MATEMATİK VE MATEMATİKÇİLER: TARİHİ TASVIRLER

veya

MATEMATİKTEN SAYFALAR

Robert Langlands tarafından verilmiş konferans dizisi

Birinci kısım

Haziran, 2003, Yıldız Teknik Üniversitesi

Açıklama. Belki bildiğiniz gibi bir deney olmak üzere buraya gelerek Türkçe konuşup ders vermek istedim. Davetiniz için çok teşekkür ederim. Tecrübeme göre bir kimse bir dil öğrenmek isterse, matematik hakkinda konuşması en etkili bir usuldur. Yani konuşacağını iyi hazırlayarak ders verirken hiç durmadan konuşabilir. Hiç kimse sözünü kesemez.

Dinleyicilere ya sabır çekmek lazım gelebilir. Bu derslerde olacağını bilmem. Her halde, ilk derslerde, soru hemen soracağınız yerde dersin sonunu bekleyerek benimle o zaman konuşmanız daha iyi olur.

Otuz yıl evvel bu ülkede bir yıl geçirdim, ama o zaman dili az öğrendim. Bir iki yıldan beri dille uğraşıyorum ama konuşma fırsatım az oldu. Amerika'nın sesini dinleyebiliyordum. Fakat konuşma tecrübem yok!

Türkçe gerçekten öğreneyim diye ülkenize dönmeye karar verip, Cihan Saçlıoğlu'na yazdığımda, taşrada konuşmamı önerdim, fakat O Istanbul veya Ankara'da olsun dedi. Öyle ise, siz Kars'da başlasaydım, daha iyi olurdu diye düşünürsenız, suçu Cihan'a atabilirsiniz.

Sonra anlatacaklarımın çoğu matematik olacak, ama başta farklı şeyler nakledeceğim. Söylemimin kötü olduğundan veya yazdığım ibarelerde her türlü hata bulunduğundan, söyleyeceğimi belki anlamayacaksiniz. Önceden her şeyi yazdığımdan, uygun ise, konuşurken size metni gösterebilirim. Ne var ki, başlamamızdan evvel ciddi bir uyarma lazımdır. Açıklamak isteyeceğim kadar Türkçe hâkimiyetim yok! Dolayısıyla beni dinlemek zor olacak.

Malzemenin basit olduğunu vurguluyorum. Dolayısıyla tecrübeli olmayan öğrencilere uygun. Kimse anlamazsa, benim kusurum olur.

Yazarken sözlüğü kullandım, hatta matematikte tanımlanmış kavramlar için. Matematik kelime hazinesinin devamlı değiştiğini sanıyorum. Yanlış kelime kullanırsam, onu hemen düzeltmeniz daha iyi olur.

Tekrarlayayım, başlıca amacım Türkçe ögrenmek oldu, ama dersleri hazırlarken içeriğe, özellikle eski Yunan matematiğine, hayran kaldım. Tabii, hazırlanmaya başlarken bir çok merak ettiğim vardı ama Öklid'in Öğeler'inde bulunduğunu keşfederken, o zamandaki düşünürlerin bilimde ve felsefede meydana getirdiği katkıları yavaş yavaş takdir etmeye başlıyorum. Yeni anlayışımı, az bile olsa, size aktarma umudundayım. Siz, evvelce matematik ustalarının yazılarını okumaya düşkün olmadınızsa bile, belki beni dinledikten sonra onları okumak isteyeceksiniz.

Ben ise Öklid'in, Dekart'ın veya Gauss'ın yazılarına dalarak matematikçi olmak için fazla olgunlaştım. Yazık ki, daha gençken, bunu çok az yaptım.

Her ders için, iki saat öngörülmüş. Benim o kadar konuşabileceğim belli değil. Sizin beni o kadar dinleyebileceğiniz de belli değil. Bu iki saatın ikiye bölünmesini öneririm. Elli beş dakika konuşacağım, ondan sonra duracağım. Bir az dinlenerek, elli beş dakika daha devam edip etmiyeceğimize karar vereceğiz.

Önsöz

Öklid'in yazdığı geometrinin Öğeler'i kitap veya cüz denilen onüç kısımdan ibarettir. Içeriği basit değil. Tabii basit, kolay ispatlanan teoremler var. Biz Öklid gibi teorem değil önerme deriz. Ama aynı zamanda Öğeler'de önermeler kadar mantıki yapı önemlidir. Önermelerin bilimsel düzeyi de çok yüksek. Özellikle son cüzlerdeki ispatladığı iddialarda eski Yunanlıların matematik ustalığı yansıyor.

Farklı sebeplerden, farklı amaçlarla Öğeler okunabilir. Evvela, bugünlere kadar süren ve çağdaş fizikle matematikte önemli olan kavramların başlangıcının temelleri birinci cüzde atılmıştır. Ondokuzuncu yüzyılın başından beri geometrinin merkezinde bulunan eğrilik kavramı bu cüzdeki basit görünen önermeler arasında saklanıyor. Yani cüzün otuzikinci önermesinde üçgendeki üç dahili açının toplamının π'ye eşit olduğu iddia edilir. Bugünkü kavram kullanılırsa, bu özellik Öklid'in geometrisinin düz, eğriliğinin sıfır olduğunu ifade eder.

Iki binden fazla yıldan sonra, yirminci yüzyılda **Einstein**'in genel izafiyet teorisinin önerilmesi ve kanıtlanmasıyla, herkes yaşadığımız uzayın eğri olduğunu anlayabilir. Einstein fiziğin özüne nüfuz etmesi yanı sıra bizi azımi ile sebatına da hayran bırakır. "Eşdeğerlik ilkesi"ni keşfedince, durmamış, önceden bilinen matematik kavramlarını arayıp, onları geliştirmiş, temel fiziksel kavramlara uygulayacağı bir düzeye getirmişti.

Einstein'in başarısına imkan veren ilerlemelerin kökleri Fransız devriminden önceki yıllarda, yani geç Avrupa Aydinlanmasında bulunur, ama 18. yüzyılın sonu ile 19. yüzyılın başlarında Gauss'ın meydana getirdiği iki fikir sayesinde Einstein uygun kavramları el altında bulmuştur. Bu iki fikir belki aynı fikirin iki tarafıdır. Yani bir yandan, aynı dönemde yaşayan fen adamlarıyla filozoflara karşı Gauss bulunduğumuz uzayın düz olmadığını tasavvur edebilmiş, öte yandan, yerden yere değişen eğrilikten bahsetmek için gerekli yöntemleri ortaya koymuştur.

Gauss ile Einstein arasında çok çarpıcı başka bir Alman matematikçi ve fen adamı, Bernhard **Riemann**, çeşitli matematik alanlarına önemli katkılar yaptı. Özellikle, O Gauss'ın iki fikrini Einstein'in kullanabileceği şekilde geliştirdi. Bu üç bilim adamını, onların kişiliğini, fikirlerini daha iyi tanıma, daha iyi anlama büyük zihnî keyiftir. Aynı zamanda, üçünün yaşadıkları dönem, Almanya'nın parlak bilim dönemiyle rastlaşmıştır. Gauss geç Aydınlanma döneminde doğdu ama Napoléon'ü ve Napoléon sonrasıdaki yeni kurulmuş Alman devletlerini gördü. Riemann, Almanya'da, Napoléon savaşları sonrasıdaki

"Biedermeier" denilen dönemin zihnî ve ahlaki toprağında yetişmiştir. Bismarck döneminden evvel ölerek, Almanya'nın sanayisini geliştirip zenginleşerek büyük devlet olduğunu görmedi.

Diğer taraftan, Einstein, çok açıdan isyankâr olmasına rağmen, bu dönemin bir çocuğu idi ve niteliklerinden birçoğu ortamı tarafından belirlendi. O Alman Imparatorluğunun Birinci ile Ikinci Dünya Savaşındaki inişi ile yıkımını ve sonraları Alman entellektuel şanının sönmesini gördü. Bu dönemin de, bu şanının da şimdi bitmiş olmasına rağmen, matematiklerinin anısı, katkıları durur. Geçmişi merak edersek, biz, bu üç düşünürün bilimsel eserlerini okuyunca, dönemin ustalığına hayran kalarak, çok çabalamaksizin ustalarının yaşadıkları çevrede, yaşadıkları ülkede, kişilikleriyle tanışabiliriz.

Ama Gauss'tan Einstein'e kadar akan büyük nehirin kaynağına karışan iki irmak var. Öklid ve genellikle, Gauss'a kadar her matematikçi ve her filozof için, uzayda, bilhassa düzlemde, her yer aynıdır. Buradaki yer ile oradaki yer aynı özelliklere sahiptir. Gauss mesaha memuru olarak birkaç ay mesaha ederek Braunschweig'ta yolculuk yaptı. Belki bunun dolayısıyla arzdaki yerlerin hep aynı olmadığını takdir etti. Dağlar ovalara veya derelere benzemiyorlar.

O zaman da, bugün de bunu ifade etmek için, koordinatlar lazımdır, yani geometrinin cebirle ifade edilmesi lazım. Cebir çerçevesinde yapılan geometriye "kartezyen" geometri denilir. Tabii kartezyen geometrinin gelişimi **Dekart** tarafından pek çok etkilenmiştir, ama herkesin inandığının tersine Dekart kendisi bizim anlamımızda koordinat kullanmadı. Bununla beraber, usta bir matematikçi olarak, Dekart ünlü eseri, "*Discours de la méthode*"'a, bir ilâve olarak, "*La géométrie*" başlıklı metinde, cebir kullanılmazsa çok zor olan geometrik veya, eski sözü kullanırsak, hendesî önermelerin cebir ile nasıl çözüleceğini gösterdi. Bu metni, hiç olmazsa baş kısmını, anlatmak oldukça kolay. Anlatınca, Dekart'ın matematik yeteneğini değerlendirebileceğiz.

Ama Dekart matematikçiden daha çok filozof ve fen adamı olarak önemli idi. Onu tanıyıp anlamak istersek, yalnız matematiğe kattığı fikirleri değil, felsefeyle fene ne kattığını da bilmeliyiz. Hepsinden ziyade, 16. yüzyıl ile 17. yüzyılın başı boyunca süren Avrupadaki dinsel savaşlar ile, 17. yüzyılın ikinci yarısından ve 18. yüzyılın sonuna kadar süren Aydınlanma döneminin arasındaki orta yerde alan geçiş simasıdır. Yazdığı pek çok mektuplari okuyunca, öncelleri veya kendi kuşağı ile ilgilerini anlayabiliriz, belki o bilimsel devrenin dokusu ile yapısına girebiliriz. Özellikle, Eflâtun gibi Dekart matematik kabiliyetli ve matematikte etkili olan bir filozof idi. Biz bugün bunun gibi bir etkinin mümkün olabileceğine inanmıyoruz. Bu iki simanın etkisinin nasıl meydana geldiğini anlamaya uğraşabiliriz, Tam anlamaya asla ermiyeceğiz, ama teşebbüs edince, zanaatımızın etrafındaki zihnî veya entellektuel derinliğini daha iyi değerlendirebiliriz.

Resmedeceğimiz üç dönem olacak: eski Yunanlı dönem; burada Yeniçağ denilen döneme denk düşen geç Rönesansle erken Aydınlanma dönemleri arasındaki yıllar; ve Fransız devriminden sonraki, şimdiye kadar süren çağ. Bu dizi için, ikinci dönemin en önemli siması Dekart olacak. Tabii, üçüncu dönemde üç önemli sima olacak, yani, Gauss, Riemann ve Einstein. Bu üç kişiyi filozof sayarsak, konumuz olan üç dönemden matematik yönünden ikisinin felsefe tarafından çok etkilenmiş olduğunu düşünebiliriz. Ben, Gauss ile Riemann'ın bazı yazılarının düşünce tarihinde en önemli olaylar arasında olduğu inancındayım. Einstein'in filozof olduğuna herkes elbette inanıyor.

Ikinci döneme ait dizimde konuşulacak en önemli yazı Dekart'ın ünlü metni *La géométrie* olacak. Üçüncü döneme ait en önemli incelenecek makaleleri de hemen verebilirim:

• Carl-Friedrich Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas.

Ama ilaveten mektuplarıyla kendisi için yazdığı notları yani Gauss'ın zamanında belki pusulalar denilen yazıları incelememiz gerekecek, özellikle hiperbolik geometri üzerine fikirlerini anlatmak istersek.

• Bernhard Riemann, Ueber die Hypothesen, welche die Geometrie zu Grunde liegen,

• ——, Commentatio mathematica, qua respondere tentatur questioni ab III$^{\text{ma}}$ propositae.

Einstein'in ilk makalelerinden daha kolay okunan ve fizikçi olmayanlar için Einstein kendisi tarafından yazılan iki risale bana çok faydalı oldu.

• Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie.

• Grundzüge der Relativitätstheorie

Matematikte de, üstelik mantıkta da usta olduğu halde, bildiğim kadar Öklid filozof değilmiş. Eflatun'un adını henüz andığımız halde, Öklid'in döneminde matematikte felsefenin etkisinin varolup varolmadığını, Hankel fonksiyonları dolayısıyla babasının adını tanıdığımız 34 yaşında genç ölmüş Hermann Hankel'ın sözlerinden yine öğrenebiliriz.

Die Verbindung philosophischer und mathematischer Productivität, wie wir sie ausser in Platon wohl nur noch in Pythagoras, Descartes, Leibniz vorfinden, hat der Mathematik immer die schönsten Früchte gebracht.

Bir yabancı dil konuşan Türklerden belki yüzde doksanı Almanca konuştukları halde, bu cümleyi çevireyim.

Eflatun dışında, yalnız Pitagor, Dekart ve Leibniz'ta bulunan filozof ile matematik verimliliğinin birleştirilmesi matematiğe her zaman en güzel mahsulleri verdi.

Ne var ki, biz bu görüşü tam kabul etmeyiz, zira bize göre Gauss, ya da Riemann ile Einstein da, filozoflar. Hankel, elbette Einstein'i tanımamış belki Riemann'ı da tanımamış ama en azından Gauss'ın ismini kuşkusuz tanımıştı. Fakat Gauss hem o zaman hem bugün matematikçi, astronom, veya fizikçi olmak üzere ünlüydü. Tabii, bu başka üç alanda kadar O felsefede önemli değil, fakat Öklidyen olmayan geometri hakkında düşünceleri sayesinde, filozof olmak üzere da ona itibar etmeliyiz.

Cümlede başka kabul edemeyip anlamadığımız iddialar bulunuyor. Mesela Pitagor'un kim olduğu şimdi tarihçiler ve filologlar arasında tartışılan bir konudur. Bazılarına göre tamamen dini bir sima olmuştur, başkalarına göre, matematiğe önemli katkılar yapmıştı. Bu iki açı iki kitapta ileri sürülmüş. Birinciden iki baskısı, ilk olarak Almanca yazılmış, ondan sonra Ingilizceye çevrilmiş yayımlamıştır.

Kitabı yazan ünlü Alman tarihçi, Walther Burkert'in iki baskısının arasında görüşlerini değiştirdiğinden, iki kitabın da okunması lazım. Yakında çok okunan bir dergide onun Pitagor'un söylencesini, en azından söylencenin bilimsel kısmını, tamamen imha ettiğini okudum. Yani, bildiğiniz gibi, Pitagor hakkında her türlü hikâye var, Mısır'a gitmiş, irrasyonel veya adını taşayan teoremi keşfedince kurban etmiş. Bu hikâyelerin ardında ne gerçekliğin olduğu bilinmez. Dergideki makale Burkert'in söylenceyi imha ettiğini iddia etmesine rağmen, makaleyi okuduğumdan bir iki ay sonra çalıştığım Enstitü'deki bilim tarihi hakkında bir konferans dinleyince, Pitagor'in geleneğinin tamamen söylence olmadığını öğrendim. Bir Rus tarihçi, Leyonid Şımud, tarafından ünün eski haline getirildiğini öğrendim. Kitabı Rusça olarak yayımlamış ama Almanca tercümesi da var.

• Walter Burkert: (a) Weisheit und Wissenschaft, (b) Lore and Science in Ancient Pythagoreanism.

• Л. Жмуд: В раннем Пифагореисме

Biz bu kısa dizide bu kitaplarda ne anlatıldığını incelemeyeceğiz, ama gelecek yılda onları okuyup anlamamdan sonra, daha uzun bir dizide onlara gene geleceğiz.

Anlaşılan, mesleğimizin tarihini anlamak istersek, Pitagor'un kim olduğundan, etrafında ne keşfedildiğinden veya eski zamanda matematik ile felsefe arasında ne bağlar olduğundan tam bihaber kalamayız.

Fakat uzman olmayanların uzmanların tartışmasını yakından izlemesi kolay değil. Pek az mevcut belge var. Onları okumak için, eski Yunanca öğrenmek lazım. Istersem belki sabırla gittikçe okuyarak öğrenebilirim. Öğrenmemin mümkün olmasına rağmen, öğrensem bile, belgelerin içerdiği malumatı – yani olguları – değerlendiremem. Uzmanların yazılarını okuyunca, temel bilgiye sahip olmadığımı anladım. Hankel'e göre Pitagor ile Eflatun eski Yunanlı dönemde matematikte çok etkiliymişler. Hatta matematiğe katkıda bulunmuşlar. Bugünkü uzmanlara inanırsak, Pitagor'un ne yaptığı o kadar belli değil. Ama yazılarını okuyunca daha önemlisini hemen anlıyoruz. Kendinin fikirlerini anlatarak, Eflatun öncellerinin felsefesini yorumlayıp anlatmış. Özellikle zaman zaman Eflatun'un yazılarında Pitagor söz konusudur. Eflatun'un peşinden giderek, tilmizleri, yani öğrencileri veya taraftarı kendinin fikirlerini Pitagor'a atfetmişler. Dolayısıyla sonradan çok belgede rastlanan Pitagor hakkında hikâyelerin tarihi temelleri yok. Edebi nedenle, daha kandırıcı olmak için, kendi düşüncelerini Pitagor'un ağzında koymuşlardır.

Elbette, Pitagor'un kim olduğunu, ne yaptığını anlamak çok zor olacaktı, Eflatun'un kim olduğunu, ne yazdığını anlamak ise daha kolay. Istersek her yazısını yazılmış şekilde veya çevrilmiş şekilde okuyabiliriz. Tabii, bildiğiniz gibi, o çok yazdı. Gerçekten, Eflatun'un bütün yazılarının her açıdan çok faydalı olmasına rağmen, matematikçiler hepsini okumak elbette istemez. Ilkönce yüzeysel de olsa matematiğe ait metinleri ile fikirlerini biraz tanımak lazım.

Eflatun yaklaşık milattan 400 yıl önce yaşadığı ve Öklid yaklaşık milattan 300 yıl önce yaşadığı halde, Eflatun'un matematikte ne bilebildiğini bilmek istersek, ilk aşama olarak, Öklid'in Öğeler'ini inceleyebiliriz.

Eflatun ve Eflatuncularla ilgimiz yoksa bile, Öğeler, yalnız matematik açısından olsa, inandığımızdan daha zengindir. Maceralı bir sefer olarak, bazı bölümlerini anlatacağım. Anlatacağımdan sonra Eflatun'un yazılarıyla veya Pitagor ile Pitagorcularla nasıl ilişkili olduklarını soracağız.*

Ilkönce Öğeler'ın birinci cüzünde bulunan eğrilik kavramına ait olan önermeleri inceleyeceğiz. önermeleri ile ispatlarını kısmen hemen anlayacağız ama bazının manasını yalnız sonradan Öklidyen olmayan geometrinin gelişmesini inceleyip anlayınca takdir edebileceğiz.

Eflatun'un yazıları arasında bulunan Θεαιτήτος ile Τίμαιος adlı kitapların her ikisi önemli ilgilendiğimiz malzeme içerir. Theaetetus, Eflatun'dan biraz genç olan bir matematikçi imiş. Özellikle irrasyonel üzerine önemli kavramları ile teoremleri keşfetti. Thaetetus Theodorus'un talebesi idi. Eflatun'un Theaetetus adlı tartışmasında Sokrat Theaetetus ve Theodorus'la tartışırken, O Theaetetus'un kareköklerin dizisini nasıl keşfettiğini anlattiğini nakleder. Theodorus kendisi ilk köklerin, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, irrasyonel olduğunu ispatlamıştı. Ama Eflatun'un metnine göre ve herkesin kabul ettiği gibi, genel teorem Theaetetus tarafından keşfedilmiş. Her kare olmayan tam sayının karekökü irrasyonel olur, mesela $\sqrt{17}$.

Meğer Theaetetus yalnız bu teorem değil, irrasyoneller hakkında onuncu cüzde gelistirilen genel teorinin içerdiği kavramları da keşfetmiş.

Tabii Theaetetus ve Timaeus adlı kitabların konusu yalnız matematik değil. Heracleitus (M. E. 500) ve Parmenides (yaklaşık M. E. 420) gibi eski filozofların peşinden giderek, Eflatun da evrenin hem yapısını hem de oluşmasını anlatmak istemişti. Ya da genel olarak değişimi anlatmak istemişti. Mesela evrenin toprak, hava, ateş ile sudan ibaret olduğunu sanarak, havanın nasıl ateşe değiştiğini veya toprağın nasıl sudan hâsıl olduğunu anlatmaya uğraşıyordu. Muntazam üç boyutlu cisimlerın niteliklerini kullanarak, çok güzel bir teori geliştiriyordu. Öklid'in onüçüncü cüzünde bu üç boyutlu cisimler inşa edilip nitelikleri incelenir. Bu inşanın irrasyonel sayıların teorisiyle sıkı bir ilgisi var. Inşaya ait teori kısmen Theaetus tarafından geliştirilmişti. Öklid'in onüçüncü cüzünde bütün teori meydana konulmuş. Eflatun'un resmettiği evrenin çok güzel olmasına rağmen, Eflatun'un kosmologisinden, üç boyutlu cisimlere ait ve Öklid'in Öğeler'ında bulunan kavramlar ile iddialar çağdaş bilime daha yakındır. Yani, Öğeler'de bulunan teoriyi biz bugün bile faydayla

*Ben bu dersleri hazırlayıp verirken görüşlerim daha çaplı olurdu. Kaynakları eski Yunan matematikte bulunan ve bugüne kadar matematiğin ana fikirleri olan en az iki ilke var, bir tarafta, düzlemin ve uzamın niteliklerini belirleyen eğrilik, öbür tarafta geometriyi cebirle ve özellikle irrasyonel sayilarla bağlayan kavramlar veya ilişkiler. Başladığımda bu ilkelerden yalnız birisinin yüzyıllar boyunca gelişmesini nakletmek istedim. Fakat Öğeler'i inceleyip. Eflatun'un matematiği nasıl etkilediğini anlamaya uğraşırken, diğer ilkenin eskiden ve zamanımızda ne kadar önemli olduğunu gittikçe takdir ettim. Ben Öğeler'i okuyunca Öklid'in sunduğu anlatmalarının çağdaş matematik metin okunur gibi okunup ispatlarını tetkik edilmesi lazım olduğunun farkına vardım. Bu yeni görüşlerimin metnimde ifade edilmesine henüz tamamen kavuşmadım.

inceleyebiliriz.

Her halde biz evvela Öğeler'ın onuncu ile on üçüncü cüzünde bulunan teoremleri sunacağız. Zaman kalırsa, ondan sonra Eflatun'un resmettiği evreni ziyaret edeceğiz.

Kendi hayatımla başlayacağımı beklemezdiniz, ama Einstein'i Öklid'le bağlayan ve zevkle hatırladığım anılarım var. Müsaadenizle, bu matematikte başlangıçlarıma ait anılarla başlayayım. Ilkönce, üniversiteye kaydolduğum zamandaki durumumu resmedeyim. Türkçem bu işe yetmediği için, sizin hiç bir şey anlamamaniz muhtemel. Uzun bir hikâye nakletmemden sonra, Einstein ile Öklid'e geleceğiz.

İkinci Dünya Savaşından hemen sonra, Kuzey Amerika'da, bilhassa Kanada'da, büyük merkezlerin dışındaki ortam kuşkusuz hepinizce bilinmez. Ailemin savaştan sonra taşındığı yer köy değildi. Belki kasaba denilebilecek bir yerdi, ama yine de kasaba kadar büyük değildi. En önemli özelliği olarak, kira bedeli ucuz olan çok ev vardı. Avrupalılar, başlıca İngiltere, İskoçya, veya İrlanda'dan göçenler, 19.yüzyılın sonu ile 20. yüzyılın başında o bölgeye gelip, yerleştiklerinde, yüzyıllarca orada yaşamış olan yerliler çiçek hastalığı salgınlarında öldüklerinden, çok ucuz satın alınabilecek arsalar varmış. Kıyıda olduğundan, merkezden uzak olmadığından, çok hünersizce çerden çöpten yapılmış, ucuz kiralanacak tatil evleri kasabada bulunurdu. Bu sebepten, az paralı, ya da fakir aileler, yaşlı insanlar, boşanmış veya başka nedenden kocasız ama çocuklu olan kadınlar orada yaşıyorlardı. Tabii oldukça olağan görünen aileler de vardı. Onların neden orada bulunduklarını, ya da, özellikle, saf çocuksu gözlerimde tamamen olağan görünen kendi ailemin ne sebepten oraya geldiğini yalnız çok sonradan, bir yetişkin olarak, sordum.

Oradaki orta okulda ile lise gibi okulda yedi yıl geçirdim. Başka öğrenciler beklenen nitelikteydi, bazen oldukça iyi, bazen oldukça ahmak. Ben, onların çoğundan daha gençtim, onlardan çok etkilenerek, buluğa erdim, okulda hiç zihinsel coşkuya kapılmadım, hiç bir şey öğrenmedim. Öğretmenlerin de her türlüsü vardı. Bazi adamakıllı yetersiz, başkaları dürüst ve yeterli eğitmenlerdi. Ama ben budalaca bir isyankarlıkla, hiç kimseden bir şey öğrenmek istemezdim. Şükür ki, okuldaki son iki yılımda, genç, her öğrenci tarafından sevilen ve İngilizce edebiyata hayran olan bir öğretmen geldi. O, bana o zamana kadar hiç bir şey öğrenmemiş olduğumu açıkça anlattı, ama üniversiteye kaydolmazsam yazık olur diye, beni sıkıştırdı. Belki ergenliğimin en zor yılları zaten bitmişti. Hemen heyecana kapıldım, sınavlar için çalıştım, çok başarılı olup burs kazandım. Böylece, daha on yedi yaşında değilken, yüksek tasarılarla dolu olarak, üniversiteye vardım.

Annem, hakkımdaki sıkıntıları ile endişeleri hafifleyerek, kuşkusuz mutlu olmuştu. Ama o benim nelere ve ne kadar kapılmiş olduğumu bilemezdi. Benim ise telafi edeceğim yedi yıl vardı. Sabırsızdım, çaplı bir sahnede rol alacağımın hayaline kapılmama rağmen, hiç tecrübem olmadığından bir öngörülen mesleğim, gerçek tasarılarım hiç yoktu. Matematikte yeteneğim vardı ve, belki Einstein sayesinde, bazı matematikçiler ile fizikçilerin sadece ün değil, ama entellektüel, hatta ahlaki şan kazandığını biliyordum. Her halde, üniversiteye vardığımdan kisa zaman sonra, yaşadığimiz yerin yakınında bulunan nüfusu belki yirmi bin olan gerçek bir kasabada, kitapçının, aslında kırtasiyecinin vitrininin önünden geçerken, parlak portakal rengi kabı olan kalın, "Albert Einstein: Philosopher-Scientist" adlı bir kitaba gözüm takıldı. Oldukça pahalı idi, ama on yedinci doğum günüm yaklaşıyordu ve adetimiz üzere hediye bekleyebiliyordum. Kitabı diledim. Annem ciddi, hic olmazsa zararsız şeylere ilgi gösterdiğimden o kadar memnun idi ki kitabı satın alıp, bana verdi.

Tabii, hiç bir şey anlamadım, ama kitapta Einstein'in yazdığı ve zihni oluşmasını nakleden makale bulunuyordu, hem Einstein'in Almanca metni hem de Ingilizce çevirisi. Einstein'in ne yazdığına bakalım. Amerika onu benimsemesine, Einstein'in kendisi Almanya'yı reddetmesine rağmen, o Wilhelm'in Imparatorluğunun bir ürünü idi. Bence, hayatının sonuna kadar bu devirle memleketin davranışlarını kaybetmemiş, hem yaşam tarzını, hem de düşünme tarzını onlardan miras almıştı. Meramını Almanca anlatmayı yeğlemişti. Bu nedenden, kendi sözlerini vereyim.

“Im Alter von 12 Jahren erlebte ich ein zweites Wunder ganz verschiedener Art: An einem Buchlein über Euklidische Geometrie der Ebene, das ich am Anfang eines Schuljahres in die Hand bekam. Da waren Aussagen wie z. B. das Sich-Schneiden der drei Höhen eines Dreieckes in einem Punkt, die – obwohl an sich keineswegs evident – doch mit solcher Sicherheit bewiesen werden konnten, dass ein Zweifel ausgeschlossen zu sein schien. Diese Klarheit und Sicherheit machte einen unbeschreiblichen Eindruck auf mich. Dass die Axiome unbewiesen hinzunehmen waren beunruhigte mich nicht. Ueberhaupt genügte es mir vollkommen, wenn ich Beweise auf solche Sätze stützen konnte, deren Gültigkeit mir nicht zweifelhaft erschien. Ich erinnere mich beispielsweise, dass mir der pythagoräische Satz von einem Onkel mitgeteilt wurde, bevor ich das heilige Geometrie-Buchlein in die Hand bekam. Nach harter Mühe gelang es mir, diesen Satz auf Grund der Aehnlichkeit von Dreiecken zu“beweisen”; dabei erschien es mir “evident”, dass die Verhältnisse der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks durch einen der spitzen Winkel völlig bestimmt sein müsse. Nur was nicht in ähnlicher Weise ”evident’ erschien, schien mir überhaupt eines Beweises zu bedürfen. Auch schienen mir die Gegenstände, von denen die Geometrie handelt, nicht von anderer Art zu sein als die Gegenstände der sinnlichen Wahrnehmung,“die man sehen und greifen könnte.” Diese primitive Auffassung, welche wohl auch der bekannten Kant'schen Fragestellung betreffend die Möglichkeit “synthetischer” Urteile a priori zugrundeliegt, beruht natürlich darauf, dass diese Beziehung jener geometrischen Begriffe zu Gegenständen der Erfahrung (fester Stab, Strecke, etc) unbewusst gegenwärtig war.”

Yeniden, çevirisini verebilirim.

On iki yaşında ikinci ve tamamen farklı bir harika gördum; bir okul yılının başında elime geçen düzlem geometri üzerine küçük kitaptan. Bazı orada bulunan iddialar, mesela üçgenin üc yüksekliğinin bir noktada kesişmesi, hiç aşıkar olmamasına rağmen, o kadar kesinlikle ispatlanabilmiş ki kuşku kalmamıştı. Bu kesinlik, bu açıklık bende ifade edilemez bir intiba bıraktı. Aksiyomlarin ispatsız alınması huzurumu kaçırmadı. Bana şüphesiz görünen iddialara dayanan ispatlar bulabilmekten tamamen memnun oldum. Mesela kutsal kıtabın elime geçmesınden evvel, Pitagor'un teoremini bana bir amcamın anlattığını hatırlıyorum. Birbirine benzer üçgenler kullanarak bu teoremi çok çabalayarak ispatlayabildim. Teoremi öyle ispatlarken bana dik açılı üçgenin yanlarının oranının bir dar açi tarafından belir-

lendiği aşıkar görünmüştü. Bence ispat, yalnız böyle belli olmayan şeyler için lazımdı. Bence geometriye konu olan şeylerle görüp dokunduğunuz nesneler tamamen benzerdi. Bu ilkel anlayış önsel sentetik hüküm üzerine Kant'ın ünlü sorunun temellerinden biridir. Tabii anlayışımın kaynağı her geometrik kavramın – ölçü değneği, aralık filan – deneyli bir nesneye ait olduğunun bilinçsiz farkında olmuştum.

Einstein'in otobiyografisinin hepsinin okunmasi çok faydalı olacağı halde, biz bu tek bir bentten çok öğrenebiliriz. Öklid'le başlayarak, biz Einstein'e kadar varmak istiyoruz. Yani eğrilik kavramının Öklid'de nasıl meydana çıkıp, ve iki bin üç yıl sonra, Einstein'in genel izafiyet teorisinde nasıl kullanıldığını anlamak istiyorum. Otobiyografisinda Einstein eğrilikten söz etmez. Gerçekten, Einstein'in andığı teorem Öklid'de bulunmaz. Sağlamasını biz sonra hatırlayacağız, ama önce Abraham Pais'in güzel ve çok yararlı "*Subtle is the Lord*" başlıklı Einstein'in biyografisinde bulunan bazı ayrıntıları hatırlayayım.

Einstein, çok genç yaştan beri, Jakob Einstein adlı amcasının teşviğinden faydalandı. Özellikle, amcası on yaşındaki çocuğun çözeceği matematik önermeler verdi. Bu yüzden hatırladığı geometri kitabını hediye olarak aldığı zamanda, yalnız on iki yaşında olmasına rağmen Einstein oldukça tecrübeli küçük bir matematikçiydi. Fakat abartmamalıyız.

Pais'in kitabına göre, aldığı kitap, 1867 yılında yayınlanmış, iki Almanyalı Heis ile Eschweiler tarafından yazılan "Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauch an höheren Lehranstalten" idi. Bu kitap hâlâ bazı kütüphanelerde bulunur. Gördüm. çok güzel. Öklid'in geometrisi hakkında olmasına rağmen, bazı kitapta bulunan teoremler Öklid'de bulunmaz. Ya Öklid'dan sonra keşfedildiğinden, ya bazen sadece Öklid tarafından atlandığından. Einstein'in dikkatını çeken teorem şüphesiz eski Yunanlılarca bilinmişti, ama bizim belki sonra anlatacağımız sebepten Öklid tarafından toplanılmamış.

Bazı temel teoremler daha amcadan öğrenmiş olan Einstein kitapın içerdiği malzemeyi anlayıp değerlendirebiliyordu. Belli olmayan, beklemedik, zorla ispatlayacak teoremlere büyülendi. Einstein otobiyografısında kendisini çarpan bir teorem anlatır. Üçgene ait olduğundan, onu anlatacağımızdan evvel biz bazı üçgene ait tanımlamalar ve kavramlar hatırlayacağız.

Aynı zamanda, Öklid'in Öğeler'ının yapısını ve Öklid'e önemli görünen kavramları inceleyebiliriz. Öğeler'ı yazdığı zaman Öklid'in on iki yaşında olduğunu inanamıyoruz. Teoremin güzelliği veya çarpıcılığı Öklid için en önemli niteliğı muhtemel olmamış. Bilakis, geometrinin temel ilkelerini korup sağlamak istedi. Hic olmazsa, bana şöyle görünür.

Birinci cüzde, kara cahil çocuğun bile gözüne çarpan geometrik çizimler var. Mesela tam başta, beğendiğim her öğrenciye tanınmış çizimler bulunur. Dokuzuncu önermede bir açının iki eşit açıya nasıl bölünmesi anlatılmış (Şekil I). Onuncu önermede, bir doğru çizginin ikiye bölünür (Şekil II). Onikinci önermede, bir noktadan bu noktayı içermeyen bir doğru çizgiye bu çizgile dik açı yapan başka çizgi çizilmiş (Şekil III). Acaba, bu teoremler, her ne kadar güzel olmalarına rağmen, Einstein'in ölçütüne uyar mı. Yani çabalayıp düşünmeden çizimlerin önermeleri çözdüğü hemen bellidir.

Ünlü Pitagor'un teoremi kırkyedinci önermesi olarak birinci cüzde bulunur. Cüzün tam son önermesinde, yani kırksekizincide, Pitagor'un niteliğine sahip olan üçgenin dik açılı olmasını ispatlanır. Okulda öğrendiğimiz gibi, Pitagor adlı teorem dik açılı üçgenin hipotenüsündeki karenin başka kenarlardaki karelerin toplamına eşit olmasını iddia eder.

Hatırlarına göre, Einstein, amcasının bu teoremi kendisine anlattığından sonra, çok çabalamadan sonra ispatını arayıp buldu. Böylece, bu iddia ölçütüne uyduğunu sanabiliyoruz. Otobiyografisinde Einstein'in anlattığı gibi, keşfettiği ispatta birbirine benzer olan üçgenlerin nitelikleri uygulandı.

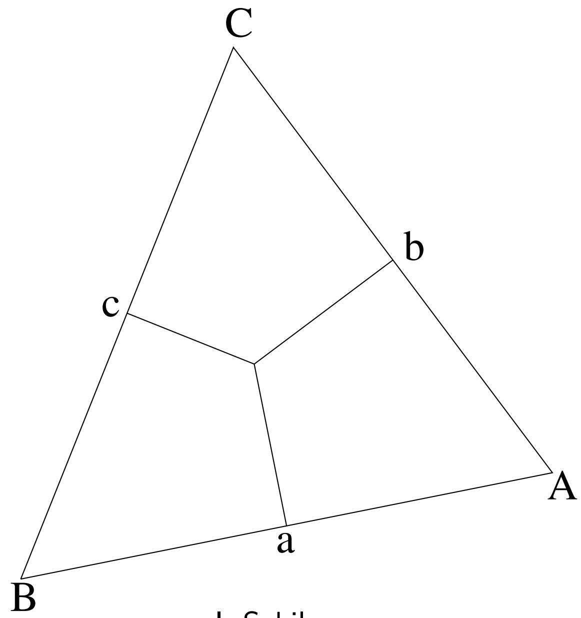
Birinci cüzdeki otuzikinci önermeyi ispatlamak için Öklid ünlü beşinci önermeyi uygulamış. Sonrada biz bu önermeyi Öklid'in anlattığı şekilde izah edeceğiz. Birinci cüzde önerme en azından iki defa uygulanır. Mesela her üçgenin üç iç açının toplamının π-ye eşit olmasını ispatlamak için, ama Pitagor'un teoremi de onunla ispatlanır. Dolayısıyla, Pitagor'un teoremi birbirine benzer olan üçgenlerin teorisiyle ispatlanabilirse, bu teori beşinci önermeye dayanmalı.

Fakat genç Einstein'e göre, belki herkese göre, şekilde aynı olan – veya benzer – üçgenlerin teorisi sade ve belli. Öklid'ce, bilakis, o kadar belli değil. çocuklar için, genel olarak sokaktaki adam için, matematik asıl ilkelerin ölçek değişmez olması bellidir. Ibaremin muhtemel yanlış olduğundan, ne demek istediğimi siz belki anlamıyorsunuz. Başka sözlerle tekrarlayım. Şekillerini değiştirmeden ama boyları ile arasındaki uzaklıklarını aynı oranda büyüterek, bir takım nesnelerin yerine başka bir takım geçirirsek, arasındaki matematik veya fiziksel ilgiler değişmez. Ilk Yunanlı matematikçiler ile filozoflar için bu niteliğin aşikâr olduğu halde, meğer Öklid için aşikâr olmamış. Büyütmeye veya ölçeğe ait kavramlari ve teoremleri o hemen uygulamamıştı. Özellikle Pitagor'un teoremini ispatlarken başka yöntemi uyguladı. Aynı şekilde olan geometrik şekilleri ortaya koymasından önce Öklid Öğeler'ın beşinci cüzünde Evdoksus'un (Ingilizce Eudoxus) oran teorisini anlatıyor. Ardından altıncı cüzde benzer üçgenlere ve başka benzer geometrik şekillere ait teoriyi geliştirdi.

Hatırladığınız gibi ölçek değişmezliği ilkeleri, düzlemin veya uzayın düz olduğuna bağlıdır. Dolayısıyla düzlemin düz olması herkesin çocukluğundan beri inandığı hatta bildiğini zannettiği olguların bir sonucudur. Böylece Öklid'i inceleyince, ben Kant'ın sorununu yavaş yavaş anlamaya başlıyorum. Belki bu yolda devam ederek, 18. yüzyıldaki filozoflar arasında yaşadığımız uzay hakkındaki tartışmaları daha iyi anlayabilirim. Gauss bu tartışmanın gerçekten farkında idi. Sonuçta tartışmayı o halletmiştir bile.

Gauss'ın fikirlerine geldiğimizde, bir üçgenin iç açılarının toplamının π'ye eşit olmasının sonucunun veya hatta bunun mümkün olmasının 18. yüzyılındaki filozoflar ile matematikçileri şaşırttığını göreceğiz. Bizi de belki şaşırtacaktı, çünkü genel olarak toplamı π-ye eşit değilse, ölçek değişmezliği geçerli değil, yanlış olur, ve üçgenlerin nitelikleri garip görünür. Bu beş konferansda, Gauss'a, Öklidyen olmayan geometriye de gelmeyeceğiz. Bu dizide üçgenlerin nitelikleri ile paralel önermesi arasındaki bağlantıları anlatacağız. Bildiğim kadar bu bağlantılar Eflatun'un veya başka filozofların yazılarında bulunmuyor. Neden, bilmiyorum. Belki, Eflatun'dan sonra keşfedildiklerinden, belki hem Eflatun hem de halefleri önermenin önemini anlamamışlardı da ondan. Bu sorunun neden 18. yüzyılda o kadar ilgiyle karşılandığı bana hâlâ belli değil.

Yazdıgım gibi, amcasının Einstein'a verdiği kitap Öklid'in Öğeler'ı değilmiş, başka, eğitimsel yönden daha kolay kitapmiş. Fakat genç olduğum zaman ben bunu bilmıyordum. On alti yaşında ortaokulda hatta okulun son yıllarında âdeta hiç bir şey oğrenmemiş ama matematikçi veya fizikçi olacağım diye, karar vermiş delikanlı olarak, Einstein'in otobiyografisini okuduğumda, baştan başlayım diye, Öğeler'ı okumak istiyordum.



I. Şekil

O zaman çok ucuz ve bazı çok faydalı olan bir kitap dizisi Kanada'daki her kitabevinde bulunuyordu, yani, Everyman's Library adlı dizi. Öklid'in Öğeler'ı da bu dizideydi. Everyman's baskısı için Öklid'in Öğeler'ının ünlü yorumcusu Thomas Heath bir önsöz yazdı, ama ucuz olan baskı ne yazık ki bu tefsirini içermıyordu. Önsözünde Heath yazar ki

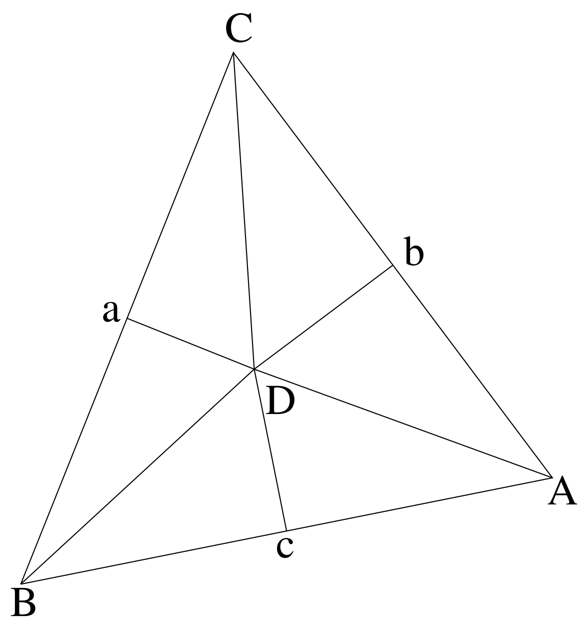
" *The only general criticism of it which is deserving of consideration is that it is unsuitable as a textbook for very young boys and girls who are just beginning to learn the first things about geometry"*

Kitap hakkında genel yönden yapabilecek ve önemli olan tek bir eleştiri var. Geometriyi ilk defa olarak öğrenen çok gençöğrencilere uygun değil.

Maalesef, satın aldığım ucuz baskıyı okuyamadım. O zaman, matematik ögrenmeye başladığımda, Öğeler'i tek başıma okumak benim için fazla zor idi. Hemen okumaktan vazgeçtim. Olağan universite derslerini izleyip, Öklid geometrisini değil, daha kolay olan düzlemdeki ya da uzaydaki koordinat geometriyi öğrendim. Yıllardan sonra tecrübeli matematikçi olarak, Öğeler'e döndüm, ama sade baskısına değil, Heath kendisinin tefsir ettiği baskıya. Ancak yorumlarını okuduğumda, genç olduğum zamanda onu anlamadığımın nedenini anladım. Matematik ile felsefe yönünden, Öğeler çok derindir. Çok genç olarak, Einstein bazı önermeleri, sadece çözecek muammalar olarak, çok güzel, çok çekici buldu. Ama Öklid'in amacı sık sık teoremlerin sunulması değil, aksine temel matematik ve mantiki yapıyı anlatmak istedi.

Özellikle, birinci cüzde, Einstein'in genel izafiyet teorisine ait olan paralel önermesi ile önermenin sonuçladığı teoremler bulunur. Sade ama çok önemli ve eğrilik kavramına ait olan otuzikinci önerme Öklid'i Einstein'le bağlıyor. Üçgenin üç iç açının toplamının iki dik açıya eşit olması iddia edilir. Biz Öklid'in bu teoremi nasıl ispatladığını anlatacağız.

Sade bir önerme olarak, biz şimdi genç yaşında aldığı kitapta Einstein'i çarpan teoremi ispatlayalım. Herhangi bir üçgende, bir kenarına ve karşıdaki zirvesine bakalım. Bu zirveden kenarına dik açı yapan doğru çizgi yüksekliği adlanır. Belli ki üç yükseklik var. Einstein'i çarpan teorem bu üç çizgi bir noktada kesişmesini iddia eder. Amcasının verdiği kitaptaki gibi, biz Öklid'de bulunan önermeleri kullanarak onu ispatlayacağız.



II. Şekil

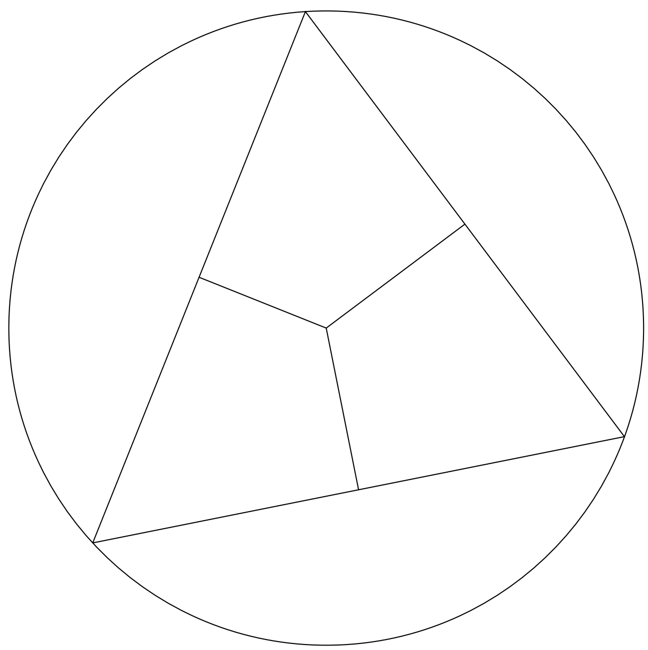
İlk önce başka bir teoreme bakalım. Şekilde gibi (I. Şekil veya II. Şekil) ABC bir üçgen olsun. AB kenarının orta noktası c noktası olsun, BC kenarının orta noktası a, ve CA kenarında b. Üç çizgi çizeceğiz. Mesela AB kenarını c noktasında kesen ve bu kenara dik olarak çizgiyi çizelim. Üç kenardan her birisi bir çizgiyi belirtiyor. Bu üç doğru çizgi bir noktada kesişir. Yani şekilde a noktasından ve c noktasından geçen çizgiler D noktasında kesişsinler. c noktasındaki iki açı birbirine eşit olduğundan, AD ile BD aralığının uzunlukları birbirine eşittir. Aynı sebepten BD ile CD aralığının uzunlukları birbirine eşittir. Böylece AD uzunluğu CD uzunluğuna eşittir. Dolayısıyla üçüncü, b noktasından geçen çizgi D noktasından da geçer. Dolayısıyla üç çizilmiş çizginin hepsi D'den geçer.

Henüz ispatladıgımız iddia Einstein'i çarpan teoreme benzer ama ondan daha kolaydır. Merkezi D noktası olan ve her üç noktadan geçen bir çember çizilebildiğine dikkatinizi çekiyorum (III. Şekil). Dördüncü cüzünde beşinci önerme olarak bu iddiaya benzer olan bir teorem Öğeler'de bulunur.

IV. Cüzdeki 5. Önerme. Verilmiş bir üçgenin etrafına çemberin çizilmesi.

Daha zor olan teorem IV. Şekilde görülüyor. Onu ispatlamak için yeni bir üçgen çizmeliyi z. Bu adım kuşkusuz Einstein'e göre beklenmedik idi, dolayısıyla ispata çok hayran oldu.

Yeni üçgen V. Şekilde gösteriliyor. Mesela A noktasından geçen ve Aa yüksekliğine dik olan çizgi IH çiziliyor. Üç çizgiyi böyle çizerek, biz GHI üçgenini elde eder. Ilk teoremi uygulamak için AI ile AH aralıklarının birbirine eşit olmasını gösteririz. Aynı yöntemle, BI ile BG'nın birbirine eşit ve CG ile CH'nin birbirine eşit olmasını gösterebileceğiz. O zaman ispatladığımız teoremi GHI üçgenine uygularsak, üç çizdiğimiz, A, B ve C noktasından geçen çizginin bir noktada kesiştiğı görürüz.



III. Şekil

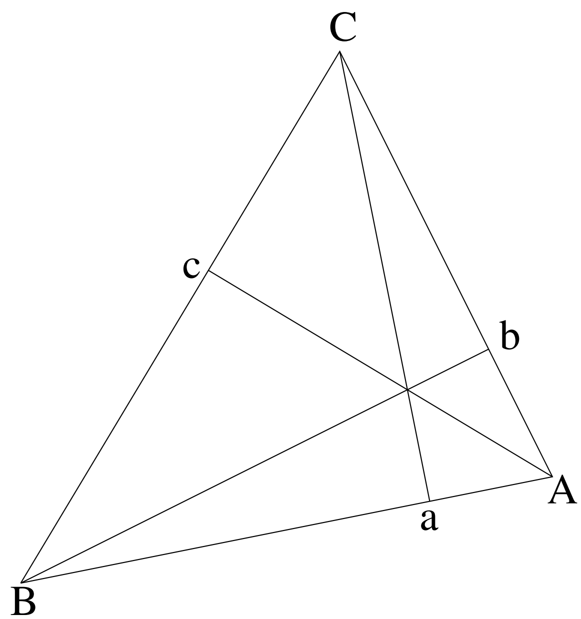
AI ile AH aralığının birbirine eşit olduğunu ispatlayalım. BC ile AH eşittir, çünkü BA ile GH ve BC ile AH paraleldirler. Yani, $CBAH$ şekli paralelkenardır. Benzer sebepten IA'nın boyu BC'nin boyuna eşittir. Böyle, iki boyu IA ile AH birbirine eşit olur. Ayni sebepten GC ile CH veya GB ile BI birbirine eşit olur.

Bu ispatta gerçekten beklemedik ve çok zevkli özellikler var!

Öklid'in Öğeler'i

Şimdiye kadar uzun dizimde konuların ne olacağını anlattım. Bundan fazla, çocuk olarak Einstein'in Öklidyen geometride neye hayran olduğunu ögrendik. Şimdi birinci konuya gelerek, Öğeler'e döneceğiz.

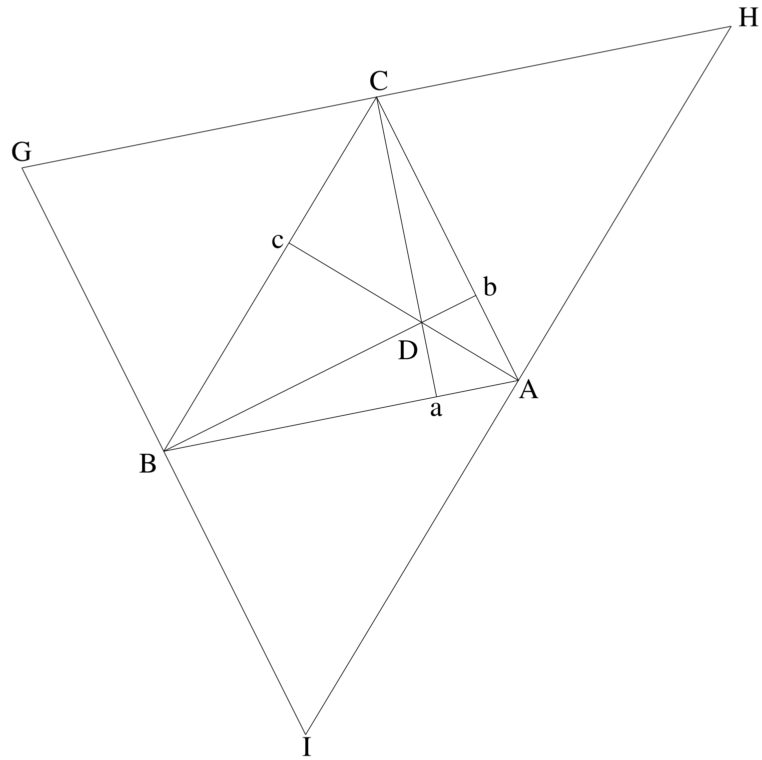
Başlamamızdan evvel vurgulayacağım bir şey var. Yani İstanbul'a vardığım gün buradaki iyi tanımadığım meslektaşa rastladım. "Bize matematikte yeni gelişmeleri nakledeceksiniz" diye, bana nezaket gösterdi. Dinlediğiniz gibi, anlatacağım şeyler hiç yeni olmayacak. Amacım tam başkadır. Öklid'in, Dekart'ın, Gauss'ın veya Riemann'ın yazılarının içerdiği fikirler ile kavramlar yeni değil, ama hepimize, gençlere veya deneyimli matematekçilere, faydalıdır. Bu önemli dört düşünürlerin yarattığı alanlara, farklı düzeyde olsa bile, hepimiz yaklaşabiliriz. Bazen yaklaşarak, beklediğimizden çok daha fazla öğreniriz. Bu konuların güzelliğiyle ya da nihayetsizliğiyle karşı karşıya bulunduğumuzda, biz hepimiz aynı durumdayız. Bu durumda bugün yaygın olan, "Yeni mi?", "çoktanberi bilinmiş mi?" soruları artık önemli değil. Kısa bir zaman için olsa, biz hepimiz bu ortak bilgilere sahip olduğumuzu takdir ederken, birbirimize eşit olduğumuzu da kabul ediyoruz.



IV. Şekil

Öğeler'de bulunan üç konuyu ele alacağız. Birincisi ilk cüzinde bulunan paralel belite ait geometrik kuramlar. Bu kuramların kökleri eski Yunanlı matematikte bulunur, bilhassa M. Ö. altıncı veya beşinci yüzyılda ügenin niteliklerinin keşfedilmesine aittir. Tembel olarak, çok düşünmeden matematikçiler ile tarihçiler sık sık bu zamanki matematiği Pitagor'a atfediyor. Haberdar iseler Pitagor'u değil, etkilediği düsünürleri kasteder. Habersiz isek, biz kolayca aldatılırız. Gerçekten, o zamanda oluşan matematiğin tarihi anlatmak zordur. Gerceğı efsanelerden ayırmak çok zor hatta olanaksız. Kendimizi saf görüşlerden kurtarmak istersek, ilk önce o yıllardaki matematiğin erişdiği düzeyi bilmemiz gerektir. Eski matematikçiler, kendi yazılardan tanımıyoruz. Mesela Pitagor'u, kendi yazılardan değil, Eflatun ile Aristo'nun yazılarından tanıtılıyoruz. Be nedenle matematik tarihini anlamak istersek bu iki filozofun bildikleri matematik tanımamız özellikle önemlidir. Onlar matematikle çok ilgilenmiştir ve matematikçiler ile yakın ilişkileri varmış. Öklid'in onlardan sonra Mısırlı Iskenderiye'de yaşamasına ve Öğeler'inin o zamandaki matematiği tamamen içermemesine rağmen, biz Öğeler'inden pek çok Eflatun'u etkileyen matematik öğrenebiliriz.

Pitagor hakkında görüşlerimiz Eflatun ile tilmizlerinden* ya da yeni Eflatunculardan aldığımız halde, Eflatun'un kendi yazılarda bulunan en güzel bentler eğriliğe veya paralel çizgilere ait değil, irrasyonel sayılara ve muntazam cisimlere aittir. Dolayısıyla Öğeler'inin son cüzde tek bir konu olarak yer alan muntazam cisimler teorisi üçüncü konumuz olacak. Bugün gibi, Öklid için irrasyonel sayılar ile muntazam cisimlerin ilişkisi hayli önemlidir. Bu ilişkiyi Öklid'in kavramlarına uygun çerçevede oluşturmak için biz ilk önce eski Yunanlı matematikçilerin oluşturduğu ve hayli derin olan geometrik cebiri anlatacağız.



V. Şekil

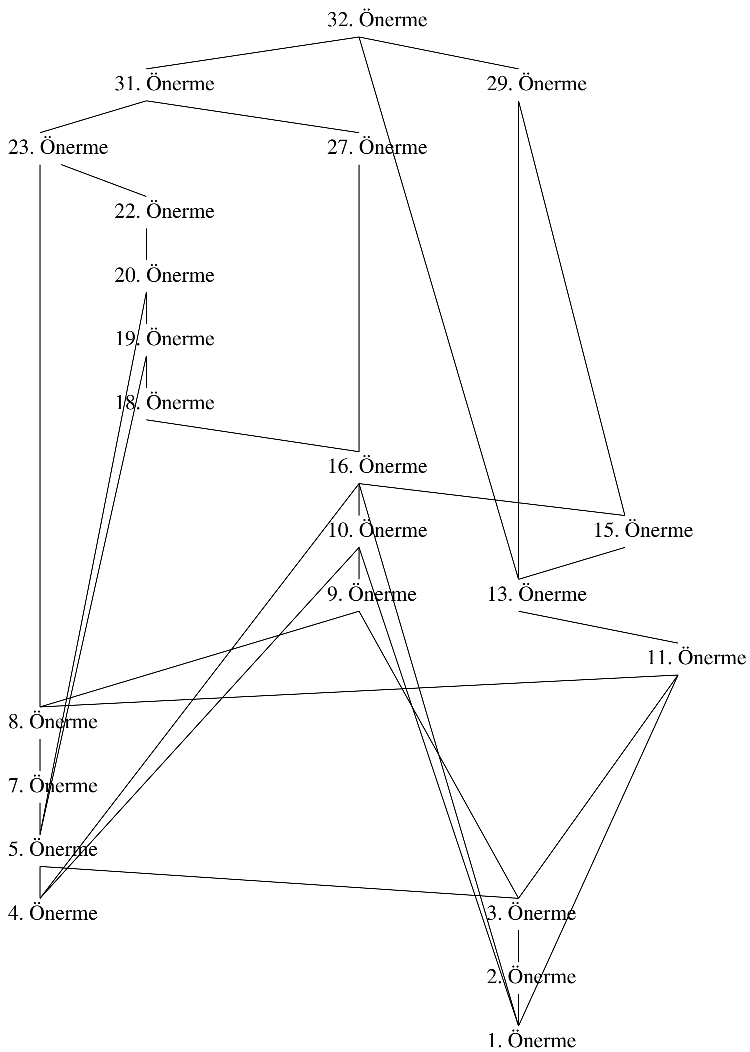
Üçgenler ile eğrilik

Iki tam farklı sebepten dolayı, bu dersler için otuzikinci önerme önemlidir. Önerme bir üçgenin üç iç açısının toplamı iki dik açıya, yani π'ye eşitliğini iddia eder. Hepsinden ziyade, önerme Öğeler'ın eğriliğe ait içerdiği bilginin özüdür. Bundan fazla önermenin köklerinin ilk Yunanlı matematikte bulunduğundan, onu inceleyerek biz hem eski matematiğin ne olduğunu, hem eski matematikçilerin kim olduğunu daha iyi anlayabiliriz.

*Yani talebelerinden, fakat bence bu eski söz onların arasındaki iliskilerini daha iyi ifade eder.

I. Cüzdeki 32. Önerme. Her hangi bir üçgende, bir kenarı uzatılırsa, bir dış açısı, kendisine komşu olmayan iki iç açısının toplamına eşit olur, ve üç iç açısının toplamı iki dik açıya eşittir.

Heath'in tabısında ya da Everyman tabısında her önermenin ispatında uygulanan ve önceden anlatılan önermeler işaret edilir. Dolayısıyla ispatın düzeni, ya da bazı yönden kitabın yapışı, kolay anlaşılır. Bir şekil (VI. Şekil) ile otuzikinci önermenin ispatının öncedeki önermelere nasıl dayandığını anlatabiliriz.



VI. Şekil

Şekildeki ikinci dizide 32. önermenin tam altında bulunun 29. önerme, paralel önermesini doğrudan kullanan tek bir önermedir. Biz önermeyi henüz vermememize rağmen, önermenin Öklidyen geometride birbirine paralel olan doğru çizgilerin varolduğunu iddia ettiğini hemen söylebiliriz.

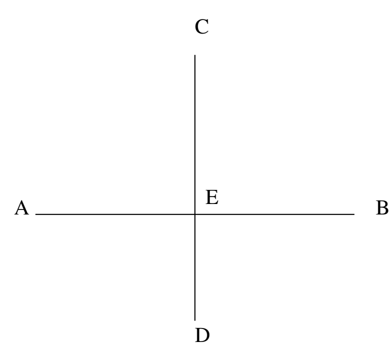
Öklid'den Einstein'a götüren yolu izlemek istersek, onsekizinci yüzyıldaki keşfedilen ve paralel önermesi ile eğriliği bağlıyan teoremleri inceleyeceğiz. Önceden Öklid'in Öğeler'inde paralel önermesi ile eğrilik arasındaki ilgi üzerinde ne bulunduğunu sorarız.

Öklid'in yazdığına bakmamızdan evvel, bazı Heath'in verdiği diğer ispatlara bakalım. Ilk vereceğimiz ispatlar son yüzyıllarda tarihçilerin önerdiği fakat eski belgelerde belki varolmayan ispatlardır. Göreceğimiz gibi, bu ispatlarda Öklid'in yaptığı kadar ihtimam edilmemiş. Galiba ilk matematikçiler Einstein'in çocuk iken ispatlar aradığında yaptığı gibi, onları çevreleyen uzaydan saf ve bilinçsiz anlayışlarına destekliyorlarmuştu.

Ama önemli bir özellik var. Matematiğin başlangıçlarının izleri farklı ülkede bulunuyor fakat bizim tanıyıp en çok değer verdiğimiz bilimin bu bölgede, daha çok kesinlikle Iyonya'da, milâttan önce altıncı yüzyılda başladığı anlaşılan matematiğin veya felsefenin eski dini ortamdan nasıl ortaya çıktığını bilemeyez. O çağda yaşayan insanların nasıl yaşadığını, nasıl düşündüğünü elbette kavramaya uğraşabiliriz ama asla bilemeyiz.

Bu son cümleyi buraya gelip ilk dersleri vermemden evvel yazdım. Açıkçası şimdi cümlenin cahilce bir görüşü ifade ettiğinden şüpheleniyorum. Belki bu dönemin mevcut olan izlerini iyi tanıyanlar o zamandaki insanlar nasıl yaşadığını iyi biliyorlar. Her halde derslerin içeriği üzerine düşününce, benim cehaletimin belki herkesin cehaleti olmadığını fark ettim.

Matematiğin başlangıçına bağlı olan iki iyi tanınmış ad var, yani muhtemelen milattan önce altıncı yüzyılın başinda yaşayan Thales ve milattan önce 570'den 500'e kadar yaşayan Pitagor. Bu tarihler sahih olamaz, ama bu iki simanın o yüzyılda yaşadıklarından ve Tales'in Pitagordan önce doğduğundan kuşku yok. Biz Pitagor'un ne olduğu sorununa sonra döneceğiz. Matematikçi olsaydı bile dini sima olarak daha önemli idi.



VII. Şekil

Pitagor hakkında çok az bilinir, ama Pitagorcular denilen tilmizleri varmış. Pitagorcuların bilimsel faaliyetlerinin pek çok izleri var. Oysa Tales Pitagordan gözümüzden daha saklanmış bir şahsiyet. Benim tanıdığım bir tarihçiye göre, "Tales onlara zaruri olduğu için çağdaş alimlerın uydurduğu eski filozofdur".

Eski dinin etkisinde bulunan kişinin sade matematik şeyleri, mesela üçgenleri, dörtgenleri, küçük sayıları nasıl gördüğünü, onların onun için hangi esrarlı niteliklere sahip olduğunu belki bilemeyiz. Elbette tarihçilerin önerdikleri ispatlar ilkel geometrik şekiller üzerine düşünceye dalmış olan bir kişi tarafından keşfedilebilirdi. Halbuki, niye o zamanda bir kimse bir şeklin önünde şekil üzerine düşünceye dalıyordu, bilemeyiz.

Gerçekten hepimiz bildiğimiz gibi, bazen hatta geçen on yılda keşfedilmiş ispat için, onu keşfeden matematikçinin onu nasıl bulduğunu anlamak mümkün değil.

Öklid için 180 mertebeye eşit olan açı bir açı değil, yani doğru çizgi tanımladığı açı bir açı değil. Birinci cüzdeki onuncu tanımlamada dik açılık tanımlanıyor. VII. Şekilde gibi, bir CD çizgisi başka bir AB çizgisini E noktasında kessin. CEA açısı CEB açısına eşit ise, iki açı dik açı denir. Dolayısıyla bazen açıların toplamı iki dik açıya eşit ise, biz toplamın 180 mertebeye eşit olduğunu diyoruz.

Heath'in verdiği ispatların yanı sıra şu yorumlar bulunuyor:

1) Anlaşılan Eutocius (M. S. 650) Geminus'un (M. E. 70) yazdıgı bir metne aktarıp yazmış ki

"Eskiler her türlü üçgenin iki dik açı içerdiğini incelemiş, ilk önce eşkenar üçgende, ondan sonra ikizkenar üçgende, ve nihayet kenarları birbirine eşit olmayan üçgende. Ardından genel teorem ispatlanmış."

Heath'in yazdığı gibi, Proclus'a göre (M. S. 450) Eudemus (M. E. 320) genel teoremi Pitagorculara hamletmiştır. Heath'e göre, Geminus'un atfattığı eskiler belki Tales devresinde (M. E. 600 civarında, ama Heath'e göre M. E. 624 - M. E. 547! Bazı tarihçiler bilemediğimiz tarihleri o kadar muhakkak nasıl ve neden verdiklerini bilmiyorum.) yaşayan hendesiciler veya hatta Mısırlılar olabilir. Öyle ise muhtemelen ardından genel teoremi ispatlayan Pitagorcular olmuş, yani Pitagor'ın (M. E. 570'ten 500'e kadar) muasırları veya ardından gelen (yaklaşık 450'e kadar) Pitagor okuluna veya mezhebine mensup olanlar. Bilemeyiz.

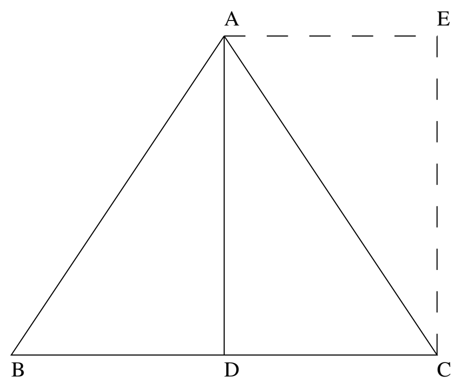
Hendesenin veya geometrinin gelişmesi hakkında yazan eski matematikler ve tarihçiler arasında bazı önemli kişi varmiş. Isimlerini ve yaşadıkları dönemi ezberden öğrenirsek, Heath'in yorumlamalarını izleyip daha iyi anlayacağız. Ilk olarak, Aristo'nun bir talebesi olan tarihçi Eudemus varmış. O Öklid'den bir az evvel yaşamıştı. Aslında Öğeler'ın ortaya çıktığına kadar geliştirilen geometri hakkında yazmış. Hem matematik hem de astronomi hakkında yazmıştı, ama bizi ilgilendiren yazı önemli Hendesenin Tarihi olacaktı. Maalesef bu yazı artık mevcut değil. Heath'e göre bu yazıda ne bulunduğunu, çok sonradan Proclus'un Öğeler üzerine yazdığı Tefsir'den ögreniyoruz. Heath'e göre Proclus M.S. 410'dan 485'e kadar yaşadı. Ilk tahsilini Mısırdaki Iskenderun'da görmüş. Ondan sonra Atinaya giderek, orada Yeni Eflatuncularla ögrenip kendisi Yeni Eflatuncu olmuş. Istersek mevcut olan tefsirini çevrilmiş şekilde bulabiliriz. Tercümesi yakında yayınlandı. Muhtemelen çok kütüphanede bulunuyor. Ben henüz okumadım.

Dediğim gibi, Geminus'un yaklaşık M. Ö. 70'in civarında yazdığı anlaşılır. Muhtemelen Rodos adında doğmuş Geminus astronomi üzerinde hâlâ mevcut olan bir eser ve matematik üzerinde ama bugün mevcut olmayan başka bir eser yazmış. Anlaşılan bu matematik yazıları çok tarihi bilgi içeriyormuş. Maalesef ne içerdiği yalnız çok sonraki yazıların (Pappus, hem de Proclus ile Eutocius ve sonradan bazı Arap tefsirci) metinlerinden bilinir.

Tales veya Pitagor hakkında rivayetler kuşkusuz tam doğru değil. Ne var ki bu dönemin gelişmelerini anlamak için, ilk önce onların tam yanlış olmadığını zannedip mana vermeye uğraşabiliriz. Her halde, aşağı yukarı hangi zamanda yaşadıklarını da ne yapabildiklerini de bilmeliyiz. Yoksa çok yanılır, bu çağda matematiğin veya bilimin nasıl oluştuğu hakkında biz hiçbir neticeye erişemeyiz.

Heath'in anlattığı gibi, mozaikle tecrübeleri sayesinde Mısırlılar bir nokta çevresini doldurmak için, altı eşkenar üçgenın, dört karenin, veya üç altıgenin kullanılmasının mümkün olduğunu anlamışlardı. Kenarları ve açıları birbirine eşit olan başka çokgenin bu amaçla kullanılmasının mümkün olmadığını da anlamışlardı. Sonucu olarak altı eşkenar üçgenin iç açısı dört karenin iç açısına eşittir. Bu yüzden eşkenar üçgenin üç açısının toplamı iki dik açıya eşittir. Biz eskilerin bu şekilde düşündüğüne inanabiliriz.

Bunu anlattığından sonra, Heath mümkün olan ve başka tarihçilerin eski ispat olarak önerdiği ispatı verir, ama kendisi önerinin o kadar inandırıcı olduğunu düşünmez. Her halde, ikizkenar üçgene bakalım. VIII. Şekilde görülüyor.

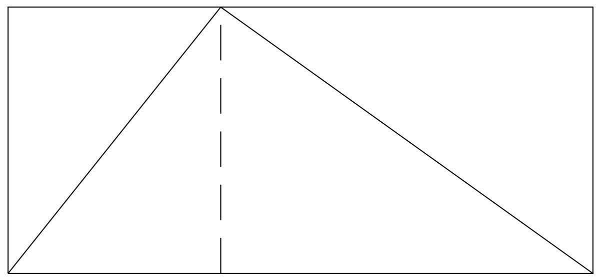


VIII. Şekil

ABC ikizkenar olsun. ABD üçgenine ait toplam (yani $\angle ABD + \angle BDA + \angle DAB$) ile ACD üçgenine ait toplamın (yani $\angle ADC + \angle DCA + \angle CAD$) toplamından ABC üçgenin açılarının toplamının iki dik açı eksiği var. Ama ABD üçgenin iç açılarının toplamı ACE açılarının toplamına eşittir. Elbette ADC ile AEC açılarının toplamı dört dik açıya eşittir. Bu sebepten ABC açılarının toplamı iki dik açıya eşittir. Genel iddiayi ispatlamak için IX. Şekilde bulunan şekli kullanabiliriz.

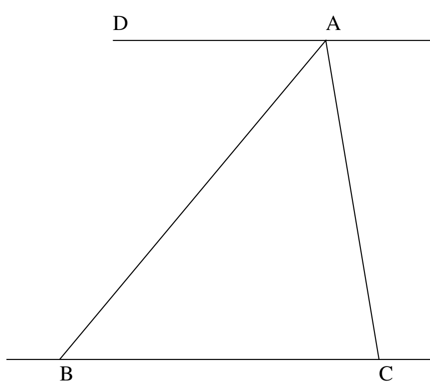
Her halde, istersek, böyle bir ispat kullanarak, iddianın doğru olduğuna kendimizi ikna edebiliriz. Ama önemli bir soru kalıyor. Ispatını aramamamızdan önce iddiayı keşfetmemiz lazım. Bu nasıl yapılabilir. Kendi tecrübemize bakarsak, herhangi ciddi bir matematik iddianın bulunması kolay değil. Eskiler niye genel iddialar arıyorlardı? Niye araştırmaya girişmişlerdi? Önce iddianın keşfedilmesi lazım ki sonra genel ispatı aranabilir. Bunun için onların üçgenlerle veya dörtgenlerle eğlenip oynamaları lazımdı. Bu anlattığımız yöntem iddiayı ispatlamadıysa, teoremi keşfetmeye yeterdi. Her halde ben kendi kendime matematik üzerinde düşünmeye başlamadım. Size de belki uygun cesaret veren ortam lazımdı, ama tek bir kere olsaydı bile bir kimse tek başına matematik hakkında düşünmeye başlardı. Fikrimi iyi anlatmıyorum, ama matematiğin başlangıçlarında esrarengiz bir şey vardı. Düşündüğümün ifade edilmesi kolay değil, ama bu noktada önemli ama meydana çıkarılamaz bir şey olduğunu hissediyorum.

Pitagorcuların belki keşfettiği ispat Heath'in yorumlarında bulunur. Bu ispat genel ve henüz anlatmadığımız Öklid'in ispatına benzerdir, ama onun mantığı Öklid'in mantığından daha az açıktır. Heath'e göre bu ispat Eudemus'un yazında bulunmuş. Proclus tarafından bize aktarılmış. Eski matematik hakkındaki bilgimizi araçlı ögrendiğimizi görüyoruz.



IX. Şekil

Öklid'in genel teoremi nasıl ispatladığını anlatmamızdan evvel, ona benzer muhtemelen Pitagorcuların olan ispatı anlatalım. X. Şekildeki resmi kullanıyoruz. ABC verilmiş üçgen olsun. DE doğru çizgisi A noktasından geçen ve BC doğru çizgisine paralel olan bir çizgi olsun. Öyle bir çizginin çizilebildiğini kabul ediyoruz. O zaman DAB, BAC, EAC açılarının toplamı iki dik açıya eşittir. Ama aynı zamanda, CBA açısı DAB açısına eşit, BCA açısı da EAC açısına eşittir.



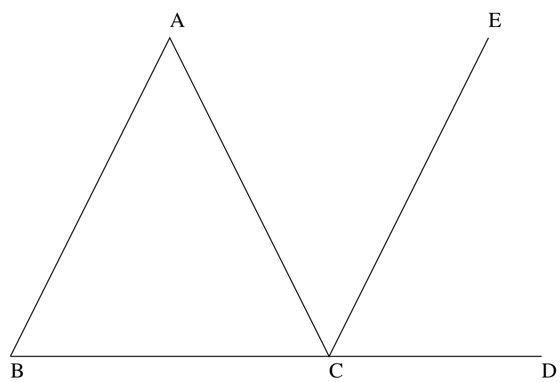
X. Şekil

Bu sezgili kavramamıza aşikâr olan iddiaları kullanan ispat Öklid'in ispatından çok farklı değil, ama Öklid iddialarının paralel önermesinin sonucu olmasının nedenini anlatıyor. Onun ispatı XI. Şekil'de gösteriliyor.

ABC verilmiş bir üçgen olsun. Biz yeniden bir verilmiş çizgiye paralel olan ve bir verilmiş noktadan geçen bir çizgi çizmeliyiz. Yani AB çizgisine paralel olarak CE çizgisini çizelim. Yirmidokuzuncu önermeye göre AC çizgisinin ikisi birbirine paralel olan AB ile CE çizgilerini kesiştiğinden içters durumlu BAC ile ACE açıları eşittir. Benzer sebepten, yani yirmidokuzuncu önermeye göre, BC çizgisinin aynı iki AB ile EC çizgisini kestiğinden iki açı yöndeş durumlu olduklarından ECD dış açısı ile ABC iç açısına eşittir.

ACE ile ECD açılarının toplamı ACD açisına eşit olduğundan, BAC ile CBA açılarının toplamı ACD açısına eşittir. $\angle BCA + \angle ACD$ toplamı iki dik açıya eşit olduğundan dolayı, BCA, BAC ve CBA üç açısının toplamı iki dik açıya eşittir.

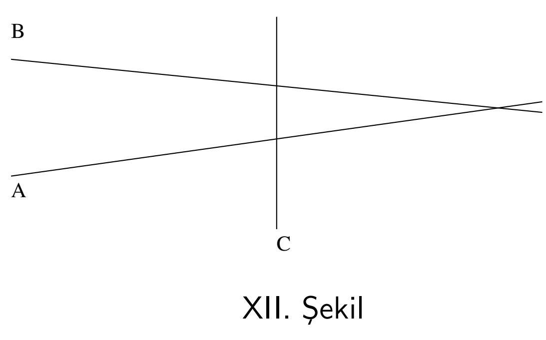
Gördüğümüz gibi, ispat bilhassa yirmidokuzuncu önermeye dayanıyor. Şimdiye kadar bu önermenin iddiasini kesinlikle vermedik. Bu iki paralel çizgiyi kesen bir çizgiyle ilgilidir.



XI. Şekil

I. Cüzdeki 29. Önerme Bir çizgi iki paralel çizgiyi keserse, iki içters durumlu açı eşittir, iki yöndeş durumlu açı eşittir, ve iki yanal durumlu açının toplamı iki dik açıya eşittir.

Bu iddianın ispatı ünlü beşinci önermeye dayanır. Bu önermenin gerçekten bir varsayım, veya isterseniz aksiyom, olduğu derin bir gözlemdi. Ne var ki, bildiğiniz gibi, ondokuzuncu yüzyıla kadar, bu önermenin neden lazım olduğu anlaşılmamış. Ancak sonrada, özellikle Gauss sözkonusu olurken, biz geçen üç yüzyılda, meydana gelen ilerlemeleri anlatacağız.



XII. Şekil

Ilk önce, önermeyi anlatayım. Bu önermenin çok önemli olduğu halde, hepiniz belki okulda öğrenmediniz. Böyle anlatılıyor.

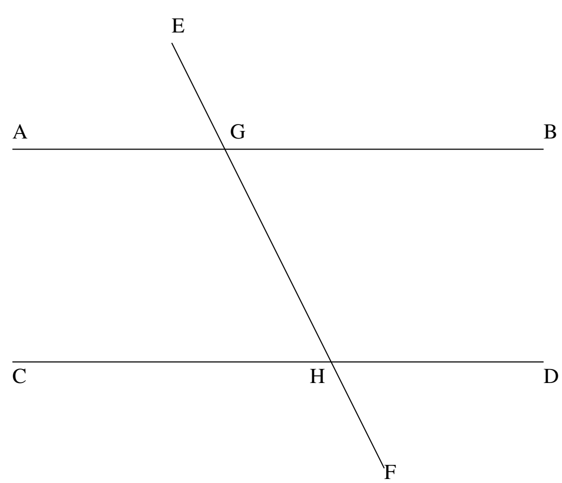
Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ᾿ντοὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ἐλάσσονας ποιῆ ἐκβαλλομένας τὰς δύο ε᾿θείας ἐπ ἐπ᾿ἄπειρον σφμπίπτειν, έφ᾿ἃ μέπη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

5. Postulat. Iki çizgi, bir çizgi ile kesiştirildiğinde, aynı tarafta olan iki iç açının toplamı iki dik açıdan küçük ise, bu iki çizginin aynı taraftaki uzuntıları kesişir.

Üç çizgi ile ikisinin uzatımları XII. Şekilde gösterilir. Bazen beşinci önermeye bir bedel olarak Playfair'in belidi, veya aksiyomu, kullanılıyor. Bugün bu aksiyom da, başka beşinci önermeye bedel olan aksiyomlar da belki Öklid'in beşinci önermesinden daha iyi tanınır. Ancak başta deyip, şimdi gösterdiğim gibi Öklid'in önermesi eğrilik kavramıya dolaysız aittir, belki başka yönden de daha derindir.

Playfair'ın aksiyomu. Verilmiş bir noktadan geçen ve verilmiş bir doğru çizgiye paralel olan yalnız bir çizgi çizilebilir.

Aksiyom ile önermeyi incelemekten evvel, yirmidokuzuncu önermenin beşinci önerme kullanılarak nasıl ispatlandığını anlatalım. (Maalesef, bu defa ne aksiyomun ne de önermenin incelenmesinin zamanı yok.) XIII. Şekli kullanacağız. Bu ispatın orta okulda kismen anlatılmasına rağmen, onda matematiğin bazı ana kavramlarının geliştirilmesini vurguluyorum.



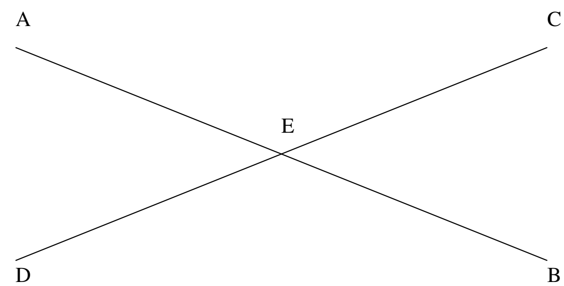
XIII. Şekil

Ispat onüçüncü önermeye dayanıyor, ama bu önerme oldukça kolaydır. Mesela AGH ile BGH açılarının toplumunun iki dik açıya eşit olmasını iddia eder. Her halde, şekilde EF doğru çizgisi AB ile CD doğru çizgisini kesir. Ilk olarak, AGH ile GHD içters açısı birbirine eşit olduğunu ispatlayalım. Birbirine eşit olmazlarsa, birisi başkasından daha büyük olur. AGH açısı daha büyük olsun. Her ikisine BGH açısı eklensin. AGH ile BGH açılarının toplamı iki dik açıya eşittir. Bu iddia onüçüncü önermenin sonuçudur, ama dediğim gibi, bu iddia oldukça bellidir. Böylece BGH ile GHD açılarının toplamı iki dik açıdan daha azdır. Dolayısıyla, beşinci önermeye göre iki çizginin uzatımları kesişirler. Bu iki çizginin paralel olduğundan, kesişmeleri mümkün değil. Binaenaleyh AGH ile GHD açısı birbirine eşittir.

AGH ile EGB açıları birbirine eşittir. Neden? Bu iddianın bize aşikâr olmasına rağmen, onbeşinci önerme olarak, Öklid onu ispatlıyor. Yani,

I. Cüzdeki 15. Önerme. Iki doğru çizgi kesişirlerse, ters açılar birbirine eşittir.

Bu iddianın ne dediği XIV. şekilden bellidir. AEC ile DEB açısı birbirine eşittir. Bunu ispatlamak için, Öklid onüçüncü önermenin sonucu olarak AEC ile AED açısının da, AED ile DEB açısının da toplamının iki dik açıya eşit olması sonucunu çıkarır. Dolayısıyla AEC ile DEB açısı birbirine eşittir.



XIV. Şekil

Bu ispatta biz Öklid'in başka bir önermesini uyguladık. Yani Öklid'e göre dik açı nedir. Başka bir doğru çizgiyle kesişen bir doğru çizgi iki birbirine eşit olan açı teşkil ederse, bu açılar dik adlanır. Dördüncü önermesine göre, her iki dik açı birbirine eşittir. Öğeler'de her kavramın tam belli olmamasına rağmen, bazı kavramlar kesinlikle ifade ediliyor. Bilhassa herkesin hemen kabul ettiği bazı kavramlar verilmiş. Bu meydanda olan kavramlar arasında, birincisi ile üçüncüsü şöyle ifade ediliyor.

1. Meydandaki kavram. Aynı nesneye eşit olan başka iki nesne birbirine eşittir.

3. Meydandaki kavram. Birbirine eşit olan nesneler birbirine eşit olan nesnelerden çıkarılsa sonuçları birbirine eşit olur.

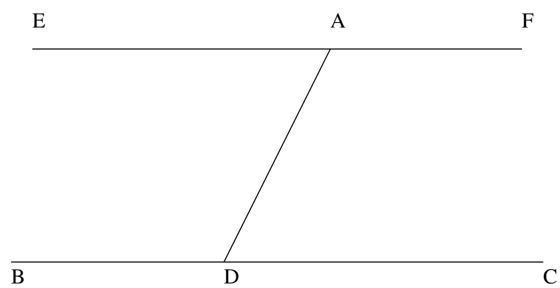
Biz otuzikinci önermenin ispatının yirmidokuzuncu önermeye nasıl dayandığını şimdi anlıyoruz. Yirmidokuzuncu önermenin onüçüncü ile onbeşinci önermelere nasıl dayandığını da anlattık. VI. şekile göre otuzikinci önermenin ispatınıtamamen anlamak için hem otuzbirinci önerme ile ispatının hem de kolay olan onüçüncü önermenin ispatının anlaşılması lazım. Fazla olarak yirmiüçüncü önermenin ispatının anlaşılması da lazım.

Onüçüncü önermenin çok öncedeki önermelere dayanmasına rağmen, otuzbirinci önermesinden daha kolaydır, ya da göreceğiz gibi bazı açıdan tam bellidir. Buna rağmen, sonra anlatacağız. Otuzbirinci önermenin ispatıyla başlıyoruz.

I. Cüzdeki 31. Önerme. *Verilmiş bir noktadan geçen ve verilmiş bir çizgiye paralel olan bir çizginin çizilmesi.*

Bu önermenin Playfair'ın aksiyomuyla ilişkili olması bellidir.

XV. Şekilde gibi verilmiş nokta A ve verilmiş çizgi BC olsunlar. D noktası BC doğru çizgisinde herhangi bir nokta olsun. Yirmiüçüncü önermede gösterildiği gibi, zirvesi A, bir kenarı AD, ve ADC açısına eşit olan bir açı DAE çizilsin. EF doğru çizgisi EA doğru çizgisinin uzatımı olsun. Yirmiyedinci önermeye göre, EAD ile ADC açıları birbirine eşit olduğundan, BC ile EF iki doğru çizgileri birbirine eşittir.



XV. Şekil

Yirmiyedinci önerme kısmen olarak yirmidokuzuncu önerme karşıtıdır.

I. Cüzdeki 27. Önerme. *Herhangi iki çizgi, bir çizgiyle kesildiğinde meydana gelen içters durumlu açılar eşit ise, iki çizgi paraleldir.*

Yirmiüçüncü önermeyi aynı zamanda verelim.

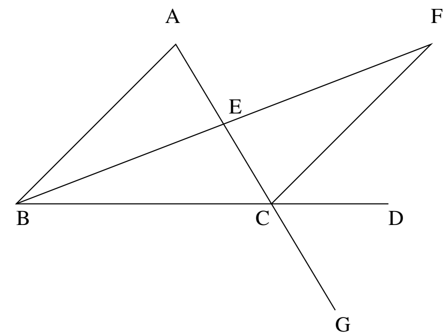
IV. Cüzdeki 23. Önerme. *Verilen bir çizginin üzerindeki herhangi bir noktadan, verilen bir açıya eşit açı çizmesi.*

Isterseniz kendiniz bu önermenin Öğeler'de bulunan ispatını okuyabilirsiniz. O kadar zaman olmadığından, biz yalnız yirmi yedinci önermenin ispatı inceleriz. Bu ispatta genel üçgenin önemli hususiyeti uygulanmış. Sonrada anlatacağımız gibi, bazı iddialar Öklid'in geometrisinin küresel olmadığının sonucudur, bazı da hiperbolik olmadığının sonucudur. Öklidyen geometrinin küresel olmadığından yirmiyedinci önerme doğrudur. Oysa beşinci önerme dolayısıyla Öklid'in geometrisi hiperbolik değil.

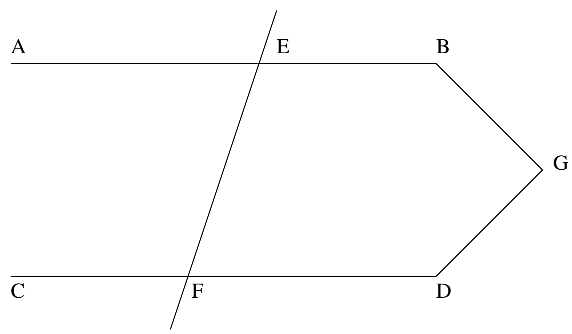
Yirmiyedinci önerme Öklid'in geometrisinin küresel olmadığını ifade eden onaltıncı önermeye dayanmış.

IV. Cüzdeki 16. Önerme. *Herhangi bir üçgende, bir kenar uzatıldığında oluşan dış açı, komşu olmayan iç açılardan daha büyüktür.*

Bu önerme XVI. Şekilde anlaşilan. ACD açısı ABC açısı veya BAC açısıdan daha büyüktür. Ilk önce yirmiyedinci önermeyi ispatlayalım.



XVI. Şekil



XVII. Şekil

XVII. Şekli Öklid'den aldım. EF doğru çizgisi AB ile CD doğru çizgilerinin kesmesinden oluşturan AEF ile EFD içters durumlu açıları birbirine eşit olsun. Öyle ise AB ile CD doğru çizgileri birbirine paralel olur. Paralel olmazsalar, uzatımları ya B ile D yönünde ya da A ile C yönünde kesişir. Uzatımları B ile D yönündeki G noktasında kesişsin. Öyle ise GEF üçgeninin AEF dış açısı EFG içters açıya eşittir. Fakat EFG açısı GEF üçgenin AEF dış açısı komsu olmayan iç açısıdır. Onaltıncı önermeye göre, AEF açısı GEF açısından daha büyüktür. Dolayısıyla ayni zamanda AEF açısı GEF açısıdan daha byük ve bu ayni açıya eşittir. Bu mümkün değil. Binaenaleyh iki çizgi paraleldir.

Şimdi onaltıncı önermeye döneriz. XVI. şekilde gibi, ABC bir üçgen olsun. BC kenarısı D noktasına kadar uzatılsın. Şu halde, ACD dış açısı kendisine komşu olmayan CBA ile BAC açılarından daha büyük olur, diye Öklid iddia eder. Neden?

Onuncu önermeye göre, AC kenarını ikiye bölebiliriz. Orta noktası E olsun. Üçüncü önermeyi kullanarak, B ile E noktalarını birleştiren doğru çizginin uzantısında BE eşit

FE olacak şekilde F noktasıni alalım. C ile F noktaları birleştirelim. AC doğru çizgisinin üzerinde herhangi bir G noktasını alalım. Öğeler'de, iki noktanın birleşmesi ve bir doğru çizginin uzatılması birinci ile ikinci önermelerde açık olarak ileri sürüldü. Sonuç olarak, biz Şekil.P'yi elde ederiz.

AEB ile CEF üçgenlerine bakalım. AE ile CE kenarları birbirine eşittir. BE ile FE kenarları de birbirine eşittir. Onbeşinci önermeye göre AEB ile CEF iki ters açısı birbirine eşittir. Hâlâ ispatlanmamış olan dördüncü önermeye göre, AEB üçgeninin ile CEF üçgeninin karşılıklı açıları birbirine eşittir. Özellikle, BAE açısı ECF açısına eşittir.

Öklid özel bir yöntemle ispatı bitirdi. Bazı şekillerin ileri sürdüğü ama verilmiş aksiyomlarının sonucu olmayan nitelikler kullanıyor. ECF açısının ECD açısından daha küçük olduğundan dolayı BAE açısı da ECD açısından daha küçüktür. Böyle ispat etmek istersek, bir doğru çizginin düzlemde iki tarafı varolduğunu ve iki doğru çizginin yalnız bir noktada birbirini kestiğini bilmeliyiz. Öklid bu önermeleri açıklıkla ileri sürmemiştir, fakat saklayarak kabul etmiştir. Şimdi bildiğimiz gibi, küresel geometride, birinci önerme doğru değildir.

Onaltıncı önermenin ispatında yalnız onbeşinci önerme değil, üçüncü, dördüncü ile onuncu önermeleri uyguladık.

I. Cüzdeki 3. Önerme. *Iki birbirine eşit olmayan doğru çizgi verilmiş ise, daha büyükten daha küçüğe eşit olan doğru çizginin çıkarılması.*

I. Cüzdeki 4. Önerme. *Iki üçgenin karşılıklı ikişer kenarları ve bu kenarlar arasındaki açıları eşit ise, karşılıklı tabanları da, iki üçgen de, karşılıklı ikişer açıları da eşit olur.*

Üçüncü önermenin ispatlaması kolay ve o kadar ilginç değil. Aksine dördüncü önermenin ispatlaması Öğeler'deki müşkülatları meydana koyar. Ispatlamasını anlatmamızdan evvel, onuncu önermeyi vereyim. Bu önermenin ispatlaması da oldukça kolay.

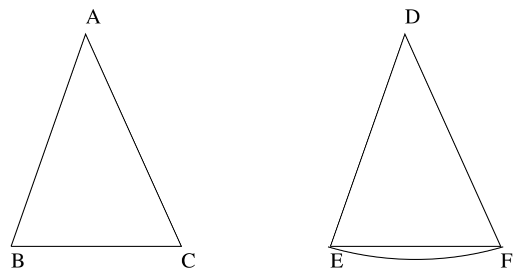
I. Cüzdeki 10. Önerme. *Bir doğru parçasının iki eşit parçaya bölünmesi.*

Öklid'in ifade ettiği kurallarda bulunan bazı sorunlar sonradan daha açıklıkla anlatabilmek için, kullandığım bazı kelimelerin olağan anlamlarından farklı olan tanımlarını uygulayacağım. Sebepiyi hemen söylebilirim. Yani Öklid'in peşinden giderek AB doğrusunu diye ben A ile B bağlayan doğru parçasını kastediyorum. Öte yandan C ile D noktası AB doğrusunda bulunan iki nokta ise, CD doğru parçası AB doğrusunun içerdiği, C ile D birleştiren aralığı kastediyorum. Yılmaz Beyin komşusu emekli lise öğretmen Ismet Bey doğru ile doğru parçası arasındaki farka dikkatımi çekti. Yani Öklid'e karşıt bugünkü öğrenciler ve ögretmenler için doğru sınırsızdır. Genel olarak bizim için sınırlıdır. Gene de, doğru anlasaydım, "doğru çizgi" sözü bugün kullanılmaz. Onu kullanıyorum.

Dördüncü önermeyı ispatlarken, XVIII. Şekli kullanırız. Iki üçgen ABC ve DEF üçgenleri olsun. AB kenarı DE kenarına eşit olsun, ve AC kenarı DF kenarına. BAC açısı EDF açısına eşit olsun. önermenin ispatlamasında üst üste gelecek şekilde koyma yöntemi kullanılıyor. Yani A noktası D noktasına konsun. Aynı zamanda AB kenarı DE kenarına konsun. Böylece B noktası E noktasına gelir. BAC ile EDF açıları birbirine eşit olduğundan, AC, DF'ye gelir. AC ile DF doğru çizgileri birbirine eşit olduklarından,

C noktası F noktasına çakışır. Dolayısıyla BC tabanı EF tabanına çakışır.

Bu son iddia o kadar belli değil. Gerçekten ispatlamayı dikkatli – hatta dikkatsız – inceleyince bunun tam ispat olmadığını görürüz. Aslında Öklid bazı doğru ile açık görünen kavramını tamamen anlatmamıştır. Mesela hem Öklid doğru çizgi kavramını, hem iki noktayı bağlayan tek bir doğru çizginin olduğunu da anlatmamış. Bundan fazla doğru çizginin parçasının gene de doğru çizgi olduğunu anlatmamış. Aynı zamanda üstüste gelecek şekilde koyma yönteminden çekindiğinden, doğru çizginin üstüste gelecek şekilde konulmasının yine de bir doğru çizgi verdiği anlatmamış. Bu eksiklikleri tamamlamak istersek, yeni Öğeler'i yazmalıyız. Zaten Hilbert tarafından bu yapılmıştır.



XVIII. Şekil

Biz otuzikinci önermeye kadar her önermeyi iddia edip ispatlamamamıza rağmen, biz bu önermeye kadar Öğeler'in ne içerdiğini, özellikle Gauss, Riemann ve Einstein uyguladığı eğrilik kavramına ait olduğunu daha iyi anlıyoruz. Bazı sezgisel, ya da açık olarak, Öklid geometrisini küresel ile hiperbolik geometriden ayıran husussiyetlerinin önemlerini takdir edebildik. Ayrıca Öklid geometrisinde lazım olan ama Öklid kendisinin meydana açıkça koymadığı kavramlar ile önermeleri tanıdık. Birinci cüzde tam olarak kırk sekiz önerme var. Son ikisi ünlü Pitagor teorem ile karşıtını ifadeleridir. Biz şu anda bu teoremlerle ilgilenmiyoruz. Öte yandan otuzüçüncüsünden kırk altına kadar numaralı on dört önerme ilerdeki konferanslarda çok önemli olacak.

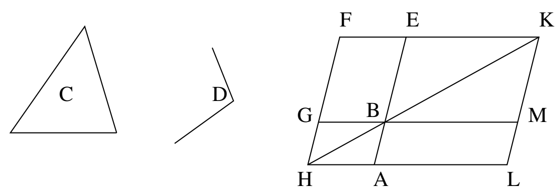
Geometrik cebir

Cebirde, özellikle cebirin başlangıcında çarpma önemli bir işlemdir ve toplama kadar önemlidir. Öklid'in Öğeler'ında çarpma işlemi geometrik yöntemlerle tanımlanmıştır. Tabii çarpım sade sayı değil, bir alandır. Ama çarpma yapılması yetmez. Çarpma geometrik yapılırsa mesela dikdörtgenle iki çarpımin toplamı nasıl yapılır? Daha genel olarak, şekilleri farklı olan iki alanın toplamı nasıl hesaplanır. Iki çarpımdan veya şekilleri farklı olan iki alanından hangisi daha büyük olduğu nasıl belirlenir?

Öğeler'de alanlar şeklin üçgenlere bölünmesiyle ölçülür. Inceleyeceğimiz önermeler arasında bazısı üçgenlerin, bazısı paralelkenarların alanına aittir. Çok önemli sorun olarak, alanı herhangi verilmiş şekillerin alanının toplamına eşit olan bir paralelkenarın nasıl çizildiğını anlatmaktır. Ilk önce verilmiş şekil bir üçgen olsun.

I. Cüzdeki 44. Önerme. Verilmiş bir üçgene alanca eşdeğer, bir kenarı ve bir açısı verilen paralelkenarın çizilmesidir.

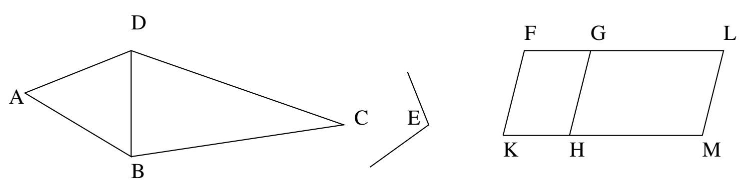
"Bir şekil bir başka şekile eşdeğer" diye, Öklid bir şeklin yüzölçümünün bir başka şeklin yüzölçümüne eşit olduğunu kastediyor. Bu önermeden sonra önermede verilmiş şekil herhangi bir çokgen olabilir. Öklid "kenarları doğru olan şekil" diyor, ama biz sadece "çokgen" deriz.



XIX. Şekil

I. Cüzdeki 45. Önerme. Verilmiş bir çokgene eşdeğer, bir açısı verilen paralelkenarın çizilmesi.

Bu önermeleri iki şeklin yardımıyla sadece anlatabiliriz. XIX. Şekilde verilmiş üçgen C'dir ve verilmiş açı D'dir. Verilmiş kenar AB kenarıdır. BL paralelkenarın bir kenarı AB'dir ve ABM açısı D'ye açısına eşittir. Aynı zamanda paralelkenarın yüzölçümü C'ye eşittir.



XX. Şekil

XX. Şekilde bir çokgen $ABCD$ verilmiştir. Bu çokgeni üçgenlere ayırdık. Verilmiş açı E'dir. önermenin iddiasında aşikâr anlatilmamasına rağmen, kenar FK de verilmiş. FH paralelkenarı ABD üçgenine eşdeğerdir ve GM paralelkenarı BDC üçgene eşdeğerdir. Dolayısıyla FM yüzölçümü $ABCD$ çokgene eşdeğerdir. Hemen gördüğümüz gibi, kırkdördüncü önermeyi kullanılarak, kırkbeşinci önerme kolay ispatlanır. Binaenaleyh kırkdördüncü önermenin ispatlaması yeter.

Kırkdördüncü önermeyi ispatlamamızdan evvel, sonuçlarını anlatmak isterim. Ilk önce Heath'in görüşleri sunarım. Heath yazıyor ki,

"We can now take stock of how far the propositions I. 43-45 bring us in the matter of transformation of areas, which constitute so important a part of what has fitly been called the geometrical algebra of the Greeks. We have now learnt how to represent any rectilineal

area, which can of course be resolved into triangles, by a single parallelogram having one side equal to any given straight line and one angle equal to any given rectilineal angle. Most important of all such parallelograms is the rectangle, which is one of the simplest forms in which an area can be shown. Since a rectangle corresponds to the product of two magnitudes in algebra, we see that the application to a given straight line of a rectangle equal to a given area is the geometrical equivalent of algebraical division of the product of two quantities by a third. Further than this it enables us to add or subtract any rectilineal areas and to represent the sum or difference by one rectangle with one side of any given length, the process being the equivalent of finding a common factor. But one step still remains, the finding of a square equal to a given rectangle, i. e. to a given rectilineal figure; and this step is not taken until II.14."

Heath'in deyişi çok önemli, ama cümleleri uzun ve karmaşık, Türkçeye çevirmek kolay değil. Türkçeye çevirmesini sunmamdan evvel, onun ne dediğini kendi kısa basit cümlelerimle anlatmaya çabalayayım.

Üç önermerler, yanı kırküçüncü, kırkdördüncü ve kırkbeşinci önermelerin yararlığını inceler. Öklid'in inşa ettiği teori cebirsel geometri adlanır, ama bu bizim bugünkü cebirsel geometri değil, bu cebirsel işlemlerin geometrik yöntemlerle yapıltiği teoridir. Heath'e göre Öklid'in teorisi bu cebirsel geometri adına layıktir. Bu üç önerme cebirsel geometrinin bizi çok önemli bir kısmı olan alanın şeklini değiştirmenin sorununa götürüyor.

Öklid incelediği alanlar çokgendir. Her çokgen üçgenlere bölünebilir. Kırkdördüncü önermeye göre, her çokgen bir kenarı ve bir açısı verilen bir paralelkenara eşdeğerdir. En önemli paralelkenarlar dikdörtgendir. Bir alan gösterebilen şekiller arasında bu şekiller en basittir. Bir dikdörtgen iki niceliğin çarpımının geometrik karşılığıdır. Şu halde, $c = ef$ iki niceliğin çarpımı ise, ve a başka bir nicelik ise, $b = c/a$ bölümünün geometrik karşılık verilmiş dikdörtgenin verilmiş kenarın üstüne konulmasıdır.

Bundan fazla, üste koyma yöntemle biz herhangi kenarları doğru olan alanları toplayabilir veya çıkarabiliriz. Mesela, $c_1, c_2, c_3, \ldots$ filan hepsi verilmiş alan iseler ve a verilmiş bir aralık, biz $b_1, b_2, b_3, \ldots$ şöyle bulabiliriz ki, $c_1 = ab_1$, $c_2 = ab_2, \ldots$ Dolayısıyla, c_1 ile c_2 alanının toplamını kenarlarının boyu a ve $b_1 + b_2$ olan dikdörtgen temsil eder. Öklid iki aralığın boyunu toplayabilir, ama iki alan dolaysız toplayamaz. Halbuki, bu üstüste koyma yöntem ile alanlar de toplananabilir.

Önemli bir sorun üstüstü koyma yöntemle çözülmez, verilmiş bir alana eşdeğer bir karenin çizilmesi! Öklid onu sonra çözüyor. Ben şimdi beceriksiz de olsa, Heath'in deyişi Türkçe çevireyim.

Adısına layık olan Yunanlı geometrik cebirin o kadar önemli kısmı olan alanın şeklini değiştirmenin sorununda bu üç önermelerin bizi nereye kadar götürdügünü biz şimdi sorabiliriz. Elbette üçgene bölünebilen, kenarları doğru olan herhangi bir şeklin alanın verilmiş bir aralıkta çizilmiş olan ve verilmiş bir açıyla paralelkenarı kullanarak nasıl temsil yapılığını öğrendik. Bu paralelkenarlar arasında en önemli olan ve yüzölçümü en basit şekilde gösterebilen şekil dikdörtgendir. Görebildiğimiz gibi, bir dikdörtgen cebirde bir çarpımın karşılığı oldu, verilmiş alana eşit olan bir dikdörtgenin verilmiş bir aralığın üstüne konulması cebirdeki iki sayının çarpımının üçüncü sayıya bölünmesinin geometrik ifade-

sidir. Bundan fazla, bu işlemin yardımıyla kenarları doğru olan şekillerin alanları toplayarak veya çıkararak, toplamı veya farkı bir kenarı verilmiş olan bir dikdörtgenle ifade edebiliriz. Bu işlem ortak bölen bir sayının bulunmasına eşdeğerdir. Ama bir adım henüz atılmadı, verilmiş bir dikdörtgene, yani genel bir kenarları doğru olan şekile, eşit olan karenin bulunması. Bu adım ikinci cüzdeki ondördüncü önermeden önce atılmaz.

Heath'in adlandırdığı son adımı attığımızdan sonra, biz karekökleri cebirsel hesaplama durumda bulacağız. Belli ki toplamlar, farklar, çarpımlar ve bölümler bulmamizden fazla karekökleri hesaplarsak, biz herhangi ikinci mertebeden olan bir denklemi çözebiliriz. Öklid'in bunu nasıl yaptığını anlatacağız. Ikinci mertebeden olan denklemi çözülerek, sık sık irrasyonel sayıları meydana çıkar. Öğeler'ın onuncu cüzünde Öklid'in dönemine kadar geliştirilmemiş irrasyonel sayıların teoresinı inceleriz. Ilk önce bazı Heath'in naklettiği ve bizim şimdi takdir edebildiğimiz görüşleri sunarım.

Heath kendisinin dediğine göre,

"*This proposition will always remain one of the most impressive in all geometry when account is taken* (1) *of the great importance of the result obtained, the transformation of a parallelogram of any shape into another with the same angle and of equal area but with one side of any given length, e. g. a* **unit** *length, and* (2) *of the simplicity of the means employed, namely the mere application of the property that the complements of the 'parallelograms about the diameter' are equal. The marvelous ingenuity of the solution ...*"

Biz kırkdördüncü önermenin ispatı hâlâ görmedik. Dolayısıyla basitliğini takdir edemeyiz. Bundan fazla Öğeler'ın onuncu cüzde geliştirilen irrasyonel sayılar teoresini hâlâ incelemedik. Buna rağmen bu yöntemin irrasyonel sayılar hakkında kavramları meydana getirmesini şimdi anlayabiliriz. Heath'in tefsirini çevireyim.

"*Bu önerme uzun zaman için geometrinin en etkileyici önermelerinden birisi kalacak, özellikle (1) şekli her hangi bir şekil olan bir paralelkenarın aynı açıyla ve aynı yüzölçümüyle fakat aynı zamanda bir kenarı her hangi bir verilmişuzunluk mesela ölçünlüyle, bir başka paralelkenara değiştirilmesi sonucunun temel önemi de, (2) bundan fazla kullanılan vasıtalar, yani paralelkenarın 'köşegenine göre karşılıklı paralelkenarların' tamamlayıcılarının birbirine eşit olmasından fazla hiç kullanmaması da hesaba katılırsa. çözümünün yaratacılığı ile hüneri ...*"

Biz bu iddiayı hâlâ tam anlayamayız, ama önermeyi ispatlamamızdan sonra belli olacak.

Bildiğiniz gibi Plutark yaklaşık M. S. 100 yaşayan biyografıları ve başka yazıları yazan bir yazar idi. Heath ona aşağıdaki gözlemi atfeder.

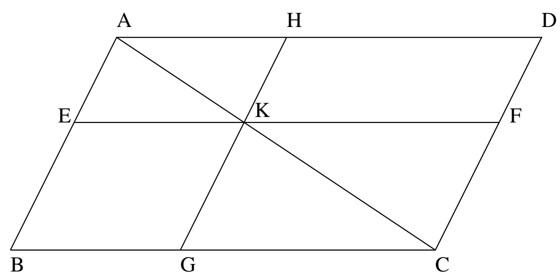
"*En geometrik olan teoremlerden, daha doğrusu en geometrik olan önermelerden birisi olarak, iki verilmiş şekilden, birisine eşit, başkasına benzer olan şeklin verilmiş bir aralığa üstüste konulmasıdır. Bu önerme kuşkusuz üçgenin hipotenüsündeki karenin diğer iki kenardaki karenin toplamına eşdeğer olması teoreminden daha mahir, daha bilimseldir.*"

Herkes Öğeler'ı düşünürken, Pitagor'un teoriminin aklına hemen gelmesine rağmen, Plutark belki haklı oldu.

Kırkdördüncü önermeyi ispatlarken, kırküçüncü uygularız.

I. Cüzdeki 43. Önerme. Herhangi bir paralelkenarda, köşegene göre karşılıklı paralelkenarların tamamlayıcılarının birbirine eşit olur.

Bu önerme XXI. Şekilde anlatılır. Ispatını sonra anlatırım. Ama cebiri kullanarak, doğru olmasının sebebini kolay anlatabilirim. Verilmiş açıyla paralelkenarın yüzölçümü iki paralel olmayan kenarın çarpımına orantılıdır. Dolayısıyla EG paralelkenarının alanı $c \times \overline{EK} \times \overline{EB}$'ye eşittir ve HF paralelkenarının alanı $c \times \overline{HK} \times \overline{HD}$'ye eşittir. Zikrettiğim orantı sabiti c'dir. Iki paralelkenar EG ile HF köşegenine göre karşılıklı olduğundan, iki oran $\overline{HK}/\overline{KG} = \overline{HK}/\overline{EB}$ ile $\overline{EK}/\overline{KF} = \overline{EK}/\overline{HD}$ birbirine eşittir. Dolayısıyla iki paralelkenarın alanları birbirine eşittir. Aşağıda Öklid'in geometri ispatını anlatırım.



XXI. Şekil

Kırkdördüncü önermeyi şimdi ispatlayalım. Şekil.S'yi kullanırız. Verilmiş aralık AB olsun ve verilmiş üçgen C. Henuz anlatılmamış kırkikinci önermeye göre, C üçgenine eşit olan ve D açısıyla $BEFG$ paralelkenarını çizebiliriz. EB aralığı AB aralığının uzatımı olsun. FG aralık H noktasına kadar uzatılsın ve AH doğrusu A noktasından geçen BG kenarına paralel olan doğru çizgi olsun.

H ile B noktaları BH doğru çizgiyle bağlansınlar. HF doğru çizgisi iki birbirine paralel olan doğru çizgiyi keser. Dolayısıyla yirmidokuzuncu önermeye göre, AHF ile HFE açıların toplamı iki dik açıya eşittir. Böylece, BHG ile GFE açıların toplamı iki dik açıdan daha az olur. Öyle ise, beşinci önermeye göre, uzatılarak, HB ile EF doğru çizgi kesişirler. K noktasında kesişsinler. KL doğru çizgisi K noktasından geçen ve EA ile FH çizgilerine paralel olan bir çizgi olsun.

HA çizgisi L noktasına kadar uzatılsın ve GB çizgisi M noktasına kadar. Şu halde XIX. Şekli elde ederiz. $HLKF$ paralelkenarının köşegeni HK doğru çizgisidır. AG ile ME paralelkenarlardır, LB ile BF birbirinin HK köşegeniyle ilgili olan tamamlayıcısıdır. Dolayısıyla LB ile BF paralelkenarları birbirine eşittir, yani alanları birbirine eşittir. BF paralelkenarı C üçgenine eşit olduğundan, LB paralelkenarı C'ye de eşittir. GBE ile ABM açıları birbirine eşittir ve açı ABM D açısına eşittir. Dolayısıyla C alanı AB aralığının üstüne koyulmuştur.

Kırküçüncü önermeyi hâlâ ispatlamadık. Ispatlamamızdan önce ispatını anlatmadığımız otuzdördüncü önermeyi veririm.

I. Cüzdeki 34. Önerme. Herhangi bir paralelkenarda karşılıkli kenarlar veya açılar birbirine *eşittir. Köşegeni paralelkenarın alanını ikiye böler.*

XXI. Şekile bakalım. Şekilde $ABCD$ köşegeni AC olan bir paralelkenardır. Birbirinin tamamlayıcısı olan BK ile KD iki paralelkenarlarının alanı birbirine eşittir. Neden? Ilkönce otuzdördüncü önermeye göre ABC ile ADC üçgenlerinin alanları birbirine eşittir. Aynı sebepten hem AEK ile AHK üçgenleri hem de KGC ile KFC üçgenleri birbirine eşittir. Dolayısıyla BK tamamlayıcısı KD tamamlayıcısına eşittir.

Kırkikinci önermenin ispatı oldukça kolay. Iddiasını sunuyorum ama ispatlamıyorum.

I. Cüzdeki 42. Önerme. *Verilmiş bir üçgene eşit olan, verilmiş bir açıyla paralelkenarın çizilmesi.*

İrrasyonel sayılar

Istersek, biz ikinci cüzde bulunan önermeleri tek tek incelemeye devam edebiliriz, ama onuncu cüze gelmek istiyoruz. Mamafih biz bilhassa irrasyonele gelmek istiyoruz. Birinci cüzü ile onuncu cüzü arasında hem çok önemli hem de güzel kavramlar ve önermeler var, ama bizim maksatlar için onlar konudışıdır. Mesela üçüncü cüzde çembere ait önermeler bulunur. Geometrik yönden, bu önermelerden çoğu pek güzel. Einstein'in ölçüdüne uyar. Yedinci, sekizinci ile dokuzuncu cüzler tam sayılar hakkındadır. Bu dört cüzler, yani üçüncü, yedinci, sekizinci ve dokuzuncu bu konferanslarda söz konusu olmayacak. Onbirinci ile onikinci cözlerde üç boyutlu geometri hakkındadır, özellikle cisimlerin oylumunun hesaplanması incelenir. Onlara da bu konferanslarda dokunmayacağız.

Başka yedi cüzler, irrasyonel sayılara veya muntazam üç boyutlu cisimlerın inşa edilmesine kısmen aittir. Mesela dördüncü cüzde çemberin içine dahilen temas etmek üzere muntazam çokgenler cetvel tahtası ile pergelle çizilir. Tabii her muntazam çokgen böyle çizilemez. Üçgen, dörtgen, beşgen, altıgen, ya da ongen veya onbeşgen için, nasıl yaptığını Öklid anlatmış. Muntazam çokgenlerin yapışı Öğeler'inde gelistirdiği cebirsel irrasyonel sayıların teorisine bağlıdır. Öğeler'inde teori aslında iki mertebeden veya dört mertebeden olan irrasyonel sayılar hakkındadır, ama bugün bildiğimiz gibi, muntazam çokgenlerin inşa edilmesi siklotomik sayılarına aittir. Gauss'ın onyedigen inşa ederken gösterdiği gibi, muntazam çokgen inşa etmesiyle uğraşdığımızda Galois teorisinin ortasındaki sorunuyla rastlıyoruz. Öklid'in inceleyip çözdüğü hallarda, muntazam çokgenlerle ilgili irrasyonel sayılar, uygun karekökleri kullanarak ifade edilebilirler.

Ana amacımızın Öklid ile Einstein arasında eğriliğin kavramına katkılarının belirtilmesine rağmen, bazı bu kavramı oluşturan matematikçiler matematikte ana bir fikir ve derin bir ilke olarak geometri ile cebirin çok yönden ayni konu olduğunu da meydana çıkardı. Dolayısıyla iki anlamda onlar Pitagor ile Öklid'in haleflermiş. Biz geometrik cebiri ile Öğeler'deki irrasyonel sayılar teoresini anlatarak, eski Yunanlıların matematiğe bıraktığı eğriliğinden fazla olan ikinci mirası da vurguluyoruz. Her diğer matematikçiden önce, Gauss eğriliğin de irrasyonel sayıların da teorisine katkida bulunmuş oluyor.

Her genç matematikçi Gauss'ın on dokuz yaşında olarak onyedigenin nasıl inşa edildiğini keşfediğini öğrenir. Elbette bu harikulade bir keşif idi, ama ben matematik öğrenmeye başladığım zaman Gauss'ın başarısından okuduğumda onun çok zeki olmasına rağmen sadece ilk geometride bir keşif olduğunu sanıyordum. Doğrusu Gauss onyedigeni nasıl inşa ettiğini hemen öğrenmedim ve tefekkür etmeden yönteminin basit ilk geometrikten alınmış ilkelerden daha ileri kavramlar kullanmadığını düşünüyordum. Yalnız ben değil pek çok matematikçiler böyle düşünür. Hakikat başkadır.

1819 yılında, kırk iki yaşında olarak, talebesi Christian Ludwig Gehrling'e yazdığı mektupte Gauss kendisi çözümünü nasıl keşfettiğini naklediyor. Mektubundan anlayabildiğimiz gibi Gauss eski Yunanlilarін açtığı yolda ve geometri ile irrasyonel sayılar bağlayan ilkeleri uygulamış. Mektupta Gauss şöyle yazdı,

Das Geschichtliche jener Entdeckung ist bisher nirgends von mir öffentlich erwähnt, ich kann es abe sehr genau angeben. Der Tag war der 29. März, 1796, und der Zufall hatte gar keinen Anteil daran. Schon früher war alles, was auf die Zerteilung der Wurzeln der Gleichung $(x^p - 1)/(x - 1) = 0$ in zwei Gruppen sich bezieht, von mir gefunden, wovon der schöne Lehrsatz D. A. p. 637 unten abhängt, und zwar im Winter 1796 (meinem ersten Semester in Göttingen) ohne daß ich den Tag aufgezeichnet hätte. Durch angestrengtes Nachdenken ̈ber den Zusammenhang aller Wurzeln untereinander nach arithmetischen Gründen glückte es mir, bei einem Ferienaufenthalt in Braunschweig am Morgen des gedachten Tages(ehe ich aus dem Bett gestanden war) diesen Zusammenhang auf das klarste anzuschauen, so daß ich die spezielle Anwendung auf das 17-Eck und die numerische Bestätigung auf der Stelle machen könnte. Freilich sind später viele andere Untersuchungen des 7. Abschnittes der D. A. hinzugekommen.

Siz bu satırları okumamızdan sonra Gauss'un genç yazdığı ünlü *Disquisitiones Arithmeticae* kitabını kütüphanede bulup okuyacaksınız umuttayım. Metninde söz konusu olan $(x^p - 1)/(x - 1)$ denkleminin kökleri siklotomik sayılardır. Ama S. 637'de, yani kitabın 357'inci bölümde bulunan önerme bu köklerden ibaret olan bir toplamın ikinci mertebeden olan bir irrasyonel sayı olduğunu iddia eder. Gauss kendisinin vurguladığı gibi bu Öğeler'de bulunan geometrik önermelere yakın olan iddia hem geometride hem sayılar teoresinde önemlidir.

Gauss'un cümlerini çevirelim.

O keşifin tarihinden henüz hiç bir yerde söz etmedim, ama çok kolay anlatabilirim. 1796 yılın 29 martının günü idi, hiç bir tesadüf olmadı. Daha önce $(x^p - 1)/(x - 1)$ denkleminin köklerinin iki kısıma bölündüğüne ait 637 sayfasında bulunan güzel önermenin tabi olduğunu her şey zaten Göttingen'deki ikinci sömestrim olan 1796 kısda keşfetmiş oldum, ama günün tarihini not etmedim. Braunschweig'da tatil günlerimi geçerken, köklerinin aritmetik anlamda karşılıklı ilişkileriyle düşünüp uğraşarak, andığım günde yatağımdan çıkmaktan evvel bu ilişkiyi tam kesinlikle anlamayı başardım. Ben keşfettiğim ilkeleri hemen onyedigene uygulayabildim ve sayıca sağlayabildim. Tabii ondan sonra D. A.'nin yedinci kısmına pek çok ötedeki araştırmamı ekledim.

Ortak ölçülmez sayıların keşifi Yunanlı geometride ana olaylardan birisiydi, ama keşifin geometriyi nasıl etkilediği kesinlikle anlamam. Daha doğrusu Yunanlilar her iki aralığın ortak ölçüsünün olmadığını keşfettiler. Her uzunluk belirtilmiş uzunluğun bir kesirli katı olmadığından, en basit, insan çevrisinde ilk farkettiği sayılar, yani 1/2, 2/3, 8/5, 12/29, gibi bayağı kesirler geometrik amaçlar için yetermez. Anlaşılan her iki araliğın belki bayağı kesir olmayan ortak ölçümü tanımlamak için, Eudoxus'un genel oran teorisi lazımdır. Bu teori Öklid'in altıncı cüzünde geliştirilmiştir. Teorisiyle herhangi iki aynı çeşit olan matematik niteliklerin, mesela iki aralığın ortak ölçümü tanımlanabilir. Dolayısıyla, Eudoxus'un teorisine dayanıp geometrik nitelikler kullanarak, eski Yunanlılar rasyonel veya irrasyonel sayıların teorisini geliştirmiştir. Eudoxus'un bir buçuk yüzyıldan evvel, tam sayılar incelerek, Pitagorcular ve başka eski matematikçiler, uçgen sayıları veya kare sayıları gibi geometrice etkilenmiş olan kavramları ortaya koymuşlar.

Rönesans ve sonradaki dönemlerden sonra oluşturulan cebirsel kavramlar kullanılmazsa irrasyonel sayılar teorisine Eudoxus'un teorisinin ihtiyacının olmasına rağmen, ben beşinci cüzün içeriğini incelemem. Yani hepimiz ondokuzuncu yüzyılda meydana konmuş çağdaş sayı kavramını iyi bildiğimizden, hiç anlatmadan beşinci cüzde bulunan kavramları kullanabiliriz.

Ikinci cüzde Heath'in adlandırdığı geometrik cebire yer verilir. Cebir kullanmazsak, gerek açıkça gerek gizlice biz cebirsel tanım gerektiren irrasyonel sayıları ortaya koyamayız. Dolayısıyla geometrik cebirin temelleri bize oldukça önemlidir. Heath'in anlattığı gibi, *ikinci cüzdeki beşinci ile altıncı önermeleri* kullanarak

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} ax \pm x^2 &= b^2, \\ x^2 - ax &= b^2, \end{aligned}$$

iki denkleminin nasıl çözüldüğünü anlatabiliyoruz. Sonradan, oranın teorisinin geliştirildiğindan sonra, altıncı cüzdeki yirmisekizinci ile yirmidokuzuncu önermelerde daha genel olarak iki

$$\text{(B)} \qquad ax \pm \frac{b}{c}x^2 = \frac{C}{m},$$

denklemi geometrik çözülmüştür. Bence, ikinci cüzde Öklid (A) denklemlerini çözmek istememiş. Tabii Heath ikinci cüzde bulunan yorumlarıyla Öklid'in bu denklemleri çözebileceğini iddia edip çözümün nasıl görüneceğini anlatar, ama Öklid kendisi ne düşünmesi hakkında hiç eklemiyor.

Karekökler. Cebirde veya geometrik cebirde bir sayının karekökünün çıkması çok önemlidir. Öklid bu meseleyi Pitagor'un teoremi sayesinde çözüyor.

Cebir ya da cebirsel sayılar teorisinin gelişmesini anlatmak istersek, Heath'in geometrik cebir konusunda tefsirini okumamız çok önemli olur. Bazı cümlelerini burada aktarırım. Evvela beni çarpan bir iddia vereyim, çünkü bu konferanslarda aldırmadığım Pitagor teoreminin geometrik cebirdeki önemini gösterir. Heath yazar ki,

"*Lastly, the extraction of the square root is, in the geometrical algebra, the finding of a square equal to a given rectangle, which is done in II.14 with the help of I.47.*"

Geometrik cebirde her niceliğin bir boyutu var. Oran olabilir, veya uzunluk, veya alan. Bir niceliğin karekökünü bulmak istersek, nicelik uzunluk olamaz, ama alanın karekökü uzunluktur. Olağan olarak, Öğeler'de karekökü aranan nicelikler alandır. Heath'in cümlesinde söz konusu olan ikinci cüzdeki ondördüncü önerme yalnız dikdörtgen değil kenarlarıhepsi doğru olan çizgi hakkındadır.

II. Cüzdeki 14. Önerme. *Kenarları doğru olan verilmiş bir şekile eşit olan karenin çizilmesi.*

Fakat fazla genellik aldatıcıdır. Yani birinci adım olarak, anlattığımız birinci cüzdeki kırkbeşinci önerme kullanarak, verilmiş şekile eşit olan bir dikdörtgen çizilir. Heath'in dikkatımizi çektiği gibi, bu önermenin iddiasi altıncı cüzdeki onüçüncü önermeye eşdeğerdir.

VI. Cüzdeki 13. Önerme. *Iki verilmiş aralığın orta orantılısının bulunması.*

Iki aralık AB ve CD ve aranan orta orantılı EF iseler, şart budur,

$$\frac{AB}{EF} = \frac{EF}{CD},$$

yani

$$EF^2 = AB \times CD.$$

Dolayısıyla bu iki önerme eşdeğerdir.

Altıncı cüze vardığında Öklid'in beşinci cüzde oluşturduğu oranlar teorisi elde bulunuyor. Bu teori onüçüncü önermeye uygulanabilir. Ama ikinci cüzde teori elde değil. Aslında, oranlar teorisini kullanmadan, aynı şekilde olan üçgenlerin teorisinin geliştirilmesi mümkün değil. Dolayısıyla, Öklid aynı şekilde olan üçgenlerin teorisini uygulayan yöntemi kullanmadan, başka kanıtı bularak, Pitagor teoremini birinci cüzde ispatladı. Bu teoreme dayanarak, oranlar teorisini kullanmadan, iki cüzdeki geometrik cebiri tamamlayabilmiş.

Evvelce anlattığımız gibi, ikinci cüzdeki beşinci ile altıncı önermeler iki mertebeden olan cebirsel denklemler çözerler. Ondördüncü önermeyi ispatlamak için, Öklid'in beşinci önerme kullanması bizi hayrette bırakamaz.

Ondördüncü önermenin ispatını daha kolay anlamak için, ilk önce beşinci önerme ve ispatını anlatayım.

II. Cüzdeki 5. Önerme. *Bir doğru aralık birbirine eşit olan ve birbirine eşit olmayan aralıklara kesilse, iki birbirine eşit olmayan aralıkların içerdiği dikdörtgen alanı iki kesme noktasının arasındaki aralığın üstüne çizilen karenin yüzölçümuyla beraber yarısının üstune çizilen kareye eşittir.*

Bu iddianın şüphesiz tamamen şaşırtmaca olduğu, Öğeler'den alınan bir şekille anlatalım. XXII. Şekilde AB doğru çizgisi C noktasında iki birbirine eşit olan araliğa bölünür. Öte yandan D noktasında çizgi iki birbirine eşit olmayan aralığe bölünür. Iki birbirine eşit olmayan aralıkların içerdiği dikdörtgenin yüzölçümü $AD \times BD$'ye eşittir. Önermeyi cebirsel ifade edersek,

$$AD \times DB + CD^2 = CB^2,$$

denklemi elimize geçer. AB uzunluğu 1 ve $DB = x$ iseler, bu denklem açık olan

$$(1-x)x + (1/2-x)^2 = (1/2)^2$$

denklemine eşdeğerdir. AB uzunluğu a'a eşit ise, denklem şöyle görünür,

$$(a-x)x + (a/2-x)^2 = (a/2)^2.$$

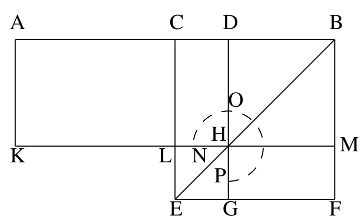
(A) denklemini çözmek istersek,

$$(a/2)^2 - (a/2-x)^2 = b^2$$

denklemini veya ona eşdeğer olan

$$y^2 = (a/2)^2 - b^2, \qquad a/2 - x = y$$

denklemini çözmemiz lazım. Gerçekten, b ile a verilmiş iseler ve b sayı $a/2$'dan daha az ise, şu halde Pitagor teoremini kullanarak, y'yi bulup denklemi çözebiliriz. Aşağıda ondördüncü ispatta benzer ispat kullanılır. Buna rağmen, Öklid kendisi (A) veya (B) denklemini çözmez.



XXII. Şekil

Anlaşılan ikinci cüzdeki ondördüncü önermeden fazla tek iki mertebeden olan denklem çözen önerme onbirinci önermedir. Be önermenin çözdüğü denklem şöyledir,

$$a(a-x) = x^2.$$

Mesela, a 1'e eşit ise, şu halde $x = -1/2 \pm \sqrt{5}/2$, ancak x artı ise, $x = -1/2 + \sqrt{5}/2$. Böylece hemen tanıdığımız x sayısı ünlü bir sayıdır. Denklem şöyle verilebilir,

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}.$$

Dolayısıyla, x sayısı bir aralığın aşırı ile orta orana* bölünmesinin çözümdür. Aralığın uzunluğu 1-e eşit ise, bölümlerinin uzunlukleri x ile $1-x$ olur. İki eşit olan $x : 1 = 1 - x : x$ orana *altın oran* denilir.

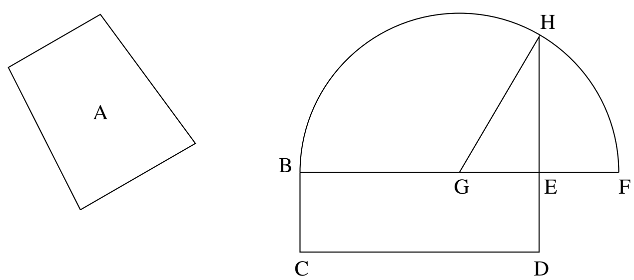
---

*Ingilizce *extreme and mean ratio* veya Yunanca ῎Ακρον καὶ μέρον λόγον

Gene de, başka yöntemle ikinci kez olarak Öklid bu önermeyi altıncı cüzde çözer. Muntazam beşgen çizilmesi için bu sayı ve geometrik yapı oldukça önemli. Hemen anladığımız gibi hatta eski zamanda geometrik yapılar yanışıra irrasyonel sayılar meydana çıkmışlar.

XXIII. Şeklini kullanarak ondördüncü önermeyi ispatlayalım. Verilmiş alan dikdörtgen BD olsun. BE ve ED birbirine eşit ise, verilmiş dikdörtgen bir kare olunca, önerme zaten çözülmüştür. Kare olmazsa, iki doğru çizgiden, birisi daha uzundur. BE çizgisi olsun. Harfları şöyle seçebiliriz.

EF aralığı ED aralığına eşit olsun. BF çizgisi G noktasında ikiye bölünsün. Merkezi G ve yarıçapı GB veya GF olan yarım çember BHF çizilsin. DE doğru çizgisi nokta H kadar uzatılsın. Şimdi beşinci önerme uygulayalım. BD dikdörtgeni ile EG karesinin toplamı GF karesine eşittir.



XXIII. Şekil

GF aralığı GH aralığına eşittir. Dolayısıyla, BD dikdörtgeni ile EG karesinin toplamı GH aralığının ustündeki kareye eşittir. Pitagor teoremi sayesinde, GH kare HE ile GE karenin toplamına eşittir. Dolayısıyla dikdörtgeni HE karesine eşittir. Böylece önerme ispatlanmıştır.

Çözümü anlattığımızdan sonra fikrinin ne olduğu oldukça açıktır. Beşinci önermeye göre, bir dikdörtgen iki karenin farkına eşittir. Ama Pitagor teoremini uygulayarak, biz iki karenin farkının yerine bir kare geçirebiliriz.

İspatın fikri cebirsel anlatabiliriz. Yani xy sayısının karekökünü nasıl bulabiliriz. $x = y$ ise bu önerme kolay çözülebilir. Aksi takdirde x sayısı y sayısından daha büyük olsun. $x = u + v$ ve $y = u - v$ olarak x ile y yerine, u ile v bulabiliriz. Şu halde $xy = u^2 - v^2$ ve Pitagor teoremini kullanarak, aradiğimiz çözümü, $w^2 = u^2 - v^2$ elde ederiz.

Ikinci cüzü artık bırakacağız, fakat, Heath'in peşinden giderek, bırakmamızdan evvel cebirsel içeriğini yine de vurgulamak için, on ilk önermeyi cebirsel ifade edelim. Bütün cüzde yalnız on dört önerme var, ve biz kalan dörtlerinden daha ikisini anlattık. On ilk önermenin cebirsel ifadeleri söyle,

(1) $$a(b + c + d + \dots) = ab + ac + ad \dots$$

(2) $$(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2$$

(3) $$(a + b)a = ab + a^2$$

$$(4) \qquad (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(5) \qquad ab + \Big(\frac{a+b}{2} - b\Big)^2 = \Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2$$

$$(6) \qquad (2a+b)b + a^2 = (a+b)^2$$

$$(7) \qquad (a+b)^2 + a^2 = 2(a+b)a + b^2$$

$$(8) \qquad 4(a+b)a + b^2 = \{(a+b)+a\}^2$$

$$(9) \qquad a^2 + b^2 = 2\Big\{\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{a+b}{2} - b\Big)^2\Big\}$$

$$(10) \qquad (2a+b)^2 + b^2 = 2\{a^2 + (a+b)^2\}$$

Tabii, bu iddiaların hepsinin geometrik ispat için zamanınız yok! Fakat beşinci ve altıncısına sonra geri döneceğiz.

Dediğim gibi, dördüncü cüzde çemberin içine dahilen temas etmek üzere muntazam çokgenler cetvel tahtası ile pergelle çizilir. Gauss'un katkılardan sonra, biz çizilmesinin tekliğin köklerine bağlı olduğunu biliyoruz. Bu köklerin teorisine siklotomi denir. Aslında eski Yunanlılar cebirsel irrasyonel sayıları ile muntazam çokgenler arasında bağlantıların farkındadır, fakat bilgileri bizimki kadar geliştirilmemiş. Iki mertebeden olan irrasyonel sayılara dair bilgilerin dördüncü cüzde anlatılmasına rağmen, bazı özellikler ilk olarak onüçüncü cüzde anlatılıyor.

Bu konuda iki ana sorun var. Birisi, muntazam çokgenlerin cetvel tahtası ile pergelle nasıl çizilmesi? Ikinci, muntazam çokgen çemberin içine dahilen temas etmek üzere çizilmiş ise, kenarı ile çemberin yarıçabının oranı ne olur? Başka benzer sorun var. Verilmiş muntazam çokgenin içine dahil kenarlara dokunan çemberin çizilmesi, veya çemberin içine dahil kenarları çember dokunan çokgen çizilmesi.

Bu sorulardan bazılarına hemen cevap verebilirsiniz. Üçgen veya muntazam dörtgen çemberde nasıl çizildiğini biliyorsunuz. Dairenin yarıçapı 1'e eşit ise, kenarının uzunluğunu hesaplayabiliriz. Iki irrasyonel sayılar meydana getiriliyorlar, yani 2 ile 3 tam sayılarının kökleri. Beşgen veya ongen ise, bu sorulara çoğunuz kuşkusuz hemen cevap veremezsiniz. Mesela, dördüncü cüzdeki onbirinci önermeye bakalım.

IV. Cüzdeki 11. Önerme. Verilmiş bir çemberin içine dahilen temas etmek üzere, kenarları birbirine eşit olan ve açıları birbirine eşit olan beşgenin çizilmesi.

Bu soruna Gauss'dan öğrenilmiş olan çağdaş yönden bakarsak, o kadar zor değil, ama bir anlamda Gauss'un geliştirdiği kavramların kaynağı şimdi anlattığımız Öklid'in sunduğu teoride bulunur. Öklid onbirinci önermenin çözümü başka önemli önermeye dayanarak ispatlıyor.

IV. Cüzdeki 10. Önerme. Tabandaki açıları başkasının iki misli olan ikizkenar üçgen çizilmesi.

Tabandaki her iki açısının beşkatı iki dik açıya eşit olduğu bellidir. Dolayısıyla açılar kendisi $2\pi/5$ derecesine eşittir.

Yıldız şekli verilmiş olan muntazam beşgen Pitagorcuların önemli işaretiymiş. Dolayısıyla, bu iki önerme Pitagorculara erken bilinmiş olduğu zannedilir. Bildiğiniz gibi, Öklid M.E. yaklaşık üç yüz yıl yaşamış. Pitagor M.E. altıncıyüzyılda yaşamış. Pitagorcular işaretleri olmak üzere muntazam beşgen ne zaman benimsediklerini bilmiyorum, ama tahmin ederek, Pitagor'in zamanında söylerim. Şöyle ise, Pitagorcular bu iki önermenin iddialarini beşinci yüzyılın başına kadar anladı. Göreceğimiz gibi, önermelerinin kanıtlamasında bir aralığın aşırı ile orta orana nasıl bölünmesinden fazla üçüncü cüzde bulunan çember hakkında teoremler uygulanır. Aslında, bu teoremler yalnız çember hakkında değil, çember ile doğru çizginin kesişme noktaları hakkındadır. Teoremler cebirsel ifade edilirseler, iki mertebeden olup iki bilinmeyen nicelik içeren denklem ile doğrusal denklemin birlikte çözümleri hakkındadır.

Anlattığım gibi, Pitagor'in kim olması sorunu inceleyince, Pitagor'u Pitagorculardan ayırmalıyız. Bu iki önerme ile üçüncü cüzün içerdiği bazı önermeleri incelerek, Pitagorcuların çok erken ne kadar anladığı daha iyi anlarız.

Altın oran. Muntazam beşgenin yapımı için o kadar önemli olan altın oran da Pitagor'un teoremi sayesinde geometrik belirtilebilir.

Bu iki önermenin çözümleri bizim iddia ettiğimiz ama ispatlamadığımız ikinci cüzdeki onbirinci önermeye dayanır. Buna hayret etmiyoruz çünkü onbirinci önermenin meydana getirdiği sayı $\sqrt{5}$ yardımıyla ifade edilir. Bu irrasyonel sayı tekliğin beşinci köküne bağlıdır.

II. Cüzdeki 11. Önerme. Verilmiş bir doğru çizgisinin bütünü ile bir bölümünün içerdiği dikdörtgen başka bölümünün üstündeki kareye eşit olmak üzere dikdörtgenin çizilmesi.

Bu önermenin iddiasinin cebirsel nasıl ifade edildiğini evvelce anlattık.

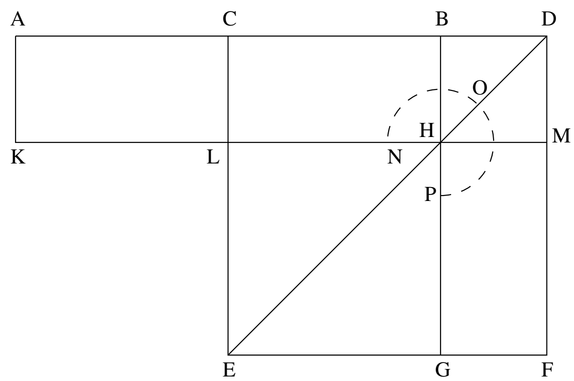
Ikinci cüzdeki ondördüncü önermeyi ispatlamak için, ikinci cüzdeki beşinci önermeyle birinci cüzdeki kırkyedinci önermeyi, yani Pitagor teoremini, uyguladık. Onbirinci önermeyi ispatta altıncı önerme ve Pitagor teoremi kullanılır. Altıncı önerme beşincisine benzer, fakat iddiasi daha karmaşık.

II. Cüzdeki 6. Önerme. Bir doğru çizgi ikiye bölünsün ve aynı doğru uzatılsın. Şu halde, uzatılmış doğru çizgi ile onu uzatan bölümünün içerdiği dikdörtgenin ve verilmiş doğru çizginin yarısının üstündeki karenin toplamının yarısı, uzatan bölümle beraber yaptığı doğru çizginin üstündeki kareye eşittir.

Bu önceden eski Yunancadan Ingilizceye çevrilmiş olan, ondan sonra Türkçeyi iyi bilmeyen biri tarafından Ingilizceden Türkçeye çevrilmiş olan, iddia o kadar belli değil. Belki XXIV. Şekile bakınca, daha belli olur. Yani verilmiş doğru çizgi AB'dir. Uzatılmış çizgi AD'dir. BD ile DM doğru çizgilerin birbirine eşit olduklarından, önermede söz konusu olan dikdörtgen AM dikdörtgenidir. Verilmiş doğru çizginin yarısı CB çizgisidir. Onun üstüne konmuş kare LG karesine eşittir. Başka önermede sözkonusu olan kare CF karesidir. AL ile HF dikdörtgenlerinin birbirine eşit olduğu belli olduğundan, önermenin dikdörtgeni ile daha küçük karenin daha büyük kareye eşit olduğu açıktır.

Beşinci ile altıncı önermelerin cebirsel ifadeleri Heath'in denklem dizisinde verilmiştir. XXII. Şekile bakınca beşinci önerme altıncı kadar belli olduğunu kabul edersiniz.

Şimdi ikinci cüzdeki onbirinci önermeyi ispatlayalım. XXV. Şekil kullanılır. Verilmiş çizgi AB olsun. Bu çizginin üstüne $ABCD$ karesi çizilsin. E noktasında AC çizgisi ikiye bölünsün. B ile E noktalarını birleştiren doğru çizgi çizilsin. EF çizgisi BE çizgisine eşit olarak, CA çizgisi F noktaya kadar uzatılsın. FA çizgisinin üstüne kare FH çizilsin. O zaman GH K noktasına kadar uzatılsın. Şu halde, AB ile BH doğru çizgilerinin içerdiği dikdörtgen AH çizgisinin üstündeki kareye eşittir. Ilk önce altıncı önermeye göre CF ile FA içerdiği dikdörtgen, AE üstündeki kareyle beraber EF üstündeki kareye eşittir. Fakat EF doğru çizgisi EB'ye eşittir. Dolayısıyla CF ile FA içerdiği dikdörtgenin ve AE üstündeki karenin toplamı EB üstündeki kareye eşittir.



XXIV. Şekil

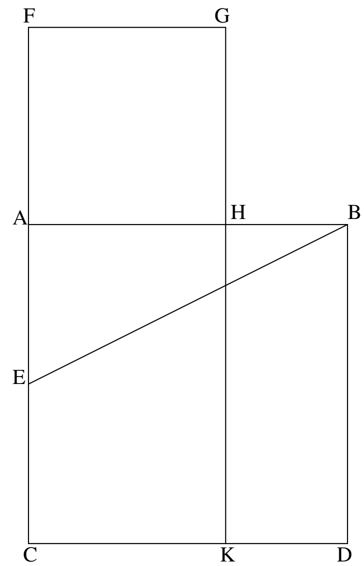
A açısıdik olduğundan, Pitagor teoremini uygulayabiliriz. Dolayısıyla AE ve BA üstündeki iki karenin toplamı EB'ye eşittir. Şu halde, CF ile FA içerdiği dikdörtgen BA üstündeki kareye eşittir.

Pitagor teoreminin uygulaması. Biz Pitagor teoremle beraber, ikinci cüzdeki beşinci veya altıncı önermeyi kullanarak, ayrıca iki önermenin meselerini çözdük, ikinci cüzün onbirincisi ile ondördüncüsü. Beşinci ile altıncı önermenin cebirsel özdeşlikler olduklarını, halbuki daha derin olarak onbirincisi ile ondördüncüsünün cebirsel denklemlerin köklerini verdiklerini vurgulayalım.

Her iki önermede iki mertebeden olan denklemin çözmesi lazım. Her iki önermede benzer yöntem uyguladık, yani ikinci cüzdeki beşinci veya altıncı önermeyi kullanarak iki karenin farkını elimizde ettik. Pitagor teoremini uygulayarak, iki karenin farkının yerine tek bir kareye geçirdik. Kullandığımız üçüncü çüzün otuzyedinci önermesi otuzaltıncısına dayanıyor. Otuzaltıncısın ispatında hem de Pitagor teoremi hem de üçüncü cüzde geliştirilen çemberin nitelikleri uygulanıyor.

Üçüncü cüzün başka kullanacağız ama ispatlamayacağız önermesi otuzikincisidir. Bu önerme düzlemin eğriliğinin sıfır olmasının bir sonuçudur, yani her üçgenin dahil açılarının toplamının iki dik açıya eşit olması ispatında kullanılıyor. Biz muntazam beşgenin çizilmesi için, bu önermeyi uygulayacağız. Bundan dolayı Öklid'in peşinden giderek bizim anlatacağımız beşgenin çizilmesi küresel veya hiperbolik müstevide geçerli değil. Bu geometrilerde basit muntazam çokgenlerin nasıl çizildiğini bilmiyorum. Bu meselenin çözümü hakkında henüz düşünmedim.

Çemberler nitelikleri. Dördüncü cüzün onbirinci önermesinin meselesi tekliğin beşinci kökünün çizilmesidir. Bu meselenin çözülmesi için üçüncü cüzde bulunan yöntemler uygulanıyor, iki çemberin veya bir çember ile bir doğru çizginin arakesitin belirlestiği noktalar kulllanıyor.



XXV. Şekil

Biz kullandığımız üç önermeleri ispatlamadığımız halde, hepsinin iddiasini verelim. Her önerme yakındaki konan şekille anlatılıyor.

III. Cüzdeki 32. Önerme. Bir doğru çizgi bir çemberle temasta bulunursa, ve dokunma noktasıdan çember içindeki çemberi kesişen bir doğru çizgi çizilirse, çizgi ile keşişme noktalardan geçen teğetler beraber yaptiği açılar çemberin karşılıklı kesmesinde oluşan açılara eşit olur.

XXVI. Şekilde bir çember ile EBF teğeti çizilirler. Çemberin içinde bir doğru çizgi BD de çizilir. Bir çemberin kesmesinde bulunan DCB açısı C noktasından bağlı değil ve EBD açısına eşittir. Tabii o zaman diğer kesmesinde oluşan DAB açısı FBD açısına eşittir.

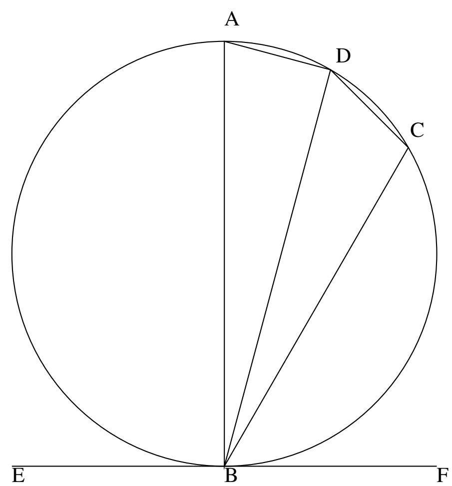
III. Cüzdeki 36. Önerme. Çemberin dışında bir nokta seçilsin. Noktadan iki doğru çizgi geçsin. Çizgilerden birisi çemberi kessin, başkasi çemberle temasta bulunsun. Şu halde çemberi kesen doğru parça ile onun seçilmiş nokta ile çemberin arasındaki parçasının içerdiği dikdörtgen çemberle temasta bulunan doğru parçanın üstüne çizilmiş kareye eşdeğerdir.

XXVII. Şekilde çemberle kesişen doğru parça DA çizgisidir. Nokta ile çember arasındaki parçası DC parçasıdır. Önermenin iddia ettiği eşitlik

$$\overline{DC} \times \overline{DA} = \overline{DB}^2 \tag{C}$$

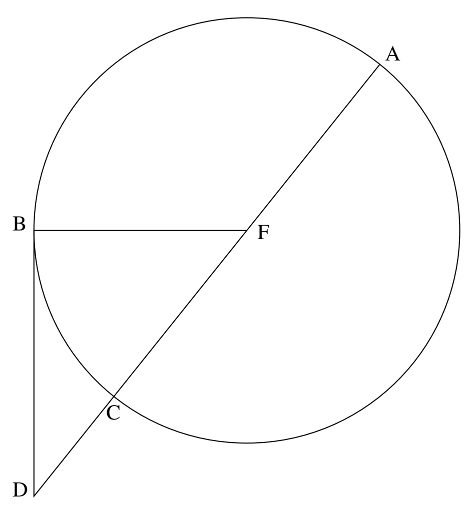
denklemidir.

III. Cüzdeki 37. Önerme. Çemberin dışında bir nokta seçilsin. Noktadan geçen iki doğru çizgiden birisi çemberi kesişsin, başkası çemberden geçsin. Çemberi kesişen bütün doğru *parça ve seçilmiş nokta ile çemberin arasındaki parçasının içerdiği dikdörtgen diğer çemberden geçen doğru parça üstüne çizilmiş kareye eşit ise, çemberden geçen doğru çemberle temasta bulur.*



XXVI. Şekil

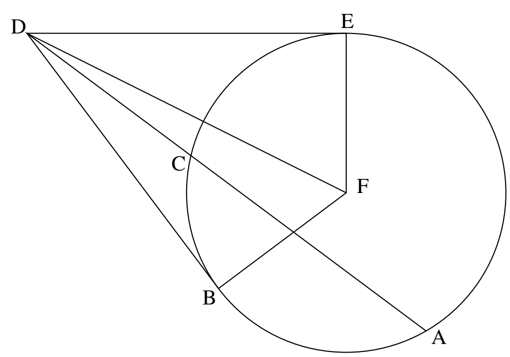
Bu önerme otuzaltıncı önermenin tersidir. Karenin üstüne çizildiği doğru parça D noktası ile çemberde bulunan B noktasını birleştiren doğru parçadır. Dikdörtgen belirten iki doğru çizgi DC ile DA çizgilerdir.



XXVII. Şekil

Şimdi dördüncü cüze geri dönerek, ikinci cüzün onbirinci önermesini kullanarak, dördüncü cüzün onuncu önermesinin meselesini çözürüz. Aradığımız ikizkenari çizelim. Herhangi bir doğru çizgi mesela XXIX. Şekilde gibi AB çizgisiyle başlayarak AB çizgisini C noktasında şöyle keseriz ki AB ile BC içerdikleri dikdörtgen CA çizgisinin üstündeki kareye eşit olur. Merkezi A ve yarıçapı AB olan BDE çemberi çizilsin. Ispatlamadığımız ama zor olmayan dördüncü çüzdeki birinci önermeye göre, bu çemberin çapından daha küçük olan AC çizgiye eşit olan BD doğru çizgiyi çizebiliriz. AD ve DC doğru çizgilerini de çizeriz. Biz Einstein'i düzlem geometrideki çarpan teorimden bahsederken, iddia edilen cüzün beşinci önermesine göre, ACD üçgenin etrafına başka bir çember çizebiliriz.

AC ile BD doğru çizgisi birbirine eşit olduklarından, AB ile BC içerdiği dikdörtgen BD üstündeki kareye eşittir. Bu kadar, çember hakkında olan üçüncü cüzden kaçındık, ama şimdi Öklid'in üçüncü cüzünün son önermesi, otuzyedinci önermeyi uygulanır. Yani B noktası ACD çemberi dışında bulunur. BA doğru çizgisi A noktasında çemberi çaprazlayıp keserek, BD doğru çizgisi çemberi B noktasında keser. AB ile BC içerdiği dikdörtgen BD üstündeki kareye eşit olduğundan, çizgi BD çemberi D noktasında dokunur.



XXVIII. Şekil

Bitmemişiz. Üçüncü cüzde bulunan başka önermeyi uygularız, yani otuzikinci önermesi. XXVI. Şekille iddiasini anlattık. Otuzyedinci önermenin varsayımının cebirsel iddiası otuzaltıncı önermenin sonucu olan (C) denklemidir. Önermenin geometrik ispatını vermeyiz, fakat koordinatlar kullanarak, onu kolay sağlayabiliriz. $D = (0, 0)$ ve $F = (b, 0)$ olsunlar. Çember

$$(x - b)^2 + y^2 = a^2$$

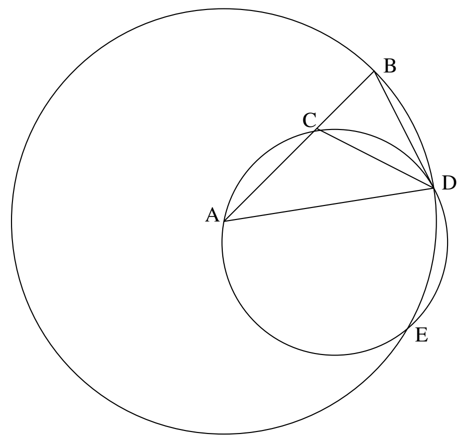
denklemiyle tanımlansın. Şu halde A ile C noktaları elimize geçirmek için, $x = \lambda\alpha$, $y = \lambda\beta$ olsunlar. α ile β sayıları A ile C noktaları bulunduğu doğru çizgi tarafından belirtilmiştir. Bu çizgi verilmiş ise, iki nokta

$$(\lambda\alpha - b)^2 + (\lambda\beta)^2 = a^2$$

denklemi tarafından belirtilir. Bu denklemin iki kökleri λ' ile λ'' sayılarına eşit iseler, $\overline{DC} \times \overline{DA}$ çarpımı $\lambda'\lambda''\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ dir. $\lambda'\lambda''$ çarpımının $(b^2 - a^2)/(\alpha^2 + \beta^2)$ eşit olmasının belli olduğundan dolayı, $\overline{DC} \times \overline{DA}$ çarpımının verilmiş doğru çizgiye bağlı olmaması bellidir. Özellikle

$$\alpha^2 b^2 - (b^2 - a^2)(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

ise, çembere teğet olan doğru çizgi ile B noktası elimize geçir. Dolayısıyla (C) denklemi DB çizgisinin çemberle temasta bulunması eşdeğerdir.



XXIX. Şekil

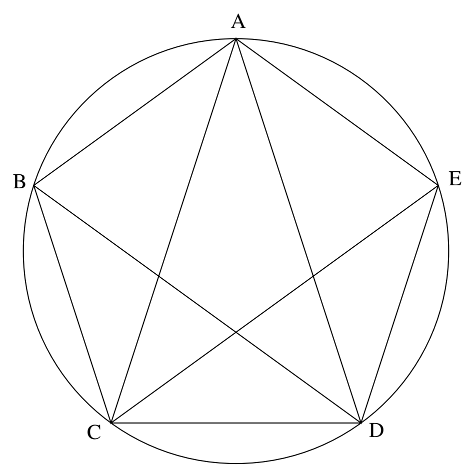
Onuncu önermenin ispatına gene döneriz. XXIX. Şeklinde iki çember var. Üçüncü cüzün otuzikinci önermesini küçük çembere uyguluyoruz. Önermeye göre, BDC açısı karşılıklı DAC açısına eşittir. Dolayısıyla BDA açısı iki açının CDA ile DAC toplamına eşittir. Fakat dış açının BCD da bu toplama eşit olduğundan, BDA ile BCD açıları birbirine eşittir. ABD üçgeninin ikizkenar olduğundan, BDA açısı ABD açısı, veya aynı olarak CBD açısına eşittir. Dolayısıyla DBA açısı da BCD açısına eşittir. Şöyle BDA, DBA ile BCD açılarının hepsi birbirine eşittir. Bundan fazla, DBC ile BCD açılarının birbirine eşit olduğundan, BD ile DC kenarları birbirine eşittir. Fakat BD kenarı CA kenarına eşittir. Bu sebepten, CA kenarı CD kenarına eşittir. Dolayısıyla CDA ile DAC açıları birbirine eşittir. Şu halde CDA ile DAC açılarının toplamı DAC açısının iki mislidir. O zaman BCD açısının CDA açısına veya DAC açısına eşit olduğundan, BCD açısı da CAD açısının iki mislidir. Dolayısıyla üç birbirine eşit olan BCD, BDA, ile DBA açılarından her birisi DAB açısının iki mislidir. Ispat böyle bitmiş.

Onuncu önerme bitmiş olarak, onbirinci önermeyi XXX. Şeklini kullanarak kolay sağlayabiliriz. ACD ile ADC açılarını ikiye bölerek, B ile E noktalarını elimize geçiririz.

Beşinci cüzü atlayarak, altıncı cüze geliyoruz. Hepsiden ziyade, iki mertebeden olan (B) denklemlerinin çözülmesine imkân verip onuncu cüzde geliştirmelere temel atan bu cüzün yirmisekizinci ile yirmidokuzuncu önermesini inceleyeceğiz. Ondan sonra, nihayet onuncu cüze geleceğiz.

Başlayarak yirmisekizinci önermenin iddiasını verelim. Anlatıldığından sonra (B) denklemini nasıl çözdüğünü anlatacağız. Iddianın anlaşılması o kadar kolay değil.

VI. Cüzdeki 28. Önerme. *Verilmiş kenarları doğru olan şekile eşit olan ve verilmiş paralelkenarla aynı şekilde (yani bu paralelkenara benzer) olan paralelkenarın eksiğiyle*olan bir paralelkenarın verilmiş doğru çizginin üstüne konulması. Şöyle, verilmiş kenarları doğru olan şeklin yüzölçümü verilmiş doğru çizginin yarısının üstüne konmuş ve eksiğine benzer olan paralelkenardan daha büyük olamaz.*



XXX. Şekil

XXXI. Şekline bakarak, bu karışık önermeyi anlatalım. Verilmiş kenarları doğru olan şekil C şeklidir. Verilmiş paralelkenar D şeklidir. Verilmiş doğru çizgi AB çizgisi olsun. Önermenin çözümü TS paralelkenarıdır. Fakat bu paralelkenar AB çizgisi üstüne konamaz. Eksiği var, yani QB paralelkenarının eksiğıdır. Eksiği D paralelkenarına benzerdir.

Bu önermenin

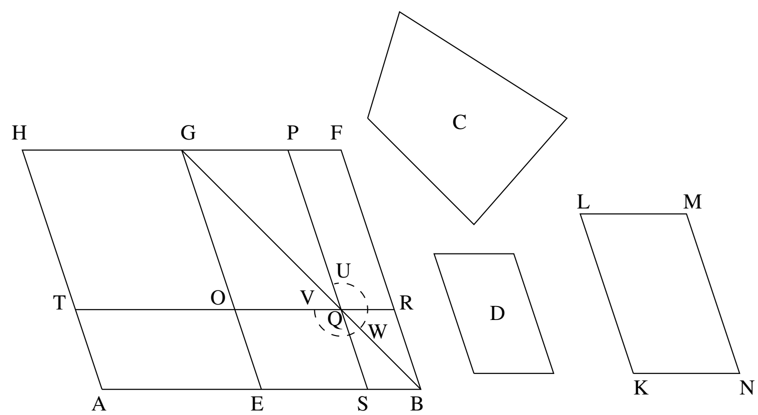
$$ax - \frac{b}{c}x^2 = S$$

denklemini nasıl çözdüğünü Heath anlatır. Verilmiş D paralelkenarı dikdörtgen olsun. QS ile SB oranı bu dikdörtgenin kenarlarının oranıdır. Oranı $c : b$ olsun. QS kenarının uzunluğu x olsun ve verilmiş doğru çizginin uzukluğu a olsun. O zaman eksik bx^2/c sayısına

*Ingilizce çevirmesinde Heath *deficient* (Yunanca ἐλλιπής) ve *defect* (Yunanca ἔλλειμμα) sözleri kullanıyor.

eşittir. Dolayısıyla, C şeklinin alanı S ise,

$$ax - \frac{b}{c}x^2 = S.$$



XXXI. Şekil

Biz iddiasi anlatmış olan önermeyi ispatlayalım. Bazı bu cüzde bulunup daha önce kanıtlanmış olan başka önermeleri kullanarız. Mesela AB çizgisi E noktasında ikiye bölünsün. Altıncı cüzün onsekizinci önermesine göre, ED üstüne D paralelkenarına benzer bir paralelkenar $EBFG$ çizebiliriz. AG paralelkenarı C şekline eşit ise, daha yapılacak şey yok, çünkü AG paralelkenarı C şekline eşittir ve eksiği D paralelkenarına benzer olan GB paralelkenarına eşittir.

AG paralelkenarı C şekline eşit değilse, HE paralelkenarı C şeklinden daha büyük olsun. O zaman, GB de C şeklinden daha büyük olur.

Sonra gelen adım belki ispatın en önemli adımıdır zira bu adımda bir karekök çıkarılır. Yani cüzün yirmibeşinci önermesine göre, C şeklinin GB paralelkenarından eksiğine eşit ve D paralelkenarına benzer olan paralelkenarı $KNML$ çizebiliriz. KM paralelkenarı GB paralelkenarına da benzer olur. GB paralelkenarı KM paralelkenarına benzer olduğundan ve GE ile LK birbirine tekabül ettiklerinden, GE aralığı LK aralığından daha büyüktür. Heath'in anlattığı gibi, Öklid onu ispatlamadan, bu iddiayı kullanır. Heath Öğeler'e uygun ispat verir. Biz Öklid'in peşinden giderek onu ispatlamadan devam ediyoruz.

GE kenarı KL kenarından daha büyük olduğundan GO aralığı KL aralığa eşit olmak üzere O noktasını bulabiliriz. Aynı sebepten, GP aralığı LM aralığına eşit olmak üzere P noktasını bulabiliriz. Ondan sonra, $OGPQ$ paralelkenarı tamamlayabiliriz. Bu paralelkenar KM paralelkenarına benzer ve eşittir, yani ikisinin alanları birbirine eşittir. Dolayısıyla GB paralelkenarına benzerdir. Bu belli olduğunu sandığımız iddia yirmibirinci önerme olarak Öklid tarafından ispatlanmıştır. Cüzün bize tam belli görünen yirmialtıncı önermesine göre, GQ paralkenarları GB paralelkenarı ile beraber ortak köşegeni var.

Anlatalım. GQ ve GB birbirine benzerdir. Üstelik GQ paralelkenar GB paralelkenarının bir açısına konmuş. Şu halde, GQ paralelkenarının köşegeni GB paralelkenarının köşegeninin bir bölümü olur. Şu iddianin ispatına altıncı cüzde benzer şekiller hakkında geliştirilen teorinin gerekli olması bizi hayrette bırakmaz. Ortaokuldaki geometri adeta bu konudan tamamen ibarettir.

XXXI. Şeklinde UWV işaretle gösterilen GB ile GQ farkı γνώμων (gnomon) adlanıyor. Şekil şöyle çizildi ki, BG alanı C şeklinin ile KM paralelkenarının toplamına eşittir. Şu halde, GQ ve KM paralelkenarlarının birbirine eşit olduğundan, UWV gnomonu C şeklinin yüzölçümüne eşittir. Biz ilk defa olarak gnomon kavramına rastlıyoruz, ama Öklid'in Öğeler'inde oldukça önemli bir kavramdır. (Anlaşılan γνώμων sözü sadece "bildiren işaret" diyor.) Her halde evvelden anlatığımız birince cüzün kırküçüncü önermesini göre, gnomonda bulunan PR paralelkenarının yüzölçümü OS paralelkenarına eşittir. Bu iki paralelkenara QB paralelkenarı eklense, yüzölçümleri birbirine eşit olan OB ile PB paralelkenarı elde edilir. Fakat OB paralelkenarı TE paralelkenarına eşittir. Dolayısıyla gnomonun yüzölçümü TS paralelkenarına eşittir. Böylece TS paralelkenarı C paralelkenarına eşittir.

Nihayet verilmiş doğru çizgi AB üstüne, verilmiş C şekline eşit ve eksiği D paralelkenarına benzer QB paralelkenarı olan TS paralelkenarı konmuştur.

Iki yöntem. *Öğeler'inde karekökler çıkarılmak için iki farklı yöntem geliştirilmiş. Birisinde Pitagor teoremi kullanılıyor, başkasında birbirine benzer şekiller teorisi kullanılıyor.*

Bu iddiayı anlatmak için kullandığımız altıncı cüzün yirmibeşinci önermesine geri dönelim.

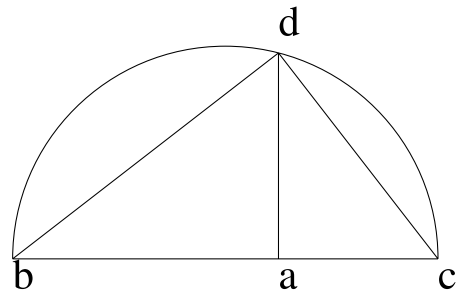
VI. Cüzdeki 25. Önerme. Kenarları doğru olan verilmiş şekile benzer ve verilmiş kenarları doğru olan başka şekile eşit olan bir şeklin çizilmesi.

Özellikle, birinci verilmiş şekil bir kare ise ve ikinci verilmiş şekil dikdörtgen ise, bu önerme ikinci cüzün ondördüncü önermesinin başka bir çözümü ileri sürür. Dolayısıyla önermenin ispatında karekök çıkarması saklanır. Nerede? İspatta çüzün onüçüncü önermesi kullanılır.

Biz bu önermenin iki verilmiş aralığın orta orantılısının bulunması hakkında olduğunu evvelden anladık. Iki verilmiş aralık AB ile CD olsunlar.

$$\overline{EF}^2 = \overline{AB} \times \overline{CD}$$

denklemini çözen aralık EF aranıyor. Yani karekök aranıyor. Bildiğimiz gibi uygun dik açi ücgenin yardımla bulunabilir. XXXII. Şeklinde üç üçgen bda, cda ve abc birbirine benzer olduğundan $ad^2 = bd \times dc$. bd ile dc uzunlukları verilmiş ise, biz uygun üçgen çizebiliriz, yani üçüncü cüzde geliştirilmiş çember hakkında olan teoriye göre, çapı bc olan yarım çember çizebiliriz ve ac doğrusuna dik olan çizgiyi çizerek, d noktasını elde ediyoruz.



XXXII. Şekil