, daß ϕ zulässig ist. Man überprüft sofort, daß ϕ_{ab} und $\psi_{G_{\mathrm{ab}},\mu_{\mathrm{ab}}}$ auf dem Kern übereinstimmen. (Es ist eine Folge von (7.e).) Weil $H^1(\mathbf{Q}, \mathbf{G}_m) = 0$, stimmen sie somit überein. Außerhalb p und ∞ ist $\mathcal{P}$ trivial, also definiert $\phi \circ \zeta_l$ einen Kozykel mit Werten in G. Weil $H^1(\mathbf{Q}_l, G) = 0$, ist $\phi \circ \zeta_l$ äquivalent zur kanonischen Neutralisierung von $\mathcal{G}_G$.

Das Kompositum $\phi \circ \zeta_\infty$ ist auf dem Kern $\mathbf{C}^\times$ von $\mathcal{W}$ gleich dem Diagonalhomomorphismus $\mathbf{C}^i \to G(\mathbf{C}) = \prod GL(2, \mathbf{C})$. Die entsprechende Kohomologieklasse in

$$H^1(\mathbf{R}, G_{\mathrm{ad}}) \cong H^2(\mathbf{R}, R_{E/\mathbf{Q}}\mathbf{G}_m) \cong (\mathbf{Z}/2)^n$$

wurde weiter oben bestimmt. Weil λ total negativ genommen wurde, ist es das Diagonalelement $(-1, \dots, -1)$ der Gruppe auf der rechten Seite. Der Homomorphismus ζ_∞ bestimmt dieselbe Kohomologieklasse. Weil das Zentrum von G verschwindendes H^1 hat, sind somit ξ_∞ und $\phi \circ \zeta_\infty$ äquivalent.

Die Bedingung in p ist umständlicher zu verifizieren. Das Gebäude von G ist ein Produkt

$$\mathcal{B}(G, \mathfrak{k}) = \mathcal{B}(G_{\mathrm{der}}, \mathfrak{k}) \times X_*(G_{\mathrm{ab}}) \otimes \mathbf{R}$$

und ist gleich dem Gebäude von $R_{F_p/\mathbf{Q}_p}GL(2)$, allerdings mit der getwisteten Aktion. Auf $X_*(G_{\mathrm{ab}}) \otimes \mathbf{R}$ stimmt diese Aktion mit der üblichen überein, während auf dem Gebäude $\mathcal{B}(R_{F_p/\mathbf{Q}_p}SL(2), \mathfrak{k})$ die getwistete Aktion von σ gegeben ist durch

$$\sigma(x^0, \dots, x^{n-1}) = \big(x^1, \dots, x^{n-1}, j \cdot \sigma_*^n(x^0)\big).$$

Hier sind die x^i im Gebäude der $SL(2)$. Es sei

$$x_0 = (x_0^0, \dots, x_0^{n-1}) \in \mathcal{B}(G, \mathfrak{k})$$

die Ecke, die der maximalen kompakten Gruppe der ganzzahligen Elemente von $GL(2, F)$ entspricht. Dann ist offenbar $\sigma^{2n}(x_0) = x_0$, und falls wir mit $x_i = \sigma^i(x_0)$ die Translate von x_0 unter der Galoisgruppe bezeichnen, so bilden die x_i für $i \in \mathbf{Z}/2n$ Ecken eines Polysimplex, das unter $\mathrm{Gal}(\mathfrak{k}/\mathbf{Q}_p)$ invariant ist. Wir betrachten seinen Faktor in $\mathcal{B}(G_{\mathrm{der}}, \mathfrak{k})$. Man sieht leicht, daß dessen Schwerpunkt der einzige Fixpunkt der Galoisaktion auf dem Gebäude von G_{der} ist. Nach dem Fixpunktsatz von Bruhat und Tits besteht das Gebäude von $\mathcal{B}(G_{\mathrm{der}}, \mathbf{Q}_p)$ aus diesem einzigen Punkt. Weil wir K_p als die wohlbestimmte maximale kompakte Untergruppe von $G(\mathbf{Q}_p)$ gewählt hatten, d.h. $K_p \cap G_{\mathrm{der}}(\mathbf{Q}_p) = G_{\mathrm{der}}(\mathbf{Q}_p)$, und weil der Stabilisator einer Kammer in einer einfachzusammenhängenden Gruppe alle Punkte der Kammer festläßt, ist

$$K_p = \{g \in G(\mathbf{Q}_p) | g \cdot x_i = x_i, \quad i \in \mathbf{Z}/2n\}.$$

Damit haben wir K_p in der Form dargestellt, wie sie im §5 für die Formulierung der Bedingungen der Zulässigkeit gebraucht wird. Als nächstes berechnen wir den Operator F. Es sei $v_1 = 2a+1$ und $v_2 = +1$, so daß $a+b = n-1$. Wir wählen die fundamentale Klasse für die unverzweigte Erweiterung $L_{2n} = L_{p_1}$ vom Grad $2n$ wie im Beispiel vor 5.2. Wir schicken das Element $d_\sigma = 1 \times \sigma \in \mathcal{D}_{L_{2n}}^{L_{2n}}$ nach

$$F = \left(\begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & \\ & p \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & \\ & p \end{pmatrix}, j \right) \times \sigma.$$

Hier tritt die Matrix $\begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix}$ a mal auf und $\begin{pmatrix} 1 & \\ & p \end{pmatrix}$ b mal. Auf dem Kern nehmen wir den Homomorphismus

$$\nu : \lambda \to \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2.$$

Um zu überprüfen, daß auf diese Weise ein Homomorphismus $\tilde{\xi} : \mathcal{D}^{L_{2n}} \to \mathcal{G}_G$ definiert ist, genügt es zu zeigen, daß $F^{2n} = \nu(p^{-1})$ in $G(\mathbf{Q}_p) = G^1(E_p)$. Indem man ausnutzt, daß sowohl σ^n als auch das Element j durch Vertauschen der Eingänge einer Diagonalmatrix wirken,

$$\sigma^n \begin{pmatrix} s_1 & \\ & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2 & \\ & s_1 \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} s_1 & \\ & s_2 \end{pmatrix} j^{-1},$$

erhält man $F^n = \begin{pmatrix} p^a & \\ & p^b \end{pmatrix} j \times \sigma^n \in G^1(F_p) \times \sigma^n$. Folglich ist

$$F^{2n} = \begin{pmatrix} p^{2a+1} & \\ & p^{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{v_i} & \\ & p^{v_2} \end{pmatrix} = \nu(p^{-1}).$$

Der lokalisierte Homomorphismus $\phi \circ \zeta_p$ stimmt mit $\tilde{\xi}$ auf dem Kern überein. Somit unterscheiden sie sich um einen 1-Kozykel mit Werten in T, und weil $H^1(\mathbf{Q}_p, T) = 0$ ist, sind sie äquivalent. Es folgt, daß das Bild von d_σ der in Abschnitt 5 definierte Operator F ist. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{inv}(\sigma x_i, F x_i) &= \operatorname{inv}\left(x_{i+1}, \left(\begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & \\ & p \end{pmatrix}, j \right) \cdot x_{i+1} \right) \\ &= (\mu, \dots, \mu). \end{aligned}$$

Folglich enthält X_p den Punkt $(x_0, \dots, x_{2n-1})$ und ist nicht leer. Also erfüllt ϕ auch die Bedingung (5.d) an die Zulässigkeit.

Literatur

[A] *M. Artin*, Algebraization of formal moduli, in: A Collection of Mathematical Papers in Honor of K. Kodaira, Tokyo 1969.

[AT] *E. Artin, J. Tate*, Class Field Theory, New York-Amsterdam 1967.

[BT] *F. Bruhat, J. Tits*, Groupes reductifs sur un corps local. I, II. Pub. Math. IHES **41** (1972), **60** (1984).

[C] *H. Carayol*, Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura, Thèse, Paris 1984.

[De1] *P. Deligne*, Varietés de Shimura. Interprétation modulaire et techniques de construction de modèles canoniques, in: Automorphic Forms, Representations, and L-Functions, AMS 1979.

[De2] *P. Deligne*, Motifs et groupe de Taniyama, in: Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties, LMN **900**, Berlin-Heidelberg-New York 1982.

[De3] *P. Deligne*, Travaux de Shimura, Sem. Bourbaki exp. 389 (Februar 1971), unveröffentlicht.

[DM] *P. Deligne, J. Milne*, Tannakian Categories, in: Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties, LNM **900**, Berin-Heidelberg-New York 1982.

[DR] *P. Deligne, M. Rapoport*, Modules des courbes elliptiques, in: Modular Functions of One Variable. II, LNM **349**, Berlin-Heidelberg-New York 1972.

[Dem] *M. Demazure*, Lectures on p-divisible groups, LNM **244**, Berlin-Heidelberg-New York 1972.

[SGAD] *M. Demazure, A. Grothendieck*, Schemas en groupes, LNM **151-153**, Berlin-Heidelberg-New York 1970.

[Fo] *J.-M. Fontaine*, Groupes p-divisibles sur les corps locaux, Astérisque **47-48** (1977).

[Fu] *W. Fulton*, Intersection Theory, Berlin-Heidelgerg-New York 1984.

[G] *M. Greenberg*, Schemata over local rings, II, Ann. Math. **78** (1963), 256-266.

[KM] *N. Katz, W. Messing*, Some consequences of the Weil conjectures, Inv. Math. **23** (1974), 73-77.

[K] *S. Kleiman*, Algebraic Cycles and the Weil conjectures, in : Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, Amsterdam 1968.

[Kn] *M. Kneser*, Galois-Kohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über p-adischen Körpern. II, Math. Z. **89** (1965), 250-272.

[K1] *R. Kottwitz*, Rational conjugacy classes in reductive groups, Duke Math. J. **49** (1982), 785-806.

[K2] *R. Kottwitz*, Stable Trace Formula: Cuspidal Tempered Termss, Duke Math. J. **51** (1984), 611-650.

[K3] *R. Kottwitz*, Shimura Varieties and Twisted Orbital Integrals, Math. Ann. **269** (1984), 287-300.

[K4] *R. Kottwitz*, Isocrystals with additional structures, Math. Ann. **275** (1986), 365-399.

[K5] *R. Kottwitz*, Stable Trace Formula: Elliptic Singular Terms, Comp. Math. **56** (1985), 201-220.

[L1] *R.P. Langlands*, Some contemporary problems with origins in the Jugendtraum, in: Mathematical developments arising from Hilbert's problems, AMS (1976), 401-418.

[L2] *R.P. Langlands*, On the zeta function of some simple Shimura varieties, Can. J. Math. **31** (1979), 1121-1216.

[L3] *R.P. Langlands*, Les débuts d'une formule des traces stable, Publ. Math. de l'Univ. Paris VII **13**, Paris 1983.

[MS1] *J. Milne, K. Shih*, Langlands's Construction of the Taniyama group, in: Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties, LNM **900**, Berlin-Heidelberg-New York 1982.

[MS2] *J. Milne, K. Shih*, Conjugates of Shimura varieties, in: Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties, LNM **900**, Berlin-Heidelberg-New York 1982.

[Me] *W. Messing*, The crystals associated to Barsotti-Tate groups, LNM **264**, Berlin-Heidelberg-New York 1972.

[Mu1] *D. Mumford*, Abelian Varieties, Oxford 1970.

[Mu2] *D. Mumford*, Geometric Invariant Theory, Berlin-Heidelberg-New York 1965.

[Sa] *N. Saavedra*, Catégories tannakiennes, LNM **265**, Berlin-Heidelberg-New York 1972.

[Se1] *J.P. Serre*, Cohomologie galoisienne, LNM **5**, Berlin-Heidelberg-New York 1965.

[Se2] *J.P. Serre*, Abelian l-adic representations and elliptic curves, New York-Amsterdam 1968.

[SeTa] *J.P. Serre, J. Tate*, Good reduction of abelian varieties, Ann. Math. **88** (1968), 492-517.

[Sh] *D. Shelstad*, Characters and inner forms of a quasisplit group over $\mathbf{R}$, Comp. Math. **39** (1979), 11-45.

[T] *J. Tits*, Reductive groups over local fields, in: Automorphic Forms, Representations and L-Functions, AMS 1979.

[Z1] *T. Zink*, Isogenieklassen von Punkten von Shimuramannigfaltigkeiten mit Werten in einem endlichen Körper, Math. Nachr. **112** (1983), 103-124.

[Z2] *T. Zink*, Über die schlechte Reduktion einiger Shimuramannigfaltigkeiten, Comp. Math. **45** (1981), 15-107.