DES TRACES STABLE

LES DÉBUTS D'UNE FORMULE DES TRACES STABLE[†]

by

R. P. Langlands

[†] Appeared originally in the series *Publications mathématiques de l' Université Paris VII*

Avant-Propos

Bien qu'une formule des traces stable générale n'existe pas encore, des cas particuliers ont été établis et les efforts faits pour la prouver ont mené à d'autres recherches moins provisoires. Il n'est peut-être pas tout à fait inutile d'en motiver l'étude. C'est le but de ces notes, qui ont pour origine des conférences données à l'École Normale Supérieure de Jeunes Filles au printemps l980 et je voudrais remercier M.-F. Vigneras de m'avoir donné l'occasion de réfléchir encore sur ces problèmes. Une partie des notes a été rédigée ensuite pendant un séjour à l'Université de Bonn sous l'égide du SFB et je voudrais remercier tout son équipe, mais surtout G. Harder, de son hospitalité. Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à J.-P. Labesse pour l'aide et l'encouragement qu'il m'a apportés.

Présentation

En principe la formule des traces exprime la trace comme une somme sur les classes de conjugaison d'un groupe $G(F)$, F étant un corps global et G un groupe réductif. Donc si l'on veut par exemple comparer la trace pour un groupe quasi-déployé G^* et pour une forme intérieure G comme on l'a fait dans [7] il faut trouver une application naturelle de l'ensemble des classes de conjugaison de $G(F)$ dans celui des classes de $G^*(F)$, ce qui est en général impossible.

En revanche, si on passe aux classes de conjugaison stables une telle application existe et est facile à définir. Par conséquent pour imiter les méthodes de [7] il faut d'abord trouver une formule des traces qui s'exprime comme somme sur les classes de conjugaison stables, ce que j'appelle une formule stable. Une telle formule est ébauchée dans ces notes, mais avec de grandes et importantes lacunes.

Pour motiver son introduction nous commençons dans le Chapitre 1 par le groupe $SL(2)$, qui a été traité d'une façon impitoyablement détaillée dans [13]. On rappelle rapidement le principe de fonctorialité, et après avoir formulé les résultats locaux nécessaires, on donne la formule des traces stable pour le groupe $SL(2)$ avec une petite application, pour la rendre plus piquante.

Les deux chapitres suivants sont surtout un exposé des travaux de Shelstad. Les groupes endoscopiques sont introduits et le problème du transfert des intégrales orbitales est abordé. Bien que ce soit un des problèmes fondamentaux de la théorie, il n'a été résolu que pour les groupes réels.

C'est la différence entre conjugaison et conjugaison stable qui donne naissance aux L-paquets. Le chapitre IV contient un aperçu des résultats acquis sur eux jusqu'à présent. Dans le chapitre V quelques applications de la formule des traces sont suggérées.

Alors que les premiers chapitres sont, je l'espère, d'un accès facile, les derniers sont tout à fait techniques et ne peuvent intéresser que des spécialistes. J'y ai fait un effort sérieux pour montrer comment on remanie la formule des traces habituelle afin d'obtenir une formule stable. Les problèmes locaux n'étant pas encore résolus il a fallu admettre comme hypothèse l'existence des facteurs de transfert.

Les remaniements doivent tenir compte du fait qu'un sous-groupe de Cartan de G^* peut "relever" de G localement partout sans en "relever" globalement, ce qui nous force à introduire les invariants des chapitres VI et VII et à développer leurs propriétés, et enfin à admettre des hypothèses locales et globales sur les facteurs de transfert, que pour l'instant seules la cohérence et la nécessité justifient. Le Lemma 7.6 me semble néanmoins ne pas être trivial.

Dans le chapitre VIII, sur la base de ces hypothèse et en négligeant la contribution des pointes nous déduisons une formule des traces stable. Puisque les hypothèses nous permettent de surmonter les problèmes venant des sous-groupes de Cartan de G^* qui ne "relèvent" pas de G le remaniement est assez facile et la seule difficulté sérieuse est de vérifier le Lemma 8.6.

Table des Matieres

I. Introduction

Le problème de L-indiscernabilité s'est manifesté pour la première fois dans l'étude des variétés de Shimura où son apparition est assez fâcheuse, parce qu'elle embrouille encore plus des choses déjà difficiles à comprendre. Il semble toutefois que l'on ne peut pas la contourner et qu'elle intervient chaque fois que l'on veut comparer deux formules des traces ou une formule des traces et une formule de Lefschetz. En revanche on pourra peut-être tirer avantage de son apparition dans la théorie des représentations et des formes automorphes pour vérifier le principe de fonctorialité dans un nombre assez grand de cas particuliers.

Mais il y a des choses à souligner avant de commencer. D'abord, quoique ces cas particuliers comprennent des exemples très divers et en toute dimension, on ne réussira jamais avec seulement la L-indiscernabilité à atteindre le but le plus profond du principe de fonctorialité, qui est de remplacer chaque fonction L avec une partie galoisienne, par exemple chaque fonction L d'Artin, par une fonction L entièrement automorphe. Il s'agit donc d'exemples banals, pas dans le sens strict du mot et surtout pas dans un sens dépréciatif, mais dans un sense uniquement technique.

De plus l'idée d'exploiter la L-indiscernabilité exigera de longs efforts pour être menée à bien, et nous n'en sommes qu'aux débuts. Mais on a vérifié assez de théorèmes pour en parler, et ce qui est plus important les problèmes qui s'y posent sont plus terre à terre que la problème général et on peut les aborder dès à présent.

Il faut commencer en rappelant ce qu'est le principe de fonctorialité et en particulier ce qu'est le L-groupe. Ensuite je rappelerai d'une façon assez rapide ce qui se trouve dans l'article de Labesse et moi-même [13] parce qu'il est à l'origine des développements ultérieurs, et alors nous pourrons passer dans les chapitres suivants à l'idée générale et aux résultats de Shelstad, Kottwitz, Rogawski.

1. Le L-groupe

Un L-groupe est un produit semi-direct d'un groupe algébrique réductif connexe, noté ${}^LG^0$, et d'un groupe de Galois, $\mathrm{Gal}(K/F)$, ou d'un groupe de Weil. Pour l'instant je préfère prendre ${}^LG^0$ sur $\mathbf{C}$ et j'identifie ${}^LG^0$ avec le groupe de ses points complexes. Je préfère aussi prendre un groupe de Galois et je suppose que K est une extension finie de F. Un L-groupe

$$ {}^LG = {}^LG^0 \rtimes \mathrm{Gal}(K/F) $$

devient alors un groupe de Lie complexe. A chaque groupe réductif connexe sur F, et noté bien sûr G, est attaché un L-groupe d'une façon que je ne veux pas expliciter maintenant mais pour laquelle je renvoie à mon exposé de Washington ou à l'exposé de Borel au séminaire Bourbaki.

Donnons quelques exemples:

a) l'exemple standard: Soit G le groupe $GL(n)$. Alors ${}^LG^0 = GL(n, \mathbf{C})$ et on peut prendre $K = F$ de façon que

$$ {}^LG = GL(n, \mathbf{C}) $$

b) A chaque extension finie E de F on attache un groupe algébrique commutatif réductif connexe E^* sur F tel que le groupe des points de E^* dans F est égal à $E^\times$. Le groupe E^* s'obtient à partir de $GL(1)$ en restreignant les scalaires de E à F. Son groupe de poids, $X^*(E^*) = \mathrm{Hom}(E^*, GL(1))$ est isomorphe au module induit $\mathrm{Ind}(\mathrm{Gal}(K/F), \mathrm{Gal}(K/E), \mathbf{Z})$, où K est une extension finie de F contenant E. Le module dual est le module de co-poids $X_*(E^*)$ et

$$ {}^LG = \mathrm{Hom}(X_*(E^*), \mathbf{C}^\times) $$

Le groupe $\mathrm{Gal}(K/F)$ agit sur $X^*(E_*)$ et $X_*(E^*)$, et par conséquent sur ${}^LG^0$, on pose

$$ {}^LG = {}^LG^0 \rtimes \mathrm{Gal}(K/F) \ . $$

D'une façon plus concrète, ${}^LG^0$ est le groupe des fonctions sur l'ensemble $\mathrm{Gal}(K/E)\backslash\mathrm{Gal}(K/F)$ à valeur dans $\mathbf{C}^\times$. Soit $g(\rho)$ la valeur de g au point ρ. Alors la valeur de $\sigma(g)$ au point ρ est $g(\rho\sigma)$.

Si le degré de l'extension E/F est n, on a un plongement γ de ${}^LG$ dans $GL(n)$. Soient $\rho_1, \ldots, \rho_n$ des représentants à droite de $\mathrm{Gal}(K/F)$ modulo $\mathrm{Gal}(K/E)$. On envoie g dans ${}^LG^0$ sur la matrice diagonale

$$ \begin{pmatrix} g(\rho_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(\rho_n) \end{pmatrix} $$

Les σ dans $\mathrm{Gal}(K/F) \subseteq {}^LG$ s'envoient sur les matrices de permutation convenables.

c) G soit un groupe spécial unitaire à trois variables ou une forme intérieure d'un tel groupe. G se définit de la façon suivante: on prend une extension quadratique séparable E de F, une algèbre simple M de dimension 9 sur E et une involution α de M de deuxième espèce, de façon que α induise l'automorphisme non-trivial de E sur F et on pose

$$ G = \{x \in M \mid \alpha(x) = x^{-1} \text{ et } \mathrm{Nm}\, x = 1\} \ . $$

Si M est l'algèbre de matrices de rang 3, alors G est un groupe unitaire ordinaire, mais le cas général présentera des aspects intéressants. La composante connexe ${}^LG^0$ de son L-groupe est $PGL(3, \mathbf{C})$. Le groupe $\mathrm{Gal}(E/F) = \{1, \sigma\}$ agit sur ${}^LG^0$ en posant $(g) = g'$ si g est représenté par la matrice A et g' par la matrice

$$ A' = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} {}^tA^{-1} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} $$

On obtient le L-groupe en prenant le produit semi-direct ${}^LG = {}^LG^0 \times \mathrm{Gal}(E/F)$.

Si on a défini le L-groups de n'importe quel groupe G par rapport à l'extension K et si $F \subset K \subset K'$ alors le L-groupe par rapport à K' se définit comme un nouveau produit semi-direct ${}^LG^0 \rtimes \mathrm{Gal}(K'/F)$, l'action de $\mathrm{Gal}(K'/F)$ sur ${}^LG^0$ étant définie par l'homomorphisme $\mathrm{Gal}(K/F) \to \mathrm{Gal}(K'/F)$. On se réserve toujours le droit de remplacer le corps K par un corps plus grand. Par exemple, si K est n'importe quelle extension galoisienne finie de F alors le L-groupe de $GL(n)$ par rapport à K est le produit direct

$$GL(n, \mathbf{C}) \times \mathrm{Gal}(K/F) \ .$$

Soient ${}^LH$ et ${}^LG$ deux L-groupes et ξ la projection naturelle de ${}^LH$ ou de ${}^LG$ sur $\mathrm{Gal}(K/F)$. Un L-homomorphisme ψ: ${}^LH \to {}^LG$ est un homomorphisme de groupes de Lie complexes qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} {}^LH \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\xi"'] & & {}^LG \arrow[dl, "\xi"] \\ & \mathrm{Gal}(K/F) & \end{tikzcd}$$

Par exemple si $H = E^*$ et $G = GL(n)$ on peut prendre

$$\psi(h) = \gamma(h) \times \xi(h)$$

où γ a été défini en (b) ci-dessus.

d) Soit G un des groupes de (c) et soit H le groupe $PGL(2)$. Son L-groupe par rapport à l'extension E est le produit direct ${}^LH = SL(2, \mathbf{C}) \times \mathrm{Gal}(E/F)$. On voudrait définir un L-homomorphisme, et même un L-plongement, de ${}^LH$ dans ${}^LG$ par

$$\psi\colon h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in {}^LH^0 \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} \in {}^LG^0$$

$$\psi\colon \sigma \neq 1 \in \mathrm{Gal}(E/F) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \times \sigma \in {}^LG$$

Mais le carré de $\psi(\sigma)$ devrait être 1 et il est en l'occurrence

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Donc pour rendre cette définition possible il faut remplacer les L-groupes relatifs aux groupes de Galois par des L-groupes relatifs aux groupes de Weil:

$${}^LH = {}^LH^0 \times W_{E/F} \qquad {}^LG = {}^LG^0 \rtimes W_{E/F} \ .$$

Lorsque E est un corps local notons C_E le groupe E^* et pour un corps global notons C_E le groupe des classes d'idèles. On a une suite exacte

$$1 \to C_E \to W_{E/F} \to \mathrm{Gal}(E/F) \to 1$$

et comme par hypothèse E/F est quadratique $W_{E/F}$ est engendré par C_E et σ où $\sigma^2 = \alpha \in C_F$ n'est pas une norme de C_E. Pour définir ψ on choisit un caractère χ de C_E qui prend la valeur -1 à α et 1 sur les normes de C_E de façon que $\chi(z)^{-1} = \chi(\sigma(z))$ et on pose

$$\psi(z) = \begin{pmatrix} \chi(z) & & \\ & 1 & \\ & & \chi(z) \end{pmatrix}, \quad z \in C_E \ .$$

e) Le groupe H de (d) est aussi un groupe projectif unitaire à deux variables et par conséquent le quotient d'un groupe unitaire H_1 dont le L-groupe est encore un produit semi-direct

$$^L H_1 = GL(2, \mathbf{C}) \rtimes \mathrm{Gal}(E/F)$$

ou $\sigma \neq 1 \in \mathrm{Gal}(E/F)$ agit sur $GL(2, \mathbf{C})$ par

$$\sigma\colon A \longmapsto \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} {}^t A^{-1} \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

les formules de (d) définissent aussi un plongement $^L H_1 \hookrightarrow {}^L G$.

2. Le principe de fonctorialite

Soit F maintenant un corps global, et même un corps de nombres. Soient A l'anneau des adèles de F et G un groupe réductif connexe. Si on a une représentation automorphe de $G(\mathbf{A})$ on attache à presque toute place finie $\mathfrak{p}$ de F une classe de conjugaison $\Theta(\pi_\mathfrak{p}) = \{t(\pi_\mathfrak{p})\}$ dans $^L G$ de telle sorte que l'image $\xi(\Theta(\pi_\mathfrak{p}))$ de $\Theta(\pi_\mathfrak{p})$ dans le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/F)$ ou dans le groupe de Weil soit la classe de Frobenius.

Donnons encore des exemples

a) Si $G = GL(1)$ alors π est un caractère χ de $G(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^\times = I$ qui est trivial sur $F^\times$. Ce caractère χ est non ramifié presque partout. S'il est non ramifié à $\mathfrak{p}$ et si $\varpi_\mathfrak{p}$ une uniformisante à la place $\mathfrak{p}$ on pose

$$t(\pi_\mathfrak{p}) = \chi(\varpi_\mathfrak{p})$$

Il fait observer que presque partout la fonction L locale attachée à χ est égale à

$$\frac{1}{1 - t(\pi_\mathfrak{p})|\varpi_\mathfrak{p}|^s}$$

b) Si G est $GL(2)$ alors, en suivant Hecke et Maaß mais avec un petit décalage, on attache à π une fonction $L(s,\pi)$ qui est un produit eulérien de degré 2 avec une équation fonctionnelle dont l'axe de symétrie est la ligne $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$. Le facteur local à une place finie est

$$\frac{1}{(1-\alpha(\mathfrak{p})|\varpi_{\mathfrak{p}}|^s)(1-\beta(\mathfrak{p})|\varpi_{\mathfrak{p}}|^s)}$$

Alors presque partout $\Theta(\pi_{\mathfrak{p}})$ est la classe de

$$t(\pi_{\mathfrak{p}}) = \begin{pmatrix} \alpha(\mathfrak{p}) & 0 \\ 0 & \beta(\mathfrak{p}) \end{pmatrix}$$

c) Soit E une extension quadratique de F et soit G le groupe E^*. La représentation π est alors un caractére χ de I_E trivial sur $E^\times$. Si $\mathfrak{p}$ est une place finie de F il y a deux possibilités: soit $\mathfrak{p}$ se décompose dans E, soit il reste premier. S'il se décompose, le Frobenius est trivial et $\Theta(\pi_{\mathfrak{p}})$ est contenu dans ${}^LG^0 = \mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^\times$. Si $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ sont les deux places de E divisant $\mathfrak{p}$ alors $\Theta(\pi_{\mathfrak{p}})$ est la classe de $\chi(\varpi_{\mathfrak{p}_1}) \times \chi(\varpi_{\mathfrak{p}_2})$. Cette classe ne contient que deux éléments, l'autre étant $\chi(\varpi_{\mathfrak{p}_2}) \times \chi(\varpi_{\mathfrak{p}_1})$. Si $\mathfrak{p}$ ne se décompose pas le Frobenius est non trivial et

$$\Theta(\pi_{\mathfrak{p}}) = \{a \times b \times \sigma \;\big|\; ab = \chi(\varpi_{\mathfrak{p}})\}\ .$$

Le principe de fonctorialité dans une forme crue peut s'énoncer de la façon suivante.

Soient ${}^LH$ et ${}^LG$ deux L-groupes attachés aux groupes H et G et supposons que G soit quasi-déployé. Soit de plus $\psi : {}^LH \to {}^LG$ un L-homomorphisme et π une représentation automorphe de H. Il existe alors une représentation automorphe $\Pi = \psi_*(\pi)$ de G, appelée (au moins par moi) *une ψ-image de π, telle que $\Theta(\Pi_p) \supset \psi(\Theta(\pi_p))$ pour presque tout p.*

Cette forme ne peut pas être la forme définitive, parce que deux représentations automorphes qui sont équivalentes presque partout ne sont pas toujours équivalentes.

Des cas particuliers du principe de fonctorialité, bien que pas toujours reconnus comme tels, commencent à jaillir partout, parfois comme conjectures fondées sur des calculs, parfois comme théorèmes dèmontrés en utilisant les séries thêta ou la représentation de Weil, et l'habitude d'appeler une ψ-image un relèvement (en anglais “lifting”) s'enracine. Si l'on y réfléchit on s'aperçoit que ce mot n'exprime pas bien ce qui se passe. Pour garder son sens géométrique je préfère n'appeler “relèvement” que les ψ-images provenant d'un changement de base.

3. Le groupe $SL(2)$

Soient d'abord $G = GL(2)$ et $H = E^*$ où E est une extension quadratique du corps de nombres F. Nous avons déjà défini un plongement ψ: ${}^LH \to {}^LG$, et il est bien connu qu'une ψ-image $\psi_*(\pi)$ existe pour chaque représentation automorphe π de $H(A)$. On peut le vérifier de diverse façons, en utilisant soit les série thêta (la représentation de Weil), soit la théorie de Hecke, soit la formule des traces. La formule des traces peut s'utiliser de plus d'une façon. Je vais décrire d'abord un cas particulier de la formule des traces stable et puis expliquer comment l'existence de la ψ-image s'en déduit.

La formule des traces pour $GL(2)$ est déjà stabilisée et on ne peut rien faire avec elle seule. Il faut remplacer $GL(2)$ par $G = SL(2)$ et H par le groupe des éléments de norme 1 dans E^*. Le L-groupe ${}^LG$ est alors $PGL(2)$ et le L-groupe ${}^LH$ est le quotient de ${}^LE^*$ par le sous-groupe diagonal $\{(x,x) \mid x \in \mathbf{C}^\times\} \subseteq \mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^\times \subseteq {}^LE^0$. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} {}^LE & \xrightarrow{\psi} & GL(2) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ {}^LH & \xrightarrow[\psi]{} & PGL(2) \end{array}$$

qui sert à définir le nouveau ψ. Il suffit de vérifier le principe de fonctorialité pour lui, celui pour l'ancien ψ en étant une conséquence presque immédiate.

4. Intégrales orbitales

Nous commençons par des préparatifs locaux. Supposons pour l'instant que F est un corps local et soit T un sous-groupe de Cartan de G défini sur F. Si γ est un élément régulier de T et f une fonction lisse sur $G(F)$ à support compact on pose

$$\Phi_T(\gamma, f) = \int_{T(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)dg$$

C'est l'intégrale orbitale bien connue. Nous allons introduire aussi les intégrales orbitales stables. Soient $\tilde{G} = GL(2)$ et $\tilde{T}$ le centralisateur de T dans $GL(2)$. Posons

$$\vartheta(T/F) = \vartheta(T) = \tilde{T}(F) \setminus \tilde{G}(F)/G(F).$$

C'est un ensemble, et même un groupe fini, contenant un élément si T est déployé et deux s'il ne l'est pas. L'intégrale orbitale stable est définie par

$$\Phi_T^{st}(\gamma, f) = \sum_{\delta \in \vartheta(T)} \Phi_T a(\gamma^a, f)$$

où a est un représentant de δ dans $\tilde{G}(F)$ et $\gamma^a = a^{-1}\gamma a, T^a = a^{-1}Ta$.

Nous dirons qu'une distribution sur $G(F) = SL(2,F)$ est stablement invariante si elle est fixée par $GL(2,F)$, qui agit par automorphismes intérieurs sur son sous-groupe invariant $SL(2,F)$. Il est évident que la distribution

$$f \longmapsto \Phi_T^{st}(\gamma, f)$$

est stablement invariante.

Nous voudrons étendre la notion d'invariance stable à tout groupe réductif connexe. Pour cela il faut utiliser une autre définition.

Invariance stable (Définition correcte). *Une distribution invariante est dite stablement invariante si elle se trouve dans la clôture pour la topologie faible de l' espace linéaire engendré par les distributions* $f \to \Phi_T^{st}(\gamma, f)$, γ *étant un élément régulier dans* $G(F)$ *et* T *le tore qui le contient.*

Problème. Vérifier que pour $SL(2)$ (et même $SL(n)$) les deux définitions d'invariance stable sont équivalentes.

Si γ est régulier de valeurs propres γ_1 et γ_2, posons

$$\Delta(\gamma) = |(\gamma_1 - \gamma_2)^2|_F^{1/2}$$

Si T est déployé, la fonction

$$f^T(\gamma) = \Delta(\gamma)\Phi_T(\gamma, f)$$

s'étend à tout le groupe $T(F)$ en une fonction lisse à support compact. Si T n'est pas déployé, il y a une extension quadratique E_T attachée à T et un caractère quadratique ω_T de $F^\times$ attaché à E_T. Nous fixons un élément régulier γ^0 dans $T^0(F)$ et nous posons

$$f^T(\gamma) = \omega_T\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1^0 - \gamma_2^0}\right)\Delta(\gamma)\{\Phi_T(\gamma, f) - \Phi_{T^a}(\gamma^a, f)\}$$

si a est un représentant de l'élément non-trivial de $\vartheta(T)$. La fonction f^T, elle aussi s'étend à tout le groupe $T(F)$ en fonction lisse.

On dispose d'un homomorphisme

$$\psi\colon\ {}^LT \longmapsto {}^LG\ .$$

Si T n'est pas déployé, alors T est le groupe des éléments de norme 1 de E_T^* et ψ a déjà été défini; si T est déployé alors $T \simeq GL(1)$ et ${}^LT = GL(1, \mathbf{C}) = \mathbf{C}^*$, nous posons

$$\psi\colon\ z \in GL(1, \mathbf{C}) \longrightarrow \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

5. Fonctions sphériques

Le corps F est maintenant non archimédien. On se souvient que si G est un groupe réductif connexe sur F quasi-déployé et déployé sur une extension non ramifiée, alors l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_G$ est l'algèbre des fonctions à support compact et invariantes à gauche et à droite par rapport à un sous-groupe compact hyperspécial (pour les fondements de la théorie des représentations automorphes le lecteur consultera au besoin les comptes-rendus de Corvallis [1]). On peut prendre le L-groupe par rapport à une extension non ramifiée, et $\mathcal{H}_G$ est isomorphe à une algèbre de fonctions sur ${}^LG^0 \times \Phi \subseteq {}^LG$, Φ étant le Frobenius. Ce sont plus précisément les fonctions rationnelles régulières et invariantes. Si G est $SL(2)$ on peut prendre l'extension triviale.

Si l'on veut être concret, on utilise la représentation adjointe pour plonger ${}^LG^0 = PGL(2, \mathbf{C})$ dans $GL(3, \mathbf{C})$. Alors la fonction $g \to$ trace (g) engendre l'algèbre des fonctions régulières et invariantes. Elle correspond à l'opérateur $aT_{p^2} + b$ de la théorie classique, a et b étant des constantes convenables. L'opérateur classique T_p existe pour $GL(2)$ seulement, pas pour $SL(2)$.

Si f est une fonction sphérique, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{H}_G$, soit $\hat{f}$ la fonction correspondante sur ${}^LG^0 \times \Phi$. Supposons que si H est aussi quasi-déployé et déployé sur une extension non ramifiée et, soit ψ un L-homomorphisme non ramifié de ${}^LH$ dans ${}^LG$. Donc ψ se définit par un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} {}^LH \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\xi"'] & & {}^LG \arrow[dl, "\xi"] \\ & \mathrm{Gal}(K/F) & \end{tikzcd}$$

où K/F est non ramifié. Le L homomorphisme ψ étant donné, on définit un homorphisme $f \mapsto \psi^*(f) = f_1$ de $\mathcal{H}_G$ dans $\mathcal{H}_H$ par la condition

$$\hat{f}_1(h) = \hat{f}(\psi(h))$$

si $h \in {}^LG$ et $\xi(h) = \Phi$.

Cet homomorphisme ψ^* est défini pour n'importe quel L-homomorphisme non ramifié ψ, mais nous revenons maintenant au cas particulier du groupe $G = SL(2)$, où H est un sous-groupe de Cartan T, soit déployé soit attaché à une extension quadratique non ramifiée, et où ψ est le L-homomorphisme défini plus haut. On a le lemme suivant qui est fondamental pour la suite bien que facile à vérifier.

Lemme 1.1. *Si f est une fonction sphérique, alors f^T est égal à $\pm\psi^*(f)$.*

Le signe est positif si $\mathcal{H}_G$ est défini par rapport à un sous-groupe compact maximal K tel que $T(F) \cap K$ est un sous-groupe compact maximal de $T(F)$.

6. La Formule des traces stable

Soit de nouveau F un corps global et pour chaque place v de F soit f_v une fonction lisse sur $G(F_v)$ à support compact. Nous supposons que presque partout f_v est la fonction charactéristique de $G(O_v)$ divisée par sa mesure, de façon qu'on peut poser

$$f(g) = \prod_v f_v(g_v) \qquad g \in G(A) \ .$$

Si T est un sous-groupe de Cartan sur F on pose

$$f^T(t) = \prod_v f_v^\gamma(t_v) \qquad t \in T(A) \ .$$

Le lemme fondamental nous assure que f^T est bien défini.

Une distribution sur $G(\mathbf{A})$ sera une application $f \to \Theta(f)$, $\Theta(f) \in \mathbf{C}$, qui est linéaire et continue en chaque f_v. On dit que Θ est invariante (resp. stablement invariante) si elle est invariante (resp. stablement invariante) en chaque f_v. Le groupe $G(\mathbf{A})$ agit sur $L^2(G(F) \setminus G(\mathbf{A}))$. On pose

$$\mathcal{T}(f) = \sum_\pi m(\pi) \text{ trace } \pi(f) \ ,$$

$m(\pi)$ étant la multiplicité avec laquelle la représentation irréductible π intervient dans l'espace $L^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A}))$. On se rend compte que le spectre continu est écarté.

La formule des traces donne une formule plus ou moins explicite pour $\mathcal{T}(f)$. Elle nous permet d'écrire

$$\mathcal{T}(f) = \mathcal{ST}(f) + \frac{1}{4}\sum_T \left\{ \mathcal{ST}(f^T) - \sum_{\Theta \in E_T^G} \theta(f^T) \right\} .$$

La distribution $f \rightarrow \mathcal{ST}(f)$ est stablement invariante et c'est cela seulement qui nous importe à présent. La sommation sur T porte sur des représentants des classes de conjugaison stable de sous-groupes de Cartan elliptiques, deux sous-groupes de Cartan, T et T', étant stablement conjugués si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite:

a) Il existe $g \in G(\hat{F})$ tel que $T' = g^{-1}Tg = T^g$ et le morphisme $t \rightarrow g^{-1}tg = t^g$ est défini sur F.

b) Il existe $g \in GL(2, F)$ el que $T' = g^{-1}Tg$.

La définition (a) se transporte au cas général.

Le quotient $T(F) \setminus T(\mathbf{A})$ est compact et la représentation de $T(\mathbf{A})$ dans $L^2(T(F) \setminus T(\mathbf{A}))$ se décompose en une somme discrète de caractères. Soit $\mathcal{T}(f^T)$ la trace de f^T dans $L^2(T(F) \setminus T(\mathbf{A}))$. Puisque T est abélien, la distribution $f \rightarrow \mathcal{T}(f^T)$ sur $T(\mathbf{A})$ est stablement invariante et pour des raisons qui apparaîtrons ultérieurement nous posons $\mathcal{ST}(f^T) = \mathcal{T}(f^T)$.

L'ensemble E_T^G ne contient que le caractère trivial de $T(f) \backslash T(\mathbf{A})$. Pour justifier la notation, il faut expliquer la signification du terme

$$\sum_{\theta \in E_T^G} \theta(f^T) \ . \tag{1.1}$$

Je vais utiliser des résultats locaux précis tirés de Labesse-Langlands, cependant je veux souligner qu'on n'en a pas besoin pour vérifier le principe de fonctorialité. Pour cela il ne faut que le lemme fondamental et la formule des traces stabilisée. On peut même sans doute en déduire les résultats locaux. Ce n'est que pour éclaircir l'intervention des termes correctifs (1.1) que je les anticipe.

L'image par l'application$f_v \rightarrow f_v^T$ d'une fonction lisse à support compact sur $G(F_v)$ est une fonction lisse à support compact sur $T(F_v)$. L'application duale, $\Theta^T \rightarrow \Theta$, envoie un distribution sur $T(F_v)$ sur une distribution invariante sur $G(F_v)$. Soit $\Theta^T = \theta_v$ un caractère. Alors le principe de fonctorialité local, qui est acquis mais dont on n'aura pas besoin dans la suite, attache à θ_v un ensemble fini de ψ-images de θ_v, dit un L-paquet et noté $\psi_*(\theta_v)$. L'application duale envoie θ_v sur une somme

$$\sum_{\pi_v \in \psi_*(\theta_v)} s(\pi_v)\chi_{\pi_v}$$

où χ_{π_v} est le caractère de la représentation irréductible π_v et les $s(\pi_v)$ sont des numbres complexes.

Revenons au cas global. Une ψ-image du caractère θ au sens strict est un produit tensoriel $\pi = \otimes_V \pi_v$, où pour chaque v la représentation π_v est dans le L-paquet $\psi_*(\theta_v)$ et où pour presque tout v cette représentaiton est non ramifiée. L'ensemble des ψ-images sera noté $\psi_*(\theta)$ et appelé la ψ-image de θ. C'est un L-paquet global. Bien sûr, on ne distingue pas les représentations irréductibles équivalentes. On a une égalité

$$\theta(f^T) = \sum_{\pi \in \psi_*(\theta)} s(\pi)\chi_\pi(f)$$

où les coefficients sont des nombres complexes.

Le groupe $T(\mathbf{A})$ s'identifie au groupe des idèles de $E = E_T$ de norme 1. Les éléments de $\psi_*(\theta)$ sont des représentations eisensteiniennes si et seulement si θ s'étend en un caractère de $E^x \setminus I_E$ qui se factorise par la norme,

$$\mathrm{Nm}\colon I_E \to I_F \ ,$$

c'est-à-dire, si et seulement si θ est trivial.

La formule des traces stabilisée s'écrit

$$\mathcal{T}(f) = \mathcal{ST}(f) + \frac{1}{4}\sum_T \left\{ \mathcal{ST}(f^T) - \sum_{\theta \in E_T^G} \theta(f^T) \right\} \tag{1.2}$$

et

$$\mathcal{ST}(f^T) = \sum_\theta \theta(f^T) = \sum_\theta \sum_{\pi \in \psi_*(\theta)} s(\pi)\chi_\pi(f) \ ;$$

les sommes sont absolument convergentes. La trace à gauche

$$\mathcal{T}(f) = \sum m(\pi)\chi_\pi(f)$$

ne contient aucune représentation eisensteinienne sauf la représentation triviale. Pour les écarter du côté droit il faut enlever de

$$\mathcal{ST}(f^T) = \sum_\theta \theta(f^T)$$

chaque caractère θ de $T(F) \setminus T(\mathbf{A})$ qui devient eisensteinien sur G.

7. Application au principe de fonctorialité

Tout ceci étant dit à titre d'explication préliminaire, oublions le et revenons à la formule (1.2) sans résultats locaux précis. Pour libérer les symbols T et θ nous écrivons

$$\mathcal{T}(f) = \mathcal{ST}(f) + \frac{1}{4}\sum_H \left\{ \mathcal{ST}(f^H) - \sum_{\eta \in E_H^G} \eta(f^H) \right\}$$

Le groupe T sera un sous-groupe de Cartan elliptique donné et nous voulons vérifier le principe de fonctorialité dans sa forme crue pour le L-homomorphisme ψ: ${}^LT \to {}^LG$ que nous avons déjà décrit.

Soit $E = E_T$ et soit w une place de f qui ne se décompose pas dans E. Le groupe

$$\vartheta(T/F_w) = \tilde{T}(F_w) \setminus \tilde{G}(F_w)/G(F_w) = \mathrm{Nm}\, E_w^* \setminus F_w^*$$

contient alors deux éléments, représentés par 1 et a. On peut trouver un petit ensemble ouvert U d'éléments réguliers dans $T(F_w)$ tel que les ensembles

$$U^G = \{g^{-1}ug \mid g \in G(F_w),\ u \in U\} \text{ et } U^{aG} = \{g^{-1}u^a g \mid g \in G(F_w),\ u \in U\}$$

sont disjoints. Par conséquent il existe une fonction f_w lisse à support compact dans la réunion $U^G \cup U^{aG}$ telle que

$$\Phi_T a(\gamma^a, f_w) = -\Phi_T(\gamma, f_w)$$

et telle que $\gamma \to \Phi_T(\gamma, f_w)$ est très proche d'une fonction δ sur U.

Il en résulte que

$$\Phi_T^{st}(\gamma, f_w) \equiv 0$$

et même que

$$\Theta(f_w) = 0$$

pour n'importe quelle distribution stablement invariante.

Si f est une fonction globale à composante locale f_w alors

$$\mathcal{ST}(f) = 0$$

et la formule des traces s'écrit

$$\mathcal{T}(f) = \frac{1}{4} \sum_H \left\{ \mathcal{ST}(f^H) - \sum_{\eta \in E_H^G} \eta(f^H) \right\}$$

Soit θ un caractère donné de $T(F) \setminus T(\mathbf{A})$ et soit V un ensemble fini de places de F contenant w, les places infinies, et chaque place où E ou θ est ramifié. Nous supposons que f_v est une fonction sphérique si $v \notin V$. A un tel $v = \mathfrak{p}$ est attachée une classe de conjugaison $\{t(\theta_v)\}$ dans ${}^L T$ et

$$\theta_v(f_v^T) = \hat{f}_v^T(t(\theta_v))$$

La trace

$$\mathcal{T}(f) = \sum m(\pi)\chi_\pi(f), \qquad m(\pi) \in \mathbf{N}$$

s'écrit

$$\mathcal{T}(f) = \sum m(\pi)\chi_{\pi_V}(f_V) \prod_{v \notin V} \hat{f}_v(t(\pi_v)) \ . \tag{1.3}$$

Nous voulons vérifier que, pour au moins un π pour lequel $m(\pi) \neq 0$, on a

$$\psi\{t(\theta_v)\} \subseteq \{t(\pi_v)\}$$

pour $v \notin V$.

D'autre part

$$\mathcal{T}(f) = \frac{1}{4} \sum_H \sum_{\eta \notin E_H^G} \eta(f^H)$$

ou mieux

$$\mathcal{T}(f) = \frac{1}{4} \sum_H{}' \sum_{\eta \notin E_H^G}{}' \pm \eta_V(f_V^H) \prod_{v \notin V} \hat{f}_v(\psi(t(\eta_v))) \ , \tag{1.4}$$

ψ étant le L-homomorphisme de ${}^LH$ dans ${}^LG$ défini plus haut. Les apostrophes indiquent que seuls les H et η non-ramifiés au-dehors de V interviennent dans les sommes. Soit S l'ensemble des suites $\{\{(t_v\}|v \in V\}$ où $\{t_v\}$ est la classe de conjugaison dans ${}^LG$ provenant d'une représentation unitaire de $G(F_v)$. Les égalités (1.3) et (1.4) sont toutes deux de la forme (ou du moins se réduisent facilement à cette forme)

$$\mathcal{T}(f) = \sum_S \alpha(\{t_v\}) \prod_{v \in V} \hat{f}_v(t_v).$$

Vu l'unicité d'un tel développement (voir, par exemple, [20]) il suffit de vérifier que le coefficient $\alpha(\{\psi(t(\theta_v))\})$ provenant de (1.4) n'est pas zéro.

On peut d'abord choisir f_V de telle façon que $\theta_V(f_V^T) \neq 0$, mais il faut ensuite prendre garde à ce que le terme

$$\pm\frac{1}{4}\,\theta_V(f_V^T) \prod_{v \notin V} \hat{f}_v(\psi(t(\theta_v))) \tag{1.5}$$

ne soit pas neutralisé par un autre. Pour cela il faut se demander quels sont les H et η pour lesquels

$$\{\psi(t(\eta_v))\} = \{\psi(t(\theta_v))\} \qquad v \notin V \ . \tag{1.6}$$

Comme on sait, le caractère θ est attaché à un homomorphisme ρ du groupe de Weil W_F dans ${}^LT$, et η est attaché à un homomorphisme σ du groupe de Weil dans ${}^LH$. Les homomorphismes $\psi \circ \rho$ et $\psi \circ \sigma$ envoient W_F dans ${}^LG = PGL(2, \mathbf{C})$. En les composant avec la représentation adjointe nous obtenons des représentations R et Σ de W_F de dimension 3. Il résulte de (1.6) que R et Σ sont localement équivalentes presque partout. Un lemme bien connu (voir, paar exemple, le lemme 12.3 de [7]) implique alors que R et Σ sont équivalentes. On cherche maintenant les extensions quadratiques E de F telles que le groupe de Weil W_E, qui est d'indice 2 dans W_F, stabilise un vecteur non nul dans l'espace de P. On sait qu'il y a au moins une telle extension $E = E_T$ et au plus trois. Dans le cas exceptionnel où il y en a trois, $E = E_T$, et $E_1 = E_{H_1}$, $E_2 = E_{H_2}$, on choisit deux places

w_1 et w_2 telles que w_1 se décompose dans E_1 mais pas dans E_2 et w_2 se décompose dans E_2 mais pas dans E_1 et on les adjoint à V. Puis on choisit f_{w_1} et f_{w_2} tels que

$$\theta_{w_1}\left(f_{w_1}^T\right) \neq 0, \quad \theta_{w_2}\left(f_{w_2}^T\right) \neq 0, \quad \theta_{w_1}\left(f_{w_1}^{H_1}\right) = 0, \quad \theta_{w_2}\left(f_{w_2}^{H_2}\right) = 0 \ .$$

Ce choix fait au besoin, le terme (5) ne peut-être neutralisé que par le terme attaché à un caractère η du groupe $T(F) \setminus T(A)$ lui-même. Dans ce cas-ci la relation $\Sigma \sim R$ implique que $\eta \sim \theta^{\pm 1}$. Si γ_v est dans $T(F_v)$ alors γ_v et γ_v^{-1} sont conjugués dans $SL(2, F_v)$ si et seulement si $\omega_{T/F_v}(-1) = 1$. Ils sont toujours conjugués dans $GL(2, F_v)$. Ici ω_{T/F_v} est la composante locale de ω_T. Il en résulte que

$$f_v^T\left(\gamma_v^{-1}\right) = f_v^T(\gamma_v)$$

et que

$$\eta(f^T) = \theta(f^T) \ .$$

Par conséquent, le terme (5) est égal à

$$\pm\frac{1}{4}\,\eta_V(f_V^T)\prod_{v \notin V}\hat{f}_v(\psi(t(\eta_v)))$$

avec le même signe, et la vérification du principe de fonctorialité est terminée.

On peut probablement aller plus loin et, en imitant les méthodes de [20], obtenir des résultats précis, le principe de fonctorialité local surtout y compris. Je ne l'ai jamais fait.

II. Groupes Endoscopiques

1. Définition

Je passe maintenant au cas général et introduis ce que Shelstad a appelé un groupe endoscopique, en suivant une suggestion de Ash, un des rares mathématiciens contemporains ayant une connaissance suffisante des langues classiques. Soit ${}^LG$ un L-groupe. Quand on définit un L-groupe d'une façon précise il faut l'attifer avec un tas d'objets supplémentaires. On choisit un sous-groups ${}^LB^0$ de Borel de ${}^LG^0$ un sous-groupe de Cartan ${}^LT^0$ de ${}^LB^0$, et pour chaque racine simple $\alpha^\vee$ de ${}^LT^0$ dans ${}^LB^0$ on choisit un vecteur $X_{\alpha^\vee}$ dans l'algèbre de Lie tel que

$$\mathrm{ad}(t)\left(X_{\alpha^\vee}\right) = \alpha^\vee(t) X_{\alpha^\vee} \qquad t \in {}^LT^0$$

Le groupe de Galois, qui opère sur ${}^LG^0$, stabilise ${}^LT^0$ et ${}^LB^0$ et on exige que

$$\sigma\left(X_{\alpha^\vee}\right) = X_{\sigma(\alpha^\vee)}$$

Le L-groupe étant défini on peut la plupart du temps supprimer ces accoutrements, mais de temps en temps il faut en tenir compte. Sinon les choses peuvent se brouiller. Il va de même pour les groupes endoscopiques. Il faut prendre des précautions en les définissant, mais ensuite on peut procéder d'une façon plus désinvolte. Un groupe endoscopique sera défini par les données suivantes (voir surtout [32]).

i) Un élément semi-simple s dans ${}^LG^0$;

ii) La composante connexe ${}^LH^0$ du centralisateur de s dans ${}^LG^0$;

iii) Un sous-groupe de Borel ${}^LB^0_H$ de ${}^LH^0$;

iv) Un sous-groupe de Cartan ${}^LT^0_H$ de ${}^LB^0_H$;

v) Un ensemble $\{Y_{\alpha^\vee}\}$ d'éléments de l'algèbre de Lie de ${}^LG^0$, les $\alpha^\vee$ étant les racines simples de ${}^LT^0_H$ dans ${}^LB^0_H$ et $\mathrm{ad}(t)Y_{\alpha^\vee}$ étant égal à $\alpha^\vee(t)Y_{\alpha^\vee}$;

vi) Un homomorphisme continu ρ de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ dans le groupe d'automorphismes de $\left({}^LH^0, {}^LB^0_H, {}^LT^0_H, \{Y_{\alpha^\vee}\}\right)$.

Le corps F est soit local soit global et $\bar{F}$ est sa clôture séparable. Ces données sont sujettes à quelques conditions. Pour les expliquer, et aussi pour la suite, il est préférable de définir le L-groupe par rapport à un groupe de Weil, qui s'obtient à partir de celui défini par rapport à un groupe de Galois par relèvement

$$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & W_{K/F} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ {}^LG & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(K/F) \end{array}$$

Dorénavant ^LG sera le groupe noté ici par l'étoile. Les L-homomorphismes et les L-homomorphismes non-ramifiés se définissent aussi par rapport aux groupes de Weil. Les conditions que ces données vérifient sont les suivantes.

1) Choisissons K tel que ρ est défini sur $\mathrm{Gal}(K/F)$ et ^LG est défini par rapport à K. Pour chaque $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$ il existe un élément $w \in W_{K/F}$ et un élément $n(w) \in {}^LG^0 \times w \subseteq {}^LG$ tels que w est un relèvement de σ et $\rho(\sigma)$ la restriction de $\mathrm{ad}\, n(w)$ à $^LH_0$.

2) a. Si F est local il existe z dans le centre de $^LG^0$ tel que pour chaque σ on peut choisir un $n(w)$ qui commute à zs.

2) b. Si F est global alors pour chaque place v et chaque extension de v à $\bar{F}$ il existe un z_v dans le centre de $^LG^0$ tel que pour chaque σ dans $\mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$ on peut choisir un $n(w)$ qui commute à $z_v s$. De plus pour chaque σ dans $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ on a $\rho(\sigma)(s) = z(\sigma)s$ avec $z(\sigma)$ dans le centre.

La définition des données endoscopique a été adaptée aux exigences qu'on prévoit à présent. Elle est forcément provisoire. Il en est de même pour la définition d'équivalence de deux ensembles de données.

Définition. *Les deux ensembles de données*

$$(s, {}^LH^0, {}^LB_H^0, {}^LT_H^0, \{y_{\alpha^\vee}\}, \rho)$$

et

$$(\bar{s}, {}^L\bar{H}^0, {}^LB_{\bar{H}}^0, {}^LT_{\bar{H}}^0, \{y_{\bar{\alpha}^\vee}\}\bar{\rho})$$

seront dits équivalents s'il existe un g dans $^LG^0$ pour lequel

$${}^L\bar{H}^0 = \mathrm{ad}\ g({}^LH^0)\ {}^LB_{\bar{H}}^0 = \mathrm{ad}\ g({}^LB_H^0),\ \ {}^LT_{\bar{H}}^0 = \mathrm{ad}\ g({}^LT_H^0)$$

et

$$Y_{\bar{\alpha}^\vee} = \mathrm{ad}\ g(Y_{\alpha^\vee}),\ \ \bar{\rho} = \mathrm{ad}\ g \circ \rho \circ \mathrm{ad}\ g^{-1}\ .$$

On exige en plus que $\bar{s}^{-1}\,\mathrm{ad}\ g(s)$ se trouve dans le produit du centre de $^LG^0$ et de la composante connexe du centre de $^L\bar{H}$.

On note $\mathfrak{S}$ une classe d'équivalence et $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(^LG)$ l'ensemble des classes d'équivalence. Les cinq données $^LH^0$, $^LB_H^0$, $^LT_H^0$, $\{Y_{\alpha^\vee}\}$, ρ définissent un L-groupe, qui à son tour définit un groupe quasi-déployé unique sur F, qui sera noté H. Quand $s = 1$ le groupe H serra noté G^*. Il est la forme quasi-déployée de G.

Le groupe H s'appelle un groupe endoscopique et les données s'appellent des données endoscopiques. H ne dépend que de leur classe, et c'est la classe qui nous intéresse. Donc si $^LT^0$ est un sous-groupe de Cartan donné de $^LG^0$, nous pouvons supposer que $s \in {}^LT^0$ et que $^LT_H^0 = {}^LT^0$. D'ailleurs le groupe $^LB^0$ et l'ensemble $\{Y_{\alpha^\vee}\}$ n'ont pas beaucoup d'importance. Ils sont là parce qu'ils se trouvent parmi les données d'un L-groupe.

Donnons maintenant quelques exemples.

a) Le groupe G soit $GL(n)$ de sorte que ${}^LG = GL(n, \mathbf{C}) \times W_{K/F}$. On prend s diagonal

$$s = \begin{pmatrix} s_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & s_1 & & & & & \\ & & & s_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & s_2 & & \\ & & & & & & s_3 & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Par conséquent

$${}^LH^0 = \begin{pmatrix} \boxed{*} & & & \\ & \boxed{*} & & \\ & & \boxed{*} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

qui est isomorphe à

$$GL(n_1, \mathbf{C}) \times \ldots \times GL(n_r, \mathbf{C})$$

où $n_1 + \cdots + n_r = n$.

Le centre de ${}^LG^0$ est le centre de G. Donc $n(w) = a(w) \times w$ avec $a(w)$ dans ${}^LH^0$ qui n'est pas seulement la composante connexe du centralisateur de s mais le centralisateur lui-même. Mais $a(w)$ donne un automorphisme de données ${}^LH^0$, ${}^LT^0_H$, ${}^LB^0_H$, $\{Y_{\alpha^\vee}\}$ de sorte que $a(w)$ est contenu dans le centre de ${}^LH^0$. On peut donc choisir $a(w) = 1$, et le groupe H est

$$GL(n_1) \times \ldots \times GL(n_r) \ .$$

Le groupe ${}^LH$ est le produit direct de ${}^LH^0$ et $W_{K/F}$ et on peut étendre le plongement ψ: ${}^LH^0 \hookrightarrow {}^LG^0$ à ${}^LH$ en définissant

$$\psi(w) = \chi(w) \times w \ ,$$

où $\chi(x)$ est un homomorphisme de $W_{K/F}$ dans le centre de ${}^LH^0$. Pour ces ψ le principe de fonctorialité est déjà acquis, et se déduit facilement de la théorie des séries d'Eisenstein (voir [16]).

b) Si le groupe G est $SL(n)$, alors ${}^LG = PGL(n, \mathbf{C}) \times W_{K/F}$. On représente les éléments de ${}^LG^0$ par des matrices. Soit s comme dans (a). Alors ${}^LH^0$ est l'image de son centralisateur dans $GL(n, \mathbf{C})$. Mais maintenant le centralisateur de s n'est pas toujours connexe. Le centralisateur est l'image du groupe des g dans $GL(n, \mathbf{C})$

tels que $g^{-1}sg = \lambda s$, $\lambda \in \mathbf{C}^\times$ et l'application $g \mapsto \lambda$ donne un homomorphisme de son quotient par ${}^LH^0$ dans un sous-groupe cyclique de $\mathbf{C}^\times$. Soit λ un générateur de l'image. Si son ordre est m, alors

$$s = \begin{pmatrix}
s_1 \\
& \ddots \\
&& s_1 \\
&&& \lambda s_1 \\
&&&& \ddots \\
&&&&& \lambda s_1 \\
&&&&&& \ddots \\
&&&&&&& \lambda^{m-1}s_1 \\
&&&&&&&& \ddots \\
&&&&&&&&& \lambda^{m-1}s_1 \\
&&&&&&&&&& s_2 \\
&&&&&&&&&&& \ddots \\
&&&&&&&&&&&& s_2 \\
&&&&&&&&&&&&& \lambda s_2 \\
&&&&&&&&&&&&&& \ddots \\
&&&&&&&&&&&&&&& \lambda s_2 \\
&&&&&&&&&&&&&&&& \ddots
\end{pmatrix}$$

Comme ${}^LG^0$ a un centre trivial ou plutôt parce que son centre est aussi le centre de ${}^LG$, l'homomorphisme ρ qui figure parmi les données endoscopiques provient d'un homomorphisme du groupe de Weil $W_{K/F}$, et même du groupe de Galois (K/F), dans le groupe cyclique obtenu en divisant le centralisateur de s dans ${}^LG^0$ par sa composante connexe. Le noyau de cet homomorphisme est un groupe $\mathrm{Gal}(K/E)$ où E/F est une extension cyclique d'ordre divisant m. Puisque l'on peut remplacer un K donné par n'importe quelle extension suffisamment grande, toutes les extensions E/F de ce type apparaissent. Si ℓ est le degré $[E:F]$ le group ${}^LH^0$ est le quotient du groupe

$$\underbrace{\overbrace{GL(n_1,\mathbf{C})\times\ldots\times GL(n_1,\mathbf{C})}^{\ell \text{ fois}}\times\overbrace{GL(n_1,\mathbf{C})\times\ldots\times GL(n-1,\mathbf{C})}^{\ell \text{ fois}}\times\ldots}_{\frac{m}{\ell}\text{ fois}}\times\overbrace{GL(n_2,\mathbf{C})\times\ldots\times GL(n_2,\mathbf{C})}^{\ell \text{ fois}}\times\overbrace{GL(n_2,\mathbf{C})\times\ldots\times GL(n_2,\mathbf{C})}^{\ell \text{ fois}}\times\ldots$$

par le groupe $\mathbf{C}^\times$ qui s'y plonge diagonalement. Pour obtenir H on prend le groupe sur E

$$\underbrace{GL(n_1)\times\ldots\times GL(n_1)}_{\frac{m}{\ell}\text{ fois}}\times\underbrace{GL(n_2)\times\ldots\times GL(n_2)}_{\frac{m}{\ell}\text{ fois}}\times\underbrace{GL(n_3)\times\ldots\times GL(n_3)}_{\frac{m}{\ell}\text{ fois}}\times\ldots$$

et puis on restreint les scalaires de E et F, et enfin on prend le noyau de l'homomorphisme évident du groupe ainsi obtenu dans $GL(1)$. Si $\ell = m = n$ on obtient alors le groupe des éléments de norme 1 dans E^*.

Je laisse au lecteur le soin d'étendre le plongement ψ: ${}^LH^0 \to {}^LG^0$ à un L-homomorphisme ${}^LH \hookrightarrow {}^LG$.

c) Nous considérons maintenant un groupe traité par Rogawski [25]. Soit G une forme intérieure d'un groupe unitaire spécial à trois variables. Le groupe ${}^LG$ est $PGL(3, \mathbf{C}) \times W_{K/F}$, K contenant toujours le corps E qui définit le groupe. On suppose que s est diagonal et ${}^LT_H^0$ est le groupe diagonal, ou plutôt son image dans ${}^LG^0$. Soit ${}^LB^0$ l'image des matrices triangulaires. Nous supposons que ${}^LB_H^0 = {}^LH^0 \cap {}^LB^0$. Chaque $n(w)$ est dans le normalisateur ${}^LN = {}^LN_C$ de ${}^LT^0$ dans ${}^LG$. Soit ${}^L\Omega = {}^L\Omega_G$ le quotient ${}^LN/{}^LT^0$. La donnée ρ définit un homomorphisme ν de $\mathrm{Gal}(K/F)$ dans ${}^L\Omega_G$ et nous allons classifiera les groupes endoscopiques ou les données endoscopiques poss-
ibles au moyen de ν. L'homomorphisme (ou plutôt son image) étant donné, on cherche d'abord les s possibles, qui définissent ensuite des ${}^LH^0$, mais alors pour qu'un s et un ${}^LH^0$ donnent naissance à des données endoscopiques il faut (et il suffit) qu'il y ait un ensemble de racines simples de ${}^LT^0$ dans ${}^LH^0$ fixé par l'image de l'homomorphisme. Soit $X^*({}^LT^0)$ le groupe de poids de ${}^LT^0$. On se souvient que

$$ {}^LT^0 = \mathrm{Hom}(X^*({}^LT^0), \mathbf{C}^\times) $$

et que

$$ X^*({}^LT^0) = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in Z,\ x + y + z = 0\} $$

Le groupe ${}^L\Omega_G$ agit sur $X^*({}^LT^0)$ et est engendré par les permutations et l'application $(x, y, z) \to (-z, -y, -x)$.

i) Supposons que l'image de ν soit ${}^L\Omega_G$. L'élément s est maintenant un homomorphisme de $X^*({}^LT^0)$ qui est trivial sur le réseau engendré par $\{\sigma\lambda - \lambda\}$. Mais si σ permute x et y alors

$$ \sigma(0, 1, -1) - (0, 1, -1) = (1 - 1, 0) $$

On en déduit que $s = 1$ et que ${}^LH^0$. Mais l'image de ν ne fixant pas un ensemble de racines simples de ${}^LT^0$ dans ${}^LG^0$, ce cas est exclu.

ii) Supposons que l'intersection de l'image de ν avec le groupe de Weyl de ${}^LG^0$, c'est-à-dire avec le groupe des permutations, soit d'ordre 3. La seule possibilité pour s est alors

$$ (x, y, z) \to \xi^{y+2z} $$

où

$$ \xi^3 = 1, \text{ mais } \xi \neq 1 \ . $$

Donc

$$ s = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \xi & \\ & & \xi^2 \end{pmatrix} $$

et la composante connexe de son centralisateur est ${}^LT^0$. La projection de ν sur le groupe ${}^L\Omega_G \setminus {}^L\Omega_G \approx \mathbf{Z}_2$ des automorphismes extérieurs doit-être toujours l'isomorphisme donné: $\mathrm{Gal}(E/F) \simeq \mathbf{Z}_2$, et par conséquent l'image de ν n'est jamais contenue dans ${}^L\Omega_G^0$.

Puisque $y = 2z = -2x - y$, on a

$$\xi^{-y-2x} = \xi^{y+2z}$$

et l'image est l'ensemble des applications:

$$(x, y, z) \longmapsto (x, y, z);\ (z, x, y);\ (y, z, x);\ (-z, -y, -x);\ (-x, -z, -y);\ (-y, -x, -z)\ .$$

Le groups H est le groupe des éléments de norme 1 dans L^*, étant une extension cubique cyclique de E dont le groupe de Galois sur F est le groupe symétrique S_3. On vérifie encore sans peine que le plongement ${}^LH^0 \to {}^LG^0$ s'étend à un homomorphisme, ${}^LH \to {}^LG$.

iii) Supposons que l'intersection de l'image de ν avec le groupe ${}^L\Omega_g^0$ soit d'ordre 2. En remplaçant, au besoin, les données par des données équivalentes nous supposons que l'élément non trivial de l'intersection est

$$\omega\colon (x, y, z) \longmapsto (z, y, x)\ .$$

L'image est alors:

$$(x, y, z) \longmapsto (x, y, z);\ (z, y, x);\ (-z, -y, -x);\ (-x, -y, -z)$$

et le réseau engendré par $\{\sigma\lambda, \lambda\}$ est l'ensemble

$$\{(x, y, z)\ \big|\ x + y + z = 0,\ y \text{ pair}\}\ .$$

Donc on a $s\colon (x, y, z) \to (-1)^y$ ou

$$s = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$(2.1) \qquad {}^LH^0 = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}$$

C'est un sous-groupe de ${}^LG^0$ dont nous avons déjà fait la connaissance. Il apparaîtra encore mais on voit maintenant que ce cas-ci est en vérité exclu, parce que l'image de ν ne fixerait pas un ensemble de racines simples de ${}^LT^0$ dans ${}^LH^0$.

iv) Supposons que l'intersection de l'image de ν avec ${}^L\Omega_G^0$ soit triviale. L'élément non-trivial de l'image est alors une des applications:

$$(x, y, z) \longmapsto (-z, -y, -x);\ (-x, -y, -z);\ (-y, -x, -z);,\ (-x, -z, -y)$$

en remplaçant les données par des données équivalentes on peut supposer qu'on a une des deux premières.

α) Soit $(x, y, z) \to (-z, -y, -x)$ l'élément non-trivial de l'image et soit s l'application: $(x, y, z) \to \xi_1^y \xi_2^z$. On a

$$\xi_1^y \xi_2^z = \xi_1^{-y} \xi_2^{-x} = \xi_1^{-y} \xi_2^{y+z}$$

si et seulement si

$$\xi_2 = \xi_1^2 \ .$$

Si $\xi_1 = 1$, alors ${}^L H^0 = {}^L G^0$ et ${}^L H = {}^L G$, qui est pour l'image de ν donnée un cas admis. Si $\xi_1 = -1$ on a le groupe ${}^L H^0$ de (iii), maintenant admis. Nous avons déjà vu comment on étend le plongement ${}^L H^0 \to {}^L G^0$ à un L-homomorphisme ${}^L H \to {}^L G$. Puisque

$$s = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \xi_1 & \\ & & \xi_2 \end{pmatrix} \ ,$$

le group ${}^L H^0$ est ${}^L T^0$ si $\xi_2 \neq 1$. Le groupe H est un tore de dimension 2 avec un sous-tore déployé de dimension 1, et il est en effet un sous-groupe de Cartan d'un sous-groupe de Borel de la forme quasi-déployée G^* de G.

β) Soit $(x, y, z) \to (-x, -y, -z)$ l'élément non-trivial de l'image. Alors $s = (x, y, z) \to \xi_1^y \xi_2^z$ avec $\xi_1^2 = \xi_2^2 = 1$. On vérifie que ce cas n'est pas admis, parce que ${}^L H^0$ n'est pas un tore, et cette application envoie chaque racine sur sa négative.

Sommaire. Les données endoscopiques possibles sont les suivantes:

i) $\{1, {}^L G^0, {}^L B^0, {}^L T^0, \{X_{\alpha^\vee}\}, \rho\}$ sont les données qui définissent le L-groupe ${}^L G$. En particulier, on peut choisir $n(w) = 1 \times w$, et H est le groupe G^*.

ii)

$$s = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^L H^0 = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$

$${}^L B^0 = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$

$${}^L T_H^0 = {}^L T^0 = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$

$$Y_{\alpha^\vee} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et ρ est défini par

$$n(w) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \times w$$

si w est un relèvement de $\sigma \neq 1$ dans $\mathrm{Gal}(E/F)$ à $W_{E/F}$.

iii)

$$s = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \xi & \\ & & \xi^2 \end{pmatrix} \qquad \xi^2 \neq 1$$

$${}^L H^0 = {}^L B_H^0 = {}^L T_H^0 = {}^L T^0$$

$$\{Y_{\alpha^\vee}\} = \emptyset \ .$$

Le groupe H est un tore T qui est isomorphe soit à un sous-groupe de Cartan d'un sous-groupe de Borel de G^* soit à un sous-groupe de Cartan de G^* défini par une extension cubique de E dont le groupe de Galois sur F est S_3.

2. La Formule des Traces Stable Entrevue

Il faudra revenir sur la définition des groupes endoscopiques, surtout pour comprendre comment elle sort de l'étude de la conjugaison stable; cependant, nous sommes maintenant en état de décrire une formule des traces stables bien que pas du tout en état de la démontrer. Nous faisons l'hypothèse suivante:

Le centre de ${}^L G^0$ est connexe

Cette hypothèse est nécessaire pour étendre le plongement ${}^L H^0 \hookrightarrow {}^L G^0$ à un L-homomorphisme ϕ_H du groupe endoscopique ${}^L H$ (voir [1]). Cette extension n'est pas toujours unique. L'hypothèse n'est pas grave et finalement tout à fait naturelle. En particulier G étant donné sur le corps global F on peut toujours trouver une extension $\tilde{G}$,

$$1 \to A \to \tilde{G} \to G \to 1 \ ,$$

où A est un tore, telle que les applications

$$\tilde{G}(F) \to G(F), \ \tilde{G}(F_v) \to G(F_v), \ \tilde{G}(\mathbf{A}) \to G(\mathbf{A})$$

soient surjectives tandis que $\tilde{G}$ vérifie l'hypothèse. Cela nous permet de ramener l'étude des représentations de G à celles de $\tilde{G}$. L'existence de $\tilde{G}$ est vérifiée dans [18].

Soit Z la composante connexe du centre de G, et soit ${}_0Z$ un sous-groupe fermé de $Z(\mathbf{A})$ pour lequel ${}_0Z\,Z(F)$ est fermé et le quotient ${}_0Z\,Z(F) \setminus Z(\mathbf{A})$ compact. Pour simplifier on suppose que

$${}_0Z = \prod_v {}_0Z_v \ ,$$

le produit étant prís sur les places de F. Soit χ un caractère de ${}_0Z$ trivial sur ${}_0Z \cap Z(F)$. La valeur absolue $|\chi|$ s'étend en un caractère de $G(\mathbf{A})$. Soit $L^2_\chi(G(F) \setminus G(\mathbf{A}))$ l'ensemble des (classes de) fonctions mesurables sur $G(F) \setminus G(\mathbf{A})$ vérifiant

i) $\phi(zg) = \chi(z)\phi(g) \qquad z \in {}_0Z$

ii) $\int_{{}_0ZG(F)\setminus G(\mathbf{A})} |\phi(g)|^2 |\chi|^{-2}(g)\, dg < \infty$

Le groupe $G(\mathbf{A})$ agit dans $L^2_\chi(G(F) \setminus G(\mathbf{A}))$, et si on a une fonction raissonnable f sur $G(\mathbf{A})$, on pose

$$\mathcal{T}(f) = \sum_\pi m(\pi) \text{ trace } \pi(f) \ ,$$

$m(\pi)$ étant la multiplicité avec laquelle la représentation irréductible π intervient dans $L^2_\chi(G(F) \setminus G(A))$. Pour être raisonnable, la fonction f doit vérifier en particulier l'équation

$$f(zg) = \chi^{-1}(z) f(g) \qquad z \in {}_0Z$$

et alors

$$\pi(f) = \int_{{}_0Z\setminus G(\mathbf{A})} f(g)\pi(g) dg \ .$$

D'habitude, on suppose que

$$f(g) = \prod_v f_v(g_v) \ ,$$

les f_v vérifiant les hypothèses habituelles.

Je fais remarquer qu'il n'est pas encore vérifié en général que la somme définissant $\mathcal{T}(f)$ converge. Pour la suite on peut toujours la remplacer par la somme sur les représentations cuspidales. Mais puisque nous ne savons stabiliser en général qu'une partie de la formule des traces, cela n'aura pas beaucoup d'importance.

On choisit pour chaque classe dans $\mathfrak{S}$ un représentant des données et pour chaque représentant un L-homomorphisme ϕ_H: ${}^LH \to {}^LG$ étendant le plongement ${}^LH^0 \hookrightarrow {}^LG^0$.

Nous cherchons à définir la formule des traces stables de telle façon que l'on ait l'égalité suivante:

$$\mathcal{T}(f) = \sum_{\mathfrak{S} \in \mathfrak{S}} \iota(G,H) \left\{ \mathcal{ST}(f^H) - \Xi(f^H) \right\} \tag{2.2}$$

La sommation porte sur les classes d'équivalence de données endoscopiques. La fonction f^H sur $H(\mathbf{A})$ est attachée à f, d'une façon qui reste à expliquer, mais pour laquelle le cas de $SL(2)$ sert comme modèle. L'expression $\mathcal{ST}(f^H)$ est la valeur de la trace stable sur $H(\mathbf{A})$ sur la fonction f^H. La constante $\iota(G,H)$ ne dépend que de G et H, ou plutôt de G et de la classe $\mathfrak{S}$. Enfin, $\Xi(f^H)$ est un terme correctif comme celui qui est déjà apparu pour le groupe $SL(2)$.

Je vais expliquer dans le dernier chapitre comment on manie les termes elliptiques réguliers de la formule des traces pour obtenir une formule stabilisée, mais en supposant que les fonctions f^H existent.

Je donnerai aussi quelques exemples non triviaux pour vous convaincre de leur existence. Ce qui reste, même pour les cas particuliers, sont les termes paraboliques et les termes elliptiques singuliers. Pour ceux-là il faut se débattre avec la formule des traces d'Arthur, ce que je n'ai guère commencé faire.

3. Conjugaison stable

Dans ce paragraphe F sera soit un corps global soit un corps local. Soit T un sous-groupe de Cartan de G, et soit $\mathfrak{A}(T) = \mathfrak{A}(T/F)$ l'ensemble de tous les g dans $G(\bar{F})$, $\bar{F}$ étant la clôture séparable de F, tels que $T^g = g^{-1}Tg$ est aussi défini sur F, ainsi que l'isomorphisme $t \mapsto g^{-1}tg$ entre T et T^g. Soit $\vartheta(T) = \vartheta(T/F)$ le quotient

$$T(\bar{F})\backslash\mathfrak{A}(T)/G(F) \ .$$

Deux sous-groupes de Cartan T et T' sont dits stablement conjugués sur F s'il existe un g dans $\mathfrak{A}(T/F)$ tel que $T' = T^g$. On attache à $g \in \mathfrak{A}(T)$ la classe du cocycle $\{\alpha_\sigma\} = \{\sigma(g)g^{-1} \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)\}$ dans $H^1(F,T)$, et on obtient alors un plongement

$$\vartheta(T) \hookrightarrow H^1(F/T) \ .$$

Soit G_{sc} le recouvrement simplement connexe du groupe dérivé G_{der} de G. Puisque on peut toujours supposer g dans G_{der}, et puis le relever à G_{sc}, on a

$$\vartheta(T) \subseteq \mathcal{E}(T) = \mathcal{E}(T/F) = \text{ Image } H^1(F,T_{sc}) \ ,$$

T_{sc} étant l'image inverse de T dans G_{sc}. En plus $\vartheta(T)$ est l'image de $\vartheta(T_{sc})$ et

$$\vartheta(T_{sc}) = \text{ Noyau } (H^1(F,T_{sc}) \to H^1(F,G_{sc}))$$

qui n'est pas toujours un groupe, quoique $\vartheta(T) = \mathcal{E}(T)$ si F est un corps local nonarchimédien. En effet, dans ce cas $H^1(F,G_{sc}) = 1$.

On se souvient que $X_*(T)$ est le groupe des co-poids de T et que, T étant défini sur F, le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ agit sur $X_*(T)$. Il agit aussi sur $X_*(T_{sc})$ et $X_*(T_{sc}) \subseteq X_*(T)$.

Définition de $\mathfrak{K}(T/F)$.

a) Si F est un corps local soit $\mathfrak{K}(T/F)$ le groupe des caractères complexes (pas nécessairement unitaires) de $X_*(T_{sc})$ qui sont triviaux sur l'intersection de $X_*(T_{sc})$ avec le réseau engendré par $\{\sigma\mu - \mu \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F),$ $\mu \in X_*(T)\}$.

b) Si F est un corps global soit $\mathfrak{K}(T/F)$ le groupe des caractères complexes de $X_*(T_{sc})$ qui sont triviaux sur l'intersection de $X_*(T_{sc})$ avec le réseau engendré par $\{\sigma\mu - \mu \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v), \mu \in X_*(T)\}$ pour n'importe quelle place v de F et n'importe quel prolongement de v à $\bar{F}$.

Il est évident que l'on a un plongement

$$\mathfrak{K}(T/F) \to \mathfrak{K}(T/F_v)$$

si F est un corps global et v une place de F.

Soit F un corps local et considérons l'intégrale orbitale

$$\Phi_T(\gamma, f) = \int\limits_{T(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)dg \ ,$$

γ étant régulier dans $T(F)$ et f étant une fonction sur $G(F)$ assez bonne pour que ces intégrales existent. Si $a \in \mathfrak{A}(T)$ la valeur de

$$\Phi_{T^a}(\gamma^a, f)$$

ne dépend que le l'image δ de a dans $\vartheta(T)$ et on l'écrit parfois

$$\Phi_{T^\delta}(\gamma^\delta, f)$$

Soit K un corps qui déploie T. On se souvient que selon le théorème de Tate-Nakayama, le groupe $\mathcal{E}(T)$ est isomorphe au quotient de groupe

$$\{\lambda \in X_*(T_{sc}) \ \big| \ \mathrm{Nm}_{F/K}\lambda = 0\}$$

par son intersection avec le sous-groupe de $X_*(T)$ engendré par les éléments $\sigma\mu - \mu$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$, $\mu \in X_*(T)$. Donc chaque $\kappa \in \mathfrak{K}(T/F)$ définit un caractère de $\mathcal{E}(T)$ et nous posons

$$\Phi_T^\kappa(\gamma, f) = \sum_{\vartheta(T/F)} \kappa(\delta)\Phi_T(\gamma^\delta, f)$$

En prenant $\kappa = 1$ on obtient une intégrale stable

$$\Phi_T^{st}(\gamma, f) = \Phi_T^1(\gamma, f) = \sum_{\vartheta(T/F)} \Phi_{T^\delta}(\gamma^\delta, f)$$

Nous avons déjà défini les distributions stables. Nous voudrions aussi définir la conjugaison stable de deux éléments γ et γ' de $G(F)$. Si le centralisateur de γ est un sous-groupe de Cartan T, la bonne définition devrait être la suivante: γ et γ' sont stablement conjugués si et seulement s'il existe un $g \in \mathfrak{A}(T)$ tel que $\gamma' = \gamma^g$. Pour les autres paires la définition correcte n'est pas si évidente bien que l'on puisse en deviner une. Elle devrait vérifier les deux propriétés suivantes (au moins pour un corps local de caractèristique nulle):

a) la classe de conjugaison stable de n'importe quel γ est la réunion d'un ensemble fini de classes de conjugaison ordinaire;

b) la classe stable $\{\gamma\}_{st}$ est la réunion de $\{\gamma_1\}, \ldots, \{\gamma_r\}$, qui sont des classes de conjugaison ordinaires; soit G_{γ_i} le centralisateur de γ_i; il devrait exister des constantes $c_1, \ldots, c_r$ (pas nécessairement égales) telles que

$$f \longmapsto \sum_{i=1}^{i=r} c_i \int\limits_{G_{\gamma_i}(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma_i g)dg$$

est une distribution stablement invariante.

L'ensemble $\{\gamma\}_{st}$ sera l'ensemble minimal qui vérifie (a) et (b). Mais ceci est une digression. Ce qu'il nous faut faire à présent est de trouver les liens entre les groupes endoscopiques, les couples (T,κ) et les intégrales orbitales.

4. Construction des données endoscopiques

Pour commencer expliquons comment on attache à un couple (T,κ) des données endoscopiques. Pour définir ${}^LG$ on fixe ψ: $G \to G^*$ défini sur $\bar{F}$. Le groupe G^* est pourvu d'un sous-groupe de Borel B_{G^*} et d'un sous-groupe de Cartan $\mathbf{T}_{G^*} \subseteq B_{G^*}$. Ces deux groupes sont définis sur F. Choisissons $g \in G^*(\bar{F})$ de sorte que la restriction η de $\mathrm{ad}\, g \circ \psi$ à T l'envoie sur $\mathbf{T}_{G^*}$. Cela nous donne une identification de $X_*(\mathbf{T}_{G^*})$ et $X_*(T)$ comme modules sur **Z**, mais pas comme modules sous $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. On note σ_T l'action de $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ définie par T.

Le caractère κ devient un caractère de $X_*(\mathbf{T}_{G^*_{sc}})$, que l'on étend en un caractère s de $X_*(\mathbf{T}_{G^*})$. Puisque

$$ {}^LT^0 = \mathrm{Hom}(X_*(\mathbf{T}_{G^*}), \mathbf{C}^\times) \ , $$

on a $s \in {}^LT^0$. C'est la première donnée d'un ensemble de données endoscopiques et définit tout de suite la seconde ${}^LH^0$. Nous prenons ${}^LT^0_H = {}^LT^0$ et

$$ {}^LB^0_H = {}^LH^0 \cap {}^LB^0 \ . $$

Pour la cinquième nous prenons n'importe quel ensemble de $Y_{\alpha^\vee}$ qui satisfont à la condition exigée.

L'ensemble des racines de ${}^LT^0_H$ dans ${}^LH^0$ est invariant relativement à σ_T. On écrit

$$ \sigma_T = \omega(\sigma)\sigma_H \ , $$

où $\omega(\sigma)$ est un élément du groupe de Weyl de ${}^LH^0$ et σ_H est un automorphisme de $X_*(\mathbf{T}_{G^*})$ qui laisse l'ensemble des racines simples de ${}^LT^0_H$ dans ${}^LB^0_H$ invariant. On a

$$ \sigma_H \tau_H = (\sigma\tau)_H \ . $$

D'ailleurs σ_H s'étend d'une façon unique en un automorphisme de $({}^LH^0, {}^LB^0_H, {}^LT^0_H, \{Y_{\alpha^\vee}\})$ et ρ: $\sigma \mapsto \sigma_H$ est la sixième donnée.

Il est évident que la condition (1) est remplie. La condition (2) est une conséquence de la définition de $\mathfrak{K}(T/F)$. Il n'y a pas de choix unique de g. Un autre choix remplace η par $\eta' = \omega \circ \eta$, où ω est dans le groupe de Weyl de $\mathbf{T}_{G^*}$ dans G^*. Il est facile de vérifier que ce nouveau choix mène à des données équivalentes.

Soit H le groupe quasi-déployé attaché aux données. Fixons un sous-groupe de Borel de H sur F et un sous-groupe de Cartan $\mathbf{T}_H$ sur F qu'il contient. Puisque $X^*(\mathbf{T}_H) = X_*({}^LT^0_H)$ et $X^*(\mathbf{T}_{G^*}) = X_*({}^LT^0)$ l'égalité ${}^LT^0_H = {}^LT^0$ donne un isomorphisme $\mathbf{T}_H \to \mathbf{T}_G$ qui n'est pas toutefois défini sur F. Le théorème de Steinberg

([34]) implique néanmoins qu'il existe un sous-groupe de Cartan T_H sur F et un automorphisme intérieur ν: $T_H \to \mathbf{T}_H$ défini sur $\bar{F}$ et tel que l'isomorphisme de T et T_H, implicite dans le diagramme suivant, soit défini sur F.

$$\begin{tikzcd} T_H \arrow[r, "\nu"] & \mathbf{T}_H \arrow[r] & \mathbf{T}_{G^*} \\ & & & T \arrow[ul, "\eta"] \end{tikzcd}$$

Nous aurons beaucoup à faire avec les diagrammes de cette sorte. Il est toujours entendu qu'ils s'obtiennent de la façon suivante. On fixe d'abord un automorphisme intérieur de ${}^L G^0$ qui envoie ${}^L T^0_H$ sur ${}^L T^0$ et ${}^L B^0_H$ dans ${}^L B^0$. Cet automorphisme fixe un isomorphisme $\mathbf{T}_H \to \mathbf{T}_{G^*}$ sur $\bar{F}$. Alors on prend pour ν application provenant d'un automorphisme intérieur de H et pour η la restriction à T de $\operatorname{ad} g \circ \psi$, $g \in G^*(\bar{F})$.

III. Le transfert d'intégrales orbitales

1. Les facteurs de transfert

Dans ce paragraphe nous allons exposer ce que l'on a su vérifier concernant l'existence des fonctions f^H. Pour un corps archimédien il y a une belle théorie due à Shelstad, qui repose en partie sur l'analyse harmonique de Harish-Chandra et par conséquent donne des fonctions f^H dans l'espace de Schwartz-Harish-Chandra, tandis que la formule des traces exige des fonctions à décroissance plus rapide, et même de préférence des fonctions à support compact. Mais ses résultats me semblent quand même miraculeux, et ce sont eux qui m'ont convaincu de la valeur des groupes endoscopiques. Ils sont exposés dans les articles [24], [30], [31], et [32].

Pour les corps non archimédiens nous n'avons que des résultats fragmentaires dûs à Kottwitz et à Rogawski et qui reposent sur une analyse approfondie des aspects combinatoires des immeubles de Bruhat-Tits. Leurs résultats portent surtout sur le lemme fondamental et ne laissent guère de doute sur sa validité. Ils se trouvent dans [11] et [24].

Ces deux travaux contiennent aussi des résultats portant sur d'autres aspects des intégrales orbitales dont nous n'aurons pas l'occasion de faire mention.

Avant de donner un aperçu des ces résultats il faut expliquer, en partie au moins, ce que l'on attend des fonctions f^H. Je suis en général les articles de Shelstad. Soient F un corps local et G un groupe réductif connexe sur F. Nous fixons un ensemble de données endoscopiques. Au besoin on peut les remplacer par des données équivalentes de telle façon que ${}^LT_H^0 = {}^LT^0$ et ${}^LB_H^0 = {}^LH^0 \cap {}^LB^0$. On se souvient que pour définir ${}^LG$ il faut choisir une forme quasi-déployée G^* de G et un isomorphisme ψ: $G \to G^*$ tel que $\psi^{-1}\sigma(\psi)$: $G \to G$ est intérieur pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}\backslash F)$. Il faut de plus choisir un sous-groupe de Borel B_{G^*} de G^* et un sous-groupe de Cartan $\mathbf{T}_{G^*}$ de B^*, les deux sous-groupes étant définis sur F. On se souvient qu'on a

$$X^*({}^LT^0) = X_*(\mathbf{T}_{G^*})$$

c'est-à-dire le réseau de poids du ${}^LT^0$ est égal au réseau de co-poids de $\mathbf{T}_{G^*}$.

Puisque nous avons supposé que ${}^LT_H^0 = {}^LT^0$ nous pouvons identifier

$$X_*(\mathbf{T}_H) = X^*({}^LT^0) = X_*(T_{G^*}) \ , \tag{3.1}$$

ce qui nous donne un isomorphisme $\mathbf{T}_H \to \mathbf{T}_{G^*}$.

Si T_H est un sous-groupe de Cartan de H choisissons un isomorphisme ν: $T_H \to \mathbf{T}_H$, donné par $\mathrm{ad}\, h$ avec $h \in H(\bar{F})$. Il ne sera pas en général défini sur F. Selon un théorème de Steinberg [34] il existe un sous-groupe de Cartan T_{G^*} de G^* et un isomorphisme η^*: $T_{G^*} \to \mathbf{T}_{G^*}$ défini par $\mathrm{ad}\, g^*$, avec $g^* \in G^*(\bar{F})$, tels que l'isomorphisme entre T_H et T_{G^*} donné par

$$D^*\colon T_H \xrightarrow{\nu} \mathbf{T}_H \longrightarrow \mathbf{T}_{G^*} \xleftarrow{\eta^*} T_{G^*} \tag{3.2}$$

soit défini sur F. Si $\gamma_H \in T_H(F)$, soit γ_{G^*} son image dans $T_{G^*}(F)$.

On dit que la classe de conjugaison stable contenant T_{G^*} relève de G s'il existe un sous-groupe de Cartan T_G de G sur F et un $g \in G(\bar{F})$ els que $\psi_{T_G,T_{G^*}} = \psi \circ \mathrm{ad}\, g$ envoie T_G sur T_{G^*} et est défini sur F. On voit facilement que les classes de conjugaison stable $\{T_G\}_{st}$ et $\{T_{G^*}\}_{st}$ se déterminent mutuellement. Donc, d'après le théorème de Steinberg on a un plongement de l'ensemble des classes de conjugaison stable de G dans celui des classes de conjugaison stable de G^*.

Soit D le diagramme

$$\begin{tikzcd} T_H \arrow[r, "\nu"] & \mathbf{T}_H \arrow[r] & \mathbf{T}_{G^*} & T_{G^*} \arrow[l, "\eta^*"'] \\ & & & T_G \arrow[u, "\psi_{T_G,T_{G^*}}"'] \arrow[ul, "\eta"] \end{tikzcd}$$

Ici $\eta = \eta^* \circ \psi_{T_G,T_{G^*}}$. Les isomorphismes de T_H avec T_G ou T_{G^*} données par le diagramme sont tous définis sur F, et un γ_H dans $T_H(F)$ s'envoie sur γ^{G^*} ou γ_G.

La donnée s se trouve dans

$$^LT_H^0 = {^LT^0} = \mathrm{Hom}(X^*(^LT^0), \mathbf{C}^*) \ .$$

Vu la condition (2.a) que les données vérifient, et la définition de l'équivalence, on peut même remplacer s par zs, ou z est dans le centre de $^LG^0$, et donc supposer que s est dans le centre de ^LH. En particulier $\rho = \rho_H$ donne l'action du groupe de Galois sur $^LT^0$ ou $X^*(^LT^0)$ et on a alors

$$\rho_H(\sigma)(s) = s \ ,$$

pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. Soit σ_{T_H} l'action de l'élement σ du groupe de Galois sur $X_*(T_H)$ provenant du fait que T_H est un tore sur F. Identifiant $X_*(T_H)$ et $X_*(\mathbf{T}_H)$ au moyen de η, on a

$$\sigma_{T_H} = \omega_H(\sigma)\rho_H(\sigma), \qquad \sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \ ,$$

où $\omega_H(\sigma)$ est dans le groupe de Weyl $\Omega(^LT^0, {^LH^0})$. Puisque l'élement s est dans le centre de $^LH^0$,

$$\omega_H(\sigma)(s) = s \ ,$$

on en déduit que:

$$\sigma_{T_H}(s) = \rho_H(\sigma)(s) = s \ .$$

Mais $\sigma_{T_H} = \sigma_{T_{G^*}} = \sigma_{T_G}$ et il en résulte que s définit un élément κ de $\mathfrak{K}(T_G/F)$ ou un élément κ^* de $\mathfrak{K}(T_{G^*}/F)$. L'élement κ est, par exemple, la restriction de s à $X_*(T_{G_{sc}}) \subseteq X_*(T_G)$.

Pour introduire la fonction f^H il faut fixer pas seulement une classe $\mathfrak{S}$ de données endoscopiques, ou plutôt un représentant de $\mathfrak{S}$, mais aussi un L-homomorphisme ϕ_H: $^LH \to {^LG}$ étendant le plongement $^LH^0 \hookrightarrow {^LG^0}$. Les données étant fixées et ϕ_H étant aussi fixé, on veut attacher à chaque diagramme D une fonction

$$\Delta(\gamma_H) = \Delta(\gamma_H, D) = \Delta(\gamma_H, D, \phi_H)$$

sur l'ensemble des éléments γ_H dans $T_H(F)$ tels que γ_G est régulier dans $T_G(F)$.

Bien sûr, il y aura des conditions à remplir. La condition fondamentale est que f étant une fonction lisse et à support compact sur $G(F)$ il devrait exister au moins une fonction f^H lisse à support compact sur $H(F)$ telle que

$$\Phi^{st}_{T_H}(\gamma_H, f^H) = 0 \tag{3.3}$$

si $\gamma_H \in T_H(F)$ est régulier mais aucun diagramme D n'est attaché à T_H, tandis que

$$\Phi^{st}_{T_H}(\gamma_H, f^H) = \Delta(\gamma_H, D, \phi_H)\Phi^{\kappa}_{T_G}(\gamma_G, f) \tag{3.4}$$

si D est attaché à T_H et γ_G est régulier dans $T_G(F)$.

Il est bien entendu que les mesures ω_G et ω_H sur $G(F)$ et $H(F)$ sont fixées et que celle sur $T_G(F)$ s'obtient, en utilisant le diagramme D, à partir de celle sur $T^H(F)$. Donc f^H dépend de ω_G et ω_H.

Si la fonction f^H vérifie (3.3) et (3.4) nous écrirons $f \mapsto f^H$, bien que f^H ne soit pas en général unique. Les fonctions $\Delta(\gamma_H, D, \phi_H)$ sont implicites dans la notation.

Bien sûr, quoique fondamentale, cette condition ne nous interdit pas de prendre $\Delta(\gamma_H) \equiv 0$. Mais il y a une autre condition portant sur les fonctions sphériques.

Supposons que ${}^LH$ et ${}^LG$ sont quasi-déployés, déployés sur une extension non ramifiée, et que ϕ_H est non ramifié. Alors on exige qu'il y ait une constante $c \neq 0$ telle que

$$f \longmapsto c\phi^*_H(f)$$

pour chaque $f \in \mathcal{H}_G$.

Ce sont là toutes les conditions locales dont on aura besoin pour déduire une formule des traces stables, mais il y aura aussi des conditions globales sur le produit des fonctions $\Delta(\gamma_H)$ locales que j'expliquerai plus tard. Néanmoins il y a une condition locale cachée dont il faut se rendre compte si on veut développer une théorie entièrement locale. Mais, si on veut vérifier les théorèmes locaux par voie globale il faut supprimer cette condition au début pour la faire sortir comme théorème à la fin, parce que l'on ne peut pas la formuler sans des renseignements sur les L-paquets locaux.

Pour le corps réel ou le corps complexe, les résultats nécessaires sont déjà acquis et on peut formuler la condition locale d'une façon explicite. Il y a une application duale à la flèche $f \mapsto f^H$. Elle envoie une distribution stablement invariante Θ sur $H(F)$ sur une distribution invariante Θ^G sur $G(F)$, et se définit par l'égalité

$$\Theta(f^H) = \Theta^G(f) \ .$$

Soit Π un L-paquet local tempéré. Il y a un problème sur lequel je reviendrai plus tard. C'est celui de trouver des constantes $a(\pi) \in \mathbf{C}^*$ telles que

$$\chi_\Pi = \sum_{\pi \in \Pi} a(\pi)\chi_\pi$$

est une distribution stablement invariante. Pour les groupes réels on peut prendre chaque $a(\pi)$ égal à 1. De toute façon, soit Π un L-paquet tempéré pour $H(F)$ et supposons que son ϕ_H-image $\phi_H(\Pi)$ est défini. Supposons par exemple que F soit **R** ou **C**. Alors si $\theta = \chi_\Pi$ on exige qu'il existe des constantes $\varepsilon(\pi)$, $\pi \in \phi_H(\Pi)$, telles que

$$\theta^G = \sum_{\pi \in \phi_H(\Pi)} \varepsilon(\pi)\chi_\Pi \ . \tag{3.5}$$

Quand G n'est pas quasi-déployé la ϕ_H-image peut-être vide, pour des raisons expliquées par Borel à Corvallis. Alors θ^G devrait être 0.

2. Quelques résultats de Shelstad

Elle commence en caractérisant les intégrales orbitales stables attachées aux fonctions f dans l'espace de Schwartz-Harish-Chandra. Bien que nous ne voulions pas nous perdre dans les détails techniques de la théorie des groupes réels, il faut néanmoins essayer de comprendre cette caractérisation parce que tous les résultats ultérieurs de Shelstad reposent dessus. Tout groupe sur $\mathbf{C}$ définissant par restriction des scalaires un groupe sur $\mathbf{R}$, on peut supposer que F est réel.

Si on veut tenir compte des choix de mesures sur $T(F)$ et $G(F)$ qui définissent $\Phi_T(\gamma, f)$ ou $\Phi_T^{st}(\gamma, f)$ on écrit

$$\Phi_T(\gamma, f; \omega_T, \omega_G)$$

ou

$$\Phi_T^{st}(\gamma, f; \omega_T, \omega_G) \ .$$

Pour chaque sous-groupe de Cartan T de G sur F et chaque ω_T et ω_G, on se donne une fonction $\Phi_T(\gamma; \omega_T, \omega_G)$ sur l'ensemble $T_{\mathrm{reg}}(F)$ des éléments réguliers dans $T(F)$, et on se demande s'il existe une fonction f dans l'espace de Schwartz-Harish-Chandra telle que

$$\Phi_T(\gamma; \omega_T, \omega_G) = \Phi_T^{st}(\gamma, f; \omega_T, \omega_G)$$

pour tout T, tout ω_G, et tout ω_T.

Il y a une condition évidente et facile à vérifier dans la pratique:

i) si $\alpha, \beta > 0$ alors
$$\Phi_T(\gamma, \alpha\omega_T, \beta\omega_G) = \frac{\beta}{\alpha}\Phi_T(\gamma, \omega_T, \omega_G)$$

Il y a une autre condition évidente mais pas si facile à vérifier dans la practique:

ii) si $a \in \mathfrak{A}(T)$, alors
$$\Phi_{T^a}(\gamma^a, \omega_T^a, \omega_G) = \Phi_T(\gamma, \omega_T, \omega_G)$$

Il y a trois sortes de racines de T, les réelles, les complexes, et les purement imaginaires, qui prennent des valeurs purement imaginaires sur l'algèbre de Lie de $T(F)$. Soit I l'ensemble des racines purement imaginaires et soit
$$T^I_{\mathrm{reg}}(F) = \{t \in T(F) \bigm| \alpha(t) \neq 1 \text{ si } \alpha \in I\} \ .$$
Alors $T^I_{\mathrm{reg}}(F) \supseteq T_{\mathrm{reg}}(F)$. L'espace $T(F)$ est une réunion finie d'espaces affines réels et on obtient $T^I_{\mathrm{reg}}(F)$ en écartant de $T(F)$ un nombre fini d'hyperplans. On définit d'une façon plus ou moins évidente l'espace de Schwartz de $T^I_{\mathrm{reg}}(F)$. C'est l'espace des fonctions qui se comportent comme les fonctions de Schwartz habituelles sauf qu'elles peuvent sauter aux hyperplans $\alpha(t) = 1$, $\alpha \in I$.

Soit

$$R_T(\gamma) = \prod_{\alpha \notin I} |\alpha(\gamma) - 1|^{\frac{1}{2}} \prod_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha > 0}} (1 - \alpha(\gamma^{-1})) \ .$$

Pour définir $T_T(\gamma)$ il faut choisir un ordre sur les racines de T. Soit

$$\psi_T(\gamma, \omega_T, \omega_G) = R_T(\gamma)\Phi_T(\gamma; \omega_T, \omega_G)$$

La troisième condition est:

iii) *La fonction $\psi_T(\gamma; \omega_T, \omega_G)$ s'étend en une fonction de Schwartz sur $T^I_{\text{reg}}(F)$.*

Ily enfin une quatrième condition qui porte sur les sauts mais qui est assez compliquée et je préfère renvoyer à l'article [29] de Shelstad pour un énoncé précis. La caractérsiation de Shelstad affirme que si toutes ces conditions sont vérifiées alors il existe une fonction f dans l'espace de Schwartz-Harish-Chandra telle que

$$\Phi_T(\gamma, \omega_T, \omega_G) = \Phi^{st}(\gamma, f; \omega_T, \omega_G)$$

pout tout T, tout ω_T, et tout ω_G.

Problème. *Démontrer que si les supports des fonctions $\Psi_T(\gamma, \omega_T, \omega_G)$ sont relativement compacts dans $T(F)$ alors on peut prendre pour f une fonction à support compact.*

Dés que l'on sait résoudre ce problème, on peut utiliser les autres résultats de Shelstad pour vérifier que, si f est à support compact, alors on peut prendre f^H à support compact.

Le diagramme D définit un ensemble de racines positives de T_H ou T_G, celles qui s'envoient sur les racines positives de $\mathbf{T}_{G^*}$. Bien que H ne soit pas un sous-groupe de G, les racines positives de T_H forment un sous-ensemble des racines positives de T_G, parce que les racines de ${}^LT^0$ dans ${}^LH^0$ sont des racines de ${}^LT^0$ dans ${}^LG^0$. Soit $I^+_{G/H}$ l'ensemble de racines positives imaginaires de G qui ne sont pas de racines de H, et soit $A^+_{G/H}$ l'ensemble des racines positives de G qui ne sont ni imaginaires ni racines de H. Shelstad pose

$$'\Delta(\gamma, D) = \prod_{\alpha \in I^+_{G/H}} (1 - \alpha(\gamma^{-1})) \prod_{\alpha \in A^+_{G/H}} |1 - \alpha(\gamma^{-1})| \, |\alpha(\gamma)|^{\frac{1}{2}},$$

et elle prend

$$\Delta(\gamma, D, \phi_H) = (-1)^{q(G,H)} \varepsilon(T_G, D) \Lambda(\gamma, D, \psi_H)' \Delta(\gamma, D)$$

Ici $q(G, H)$ est un entier bien défini, et elle introduit le facteur $(-1)^{q(G,H)}$ pour des raisons de convenances qui ne nous concernent pas. Le facteur $\varepsilon(T_G, D)$ est $+1$ ou -1 et $\Lambda(\gamma, D, \psi_H)$ est un caractère de $T(F)$.

Il faut choisir les $\varepsilon(T, D)$ et les $\Lambda(\gamma, D, \phi_H)$ de telle façon que l'on puisse appliquer la caractérisation des intégrales orbitales stables sur $H(F)$ aux fonctions définies par les formules (3) et (4). En effet, trois miracles s'accomplissent, mais pas tout seuls.

D'abord, bien que les divers termes de la somme

$$\sum_{\vartheta(T/F)} {}'\Delta(\gamma, D)\kappa(\delta)\Phi_{T^\delta}(\gamma^\delta; \omega_{T^\gamma}, \omega_G)$$

peuvent avoir des singularités sur les hyperplans

$$\alpha(\gamma) = 1 \qquad \alpha \in I_{G/H} \ ,$$

les singularités se neutralisent dans la somme, de sorte que la condition (iii) se vérifie. Ensuite il s'avère que pour chaque choix de ϕ_H on peut trouver, ce qui n'est pas du tout évident, un caractère $\Lambda(\gamma, D, \psi_H)$ tel que, la condition de symétrie (ii) soit vérifiée. En le définissant on n'oublie d'ailleurs pas la formule (3.5).

Il reste à tenir compte de la condition (iv) que nous n'avons pas donnée explicitement. Elle entraîne des relations entre les $\varepsilon(T, D)$ de deux sous-groupes de Cartan “voisins”. Le troisième miracle est que ces relations sont compatibles, les unes avec les autres.

3. Les corps non archimédiens

Pour les corps non-archimédiens des résultats généraux n'existent pas. Soit F un corps non-archimédien. Prenons pour groupe G le groupe $SL(n)$, n étant un nombre premier impair. Dans ce cas le groupe endoscopique le plus intéressant est le groupe H des éléments de normes 1 dans E^*, E étant une extension cyclique de F de degré n. le groupe${}^L H^0$ est le quotient de

$$GL(1, C) \times \ldots \times GL(1, C) \qquad (n \text{ fois})$$

par le groupe $GL(1, C)$ qui y est plongé en diagonale, et l'application ϕ_H envoie $(x_1, \ldots, x_n)$ sur

$$\begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix}$$

Pour étendre ϕ_H à ${}^L H$ il n'est pas nécessaire de passer aux L-groupes relatifs au groupe de Weil. On peut prendre

$${}^L H = {}^L H^0 \rtimes \mathrm{Gal}(E/F)$$

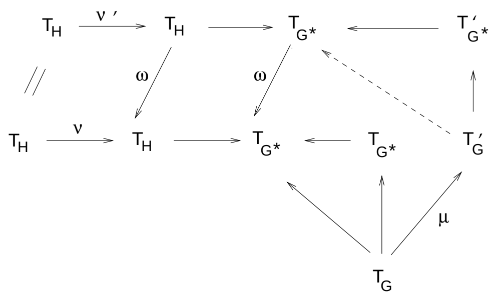
et alors ϕ_H envoie un élément $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)$ sur $g \times \sigma$ où g est une matrice de permutation convenable. Pour être explicite nous choisissons la classe des données définissant H en sorte que

$$s = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

oú λ est une racine n-ième primitive de l'unité.

On a $T_H = H$ et un diagramme D n'est pas autre chose qu'un plongement de H dans G sur F. Avant de définir les facteurs $\Delta(\gamma_H, D, \phi_H)$, nous demandons quelle est la relation entre les intégrales $\Phi^{\kappa}_{T_G}(\gamma_G, f)$ et $\Phi^{\kappa}_{T_{G'}}(\gamma'_G, f)$ attachées aux deux diagrammes différents. C'est une question qui se pose en général et à laquelle on peut répondre sans difficulté. Soient D et D' les deux diagrammes.

On a un diagramme commutatif



L'élément ω est dans le groupe de Weyl absolu de $\mathbf{T}_H$ dans H, et donc dans le groupe de Weyl absolu de $\mathbf{T}_{G^*}$ dans G^*. L'homomorphisme μ est défini par un élément $a \in \mathfrak{A}(T/F)$. Il est clair que a définit une application de $\mathfrak{K}(T/F)$ sur $\mathfrak{K}(T'/F)$, et que $\kappa' = \kappa^a$ si κ et κ' sont les éléments de $\mathfrak{K}(T/F)$ et $\mathfrak{K}(T'/F)$ définis par s. Donc, on a

$$\Phi^{\kappa'}_{T_{G'}}(\gamma'_{G'}, f) = \Phi^{\kappa^a}_{T^a_G}(\gamma^a_G, f)$$

Mais si a représente δ dans $\vartheta(T/F)$ alors $\kappa(\delta)$ est défini et on a le lemme suivant (voir Prop. 4.1 de [30]).

Lemme 3.1: *Si $a \in \mathfrak{A}(T/F)$ représente $\delta \in \vartheta(T/F)$ et $\kappa \in \mathfrak{K}(T/F)$ alors*

$$\Phi^{\kappa}_{T}(\gamma, f) = \kappa(\delta)\Phi^{\kappa^a}_{T^a}(\gamma^a, f) \ .$$

L'application $g \mapsto ag$ nous donne une bijection de $\mathfrak{A}(T^a/F)$ sur $\mathfrak{A}(T/F)$ et du $\vartheta(T^a/F)$ sur $\vartheta(T/F)$ que nous notons $\varepsilon \mapsto \delta\varepsilon$. On a alors:

$$\begin{aligned}
\Phi^{\kappa}_{T}(\gamma, f) &= \sum_{\vartheta(T/F)} \kappa(\varepsilon)\Phi_{T^\varepsilon}(\gamma^\varepsilon, f) \\
&= \sum_{\vartheta(T^a/F)} \kappa(\delta\varepsilon)\Phi_{T^{a\varepsilon}}(\gamma^{a\varepsilon}, f) \\
&= \kappa(\delta) \sum_{\vartheta(T^a/F)} \kappa^a(\varepsilon)\Phi_{T^{a\varepsilon}}(\gamma^{a\varepsilon}, f)
\end{aligned}$$

parce que

$$\sigma(ah)h^{-1}a^{-1} = (\sigma(a)a^{-1})a(\sigma(h)h^{-1})a^{-1} \ ,$$

de sorte que

$$\kappa(\delta\varepsilon) = \kappa(\delta)\kappa^a(\varepsilon) \ .$$

Il résulte du lemme que si $T = T_G$ et si a est défini par les deux diagrammes D et D', alors

$$\Delta(\gamma_H^a, D', \phi_H) = \kappa(\delta)\Delta(\gamma_H, D, \phi_H) \ .$$

En général ces équations sont des conditions de compatibilité. Mais quand H est un tore, elles ont pour conséquence qu'il ne faut définir $\Delta(\gamma_H, D, \phi_H)$ que pour un seul D, c'est-à-dire pour un seul plongement de H dans G.

Revenant au groupe $G = SL(n)$ et au groupe endoscopique H, nous fixons un plongement de H dans G et une diagonalisation de H. Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ les valeurs propres de $\gamma \in H$ relatives à cette diagonalisation. Nous prenons

$$\Delta(\gamma, D, \phi_H) = \prod_{i<j} |\gamma_i - \gamma_j| \ .$$

Il s'agit donc de vérifier que

$$f^H(\gamma) = \Delta(\gamma, D, \phi_H)\Phi_T(\gamma, f)$$

s'étend à l'ensemble $T(F)$ en une fonction lisse. Ici T est l'image de H dans G, et on écrit $\gamma_H = \gamma_G = \gamma$, osant oublier les conventions strictes en identifiant H et T.

Vu l'arbitraire dans le choix du plongement $H \hookrightarrow G$, un choix canonique des $\Delta(\gamma, D, \phi_H)$ n'existe pas en général. Le mieux qu'on puisse espérers est que quand on passe au cas global on puisse choisir les facteurs locaux d'une façon compatible en sorte que leur produit soit canonique. Nous reviendrons sur ce problème. Il se rencontre déjà pour $SL(2)$.

Soit $\tilde{G}$ le groupe $GL(n)$ et soit $\tilde{T}$ le tore dans $\tilde{G}$ qui contient T. Donc $\tilde{T}(F) \simeq E^*$. Si $g \in GL(F)$ on peut écrire $g = tg_1$ où $t \in \tilde{T}(\bar{F})$ et $g_1 \in SL(n, \bar{F})$. Il est évident que $g_1 \in \mathfrak{A}(T/F)$ parce que

$$g_1^{-1}tg_1 = g^{-1}tg, \qquad t \in T(\bar{F}) \, , .$$

On obtient alors une application $\tilde{G}(F) \to \vartheta(T) = \xi(T)$ qui définit en fait une bijection

$$\mathrm{Nm}\, E\backslash F^\times \simeq \tilde{T}(F)\backslash GL(n, F)/SL(n, F) \to \vartheta(T) = \xi(T) = H^1(F, T) \ ,$$

parce que G est simplement connexe. Donc le caractère de $\xi(T)$ donné par κ définit aussi un caractère κ de $\tilde{G}(F)$ ou de $F^\times$. Avec des choix convenables des mesures, on a

$$\Phi_T^\kappa(\gamma, f) = \int\limits_{\tilde{T}(F)\backslash\tilde{G}(F)} f(g^{-1}\gamma g)\kappa(g)dg \ .$$

Le groupe $\tilde{G}(F)$ agit sur $G(F)$ et on pose

$$f^g(\kappa) = f(gxg^{-1})$$

Il est évident que

$$\Phi_T^\kappa(\gamma, f^g) = \kappa(g)\Phi_T^\kappa(\gamma, f) \ . \tag{3.6}$$

J'esquisse maintenant une preuve que $f^H(\gamma)$ s'étend à $T(F)$ en fonction lisse, c'est-à-dire localement constante.

Il suffit de considérer un voisinage de l'identité. On peut développer $\Phi_T^\kappa(\gamma, f^g)$ en somme de germes (J. Shalika, *A theorem on semi-simple p-adic groups*, Ann. of Math. 96 (1972)). L'équation (3.6) entraîne que seuls les germes attachés aux éléments unipotents réguliers apparaissent. On se débrouille alors en observant que l'application de G sur l'espace vectoriel de dimension $n-1$ donnée par les fonctions symétriques des valeurs propres est lisse aux éléments réguliers et en faisant le calcul de quelques déterminants.

Mais, même après avoir vérifié que les facteurs de transfert existent, il reste à vérifier ce que j'appelle le lemme fondamental, qui affirme que pour des G, H et ϕ_H non ramifiés on a $f \mapsto c\phi_H^*(f)$.

Ici, le groupe H est non ramifié si et seulement si l'extension E/F est non-ramifiée. Le groupe $H(F)$ est alors compact et l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_H$ est isomorphe à $\mathbf{C}$. Si on prend la fonction f_1 à valeur constante (mesure $H)^{-1}\alpha$ alors sa transformée de Satake $\hat{f}_1$ est la fonction sur ${}^LH^0 \times \Phi$ à valeur constante α. Ici Φ est un élément de Frobenius.

Si h est dans ${}^LH^0$, alors $\phi_H(h \times \Phi) = g \times \Phi$, où g est le produit d'une matrice diagonale et d'une matrice de permutation, la permutation étant cyclique d'ordre n. Donc g est conjugué à un multiple de

$$g_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \lambda^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

où λ est une racine n-ième primitive de l'unité.

L'algebre de Hecke $\mathcal{H}_G$ est isomorphe à une algèbre de fonctions sur $PGL(n, \mathbf{C})$. Selon les définitions, l'application ϕ_H^* envoie la fonction $f \in \mathcal{H}_G$ sur la fonction $f_1 \in \mathcal{H}_H$ telle que

$$f_1(h) = (\text{mesure } H)^{-1}\hat{f}(g_0)$$

Le lemme fondamental s'énonce alors:

Soient donnés le groupe H non-ramifié et un plongement non-ramifié ϕ_H de H dans G. Il existe une constante c telle que, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}_G$,

$$\Phi_T^\kappa(\gamma, f) = c\Delta(\gamma, D, \phi_H)^{-1}\hat{f}(g_0)$$

Kottwitz l'a démontré pour $n = 3$. Il utilise l'immeuble de Bruhat-Tits attaché à G. Pour $n = 3$ la constante c est le produit d'une racine cubique de l'unité et de (mesure $H)^{-1}$. La racine de l'unité est 1 si $T(F)$ est contenu dans le sous-groupe compact maximal de $G(F)$ définissant $\mathcal{H}_G$.

Pou le groupe unitaire spécial à trois variables et ses formes intérieures on n'a pas encore vérifié l'existence des f^H. Mais il y a un résultat de Rogawski qui est intéressant à cet égard ([24], [25]). Lui aussi utilise les immeubles.

Soit F un corps local à caractéristique résiduelle impaire et soit E une extension quadratique non ramifiée de F. On prend pour G le groupe unitaire spécial quasi-déployé attaché à E; c'est donc le groupe défini par la forme

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

où la barre dénote la conjugaison dans E relative à F. Nous avons déjà vu que le groupe unitaire déployé à deux variables H est un groupe endoscopique pour G.

Bien que les groupes endoscopiques ne soient pas en général des sous-groupes des groupes auxquels ils sont attachés, cet H-ci se plonge dans G, donnant le sous-groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$

Soit $\mathrm{Gal}(E/F) = \{1, \sigma\}$ et soit a le cocycle de $\mathrm{Gal}(E/F)$ dans $H(\bar{F})$ défini par $a_1 = 1$,

$$a_\sigma = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} .$$

Il est trivial, et il existe alors un $h \in H(E)$ tel que

$$a_\sigma = h\sigma(h^{-1}) .$$

Si A est le groupe des matrices diagonales, le groupe

$$T = h^{-1}Ah = A^h$$

est défini sur F et $T(F)$ est compact. Ce groupe est contenu dans H et dans G.

Si on prend $T_H = T$ il y a un diagramme D évident. On a $G = G^*$ et on prend $T_{G^*} = T_G = T$ et $\psi_{T_G, T_{G^*}}$ égal à l'identité. De plus on prend $\mathbf{T}_H = \mathbf{T}_G = A$ et $\nu = \eta = \mathrm{ad}\, h^{-1}$. Nous rappelons que D nous définit un élément κ dans $\mathfrak{K}(T/F)$.

Si

$$\gamma = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & \delta & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}$$

est dans $T(F)$ soit γ_2 la valeur propre δ et soient γ_1 et γ_3 les deux autres valeurs propres.

On pose:

$$\Delta_H(\gamma) = \left|\frac{(\gamma_1-\gamma_3)^2}{\gamma_1\gamma_3}\right|_F^{1/2}$$

$$\Delta_G(\gamma) = |(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_3-\gamma_2)|_E^{1/2}\Delta(H(\gamma)$$

$$\omega(\gamma) = \omega_1((\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_3-\gamma_2)) \ ,$$

où ω_1 est le caractère quadratique non-ramifié de E^*.

Soit f_0 l'unité dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_G$ et f_0^H l'unité dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_H$. Alors Rogawski a démontré le théorème suivant.

Pour tout γ régulier dans $T(F)$ on a

$$\omega(\gamma)\Delta_G(\gamma)\Phi_T^{\kappa}(\gamma, f_0) = \Delta_H(\gamma)\Phi_T^{st}(\gamma, f_0^H) \ .$$

On est porté à croire que pour ϕ_H non-ramifié:

$$\Delta(\gamma, D, \phi_H) = \omega(\gamma)|(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_3-\gamma_2)|_E^{1/2} \ .$$

IV. Les L-Paquets

Bien que le but de ces notes soit de donner une esquisse de la manière dont on commence à stabiliser la formule des traces et non d'entamer la vérification des résultats locaux, il me semble quand même utile de donner un aperçu des résultats déjà acquis sur la structure des L-paquets. Sauf pour les résultats de Shelstad pour les groupes réels, qui ont la vertu de mettre au jour les liens entre cette structure et les groupes endoscopiques, les théorèmes déjà vérifiés sont très sporadiques, et leurs auteurs ne cherchent pas toujours à les encadrer dans une philosophie générale, ce qui a des avantages évidents mais aussi des inconvénients. Je me restreins aux résultats locaux, les théorèmes globaux n'étant vérifiés que pour $SL(2)$. Ceux-ci ont été exposés dans [33].

1. Les Groupes Réels

Commençons avec les groupes réels, renvoyant le lecteur au papier [32] pour les démonstrations. Shelstad n'y considère que les L-paquets tempérés, la structure des L-paquets non-tempérés restant tout-à-fait obscure. On ne sait même pas leur attacher des distributions stablement invariantes, bien que ce soit là un problème qui pourrait s'avérer important pour l'étude des variétés de Shimura.

En général, pour un groupe réel un L-paquet de représentations de $G(\mathbf{R})$ est attaché à un homomorphisme ϕ du groupe de Weil $W_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}$ dans ${}^LG$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} & \xrightarrow{\phi} & {}^LG \\ & {\scriptstyle id}\searrow \quad \swarrow & \\ & W_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} & \end{array}$$

est commutatif et les $\phi(W)$ sont semi-simples. Un tel homomorphisme est dit admissible, et on dénote le L-paquet Π_ϕ. C'est toujours un ensemble fini et s'il contient une représentation tempérée alors il ne contient que des représentations tempérées. Le L-paquet Π_ϕ est tempéré si et seulement si l'image d'un ensemble compact dans $W_{C/R}$ par ϕ est relativement compact dans ${}^LG$.

Soit Π_ϕ tempéré. On est amené, en grande partie par les résultats de Knapp-Zuckermann, à attacher quelques groupes à ϕ: le centralisateur S_ϕ de $\phi(W)$ dans ${}^LG^0$; sa composante connexe S_ϕ^0; le centralisateur Z^W de ${}^LG$ dans ${}^LG^0$, et le quotient

$$\mathcal{S}_\phi = S_\phi / Z^W S_\phi^0$$

C'est un groupe abélien dans lequel le carré de chaque élément est 1. Nous verrons plus tard que pour les corps p-adiques ce groupe $\mathcal{S}_\phi$ n'est pas toujours abélien, ce qui entraîne des conséquences frappantes.

Deux homomorphismes admissibles ϕ et ϕ' dans $W_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}$ dans ${}^LG$ sont dits équivalents s'il existe $g \in {}^LG^0$ tel que $\phi' = adg \circ \phi$, le L-paquet Π_ϕ est plutôt attaché à la classe de ϕ. On le note $\Pi_{\{\phi\}}$. Si on remplace ϕ par ϕ' alors on remplace S_ϕ par $gS_\phi g^{-1}$ et S_ϕ° par $gS_\phi^\circ g^{-1}$. Donc les deux groupes $\mathcal{S}_\phi$ et $\mathcal{S}_{\phi'}$ sont isomorphes et à isomorphisme intérieur près, l'isomorphisme est unique. Pour le corps réel ou le corps complexe ils sont abéliens et par conséquent canoniquement isomorphes. Nous attacherons quand même en général un groupe $\mathcal{S}_{\{\phi\}} \simeq \mathcal{S}_\phi$ à la classe $\{\phi\}$, et en tant qu'il ne s'agit que de classes de conjugaison dans $\mathcal{S}_{\{\phi\}}$ nous pourrons le faire impunément.

Pour le corps réel (et donc le corps complexe aussi) Shelstad attache à chaque élément π de $\Pi_{\{\phi\}}$ une fonction complexe $\mathfrak{x} \mapsto \langle \mathfrak{x}, \pi \rangle$ sur $\mathcal{S}_{\{\phi\}}$. Ces fonctions vérifient deux conditions importantes:

(i) La valeur $\langle \mathfrak{x}, \pi \rangle$ ne dépend que de la classe de conjugaison de $\mathfrak{x}$ dans $\mathcal{S}_{\{\phi\}}$ (Je souligne cette condition bien qu'elle ne dise rien pour le corps réel).

(ii) L'ensemble des fonctions $\langle \cdot, \pi \rangle$ est linéairement indépendant. Il y a une autre condition que je ne souligne pas bien qu'elle soit assez pénible à établir.

(iii) La fonction $\mathfrak{x} \mapsto \langle \mathfrak{x}, \pi \rangle$ est un caractère de $\mathcal{S}_{\{\phi\}}$.

L'ensemble des fonctions $\langle \cdot, \pi \rangle$ ne donne pas toujours une base des fonctions sur $\mathcal{S}_{\{\phi\}}$, mais il résulte de (ii) que l'ensemble de fonctions

$$\left\{ \sum_{\pi \in \Pi_\phi} \langle \mathfrak{x}, \pi \rangle \, \chi_\pi \;\middle|\; \mathfrak{x} \in \mathcal{S}_\phi \right\} ,$$

χ_π étant le caractère de π, engendre le même espace de fonctions sur $G(F)$ que l'ensemble

$$\left\{ \chi_\pi \;\middle|\in \Pi_\phi \right\}$$

Nous allons voir que cela permet de ramener l'étude des caractères tempérés à l'étude des caractères tempérés stablement invariants, qui sont pour les groupes réels les sommes

$$\sum_{\pi \in \Pi_{\{\phi\}}} \chi_\pi = \sum_{\pi \in \Pi_\phi} \langle 1, \pi \rangle \, \chi_\pi \ .$$

Soit donné un ensemble $\gamma = \{s, {}^LH^0, {}^LB_H^0, {}^LT_H^0\}, \{\gamma_{\alpha^v}\}, \rho)$ de données endoscopiques et un L-plongement ψ_H: ${}^LH \hookrightarrow {}^LG$ qui étend le plongement ${}^LH^0 \hookrightarrow {}^LG^0$. On suppose que s est contenu dans le centre de ${}^LH$. Supposons enfin que l'on a choisi les fonctions $\Delta(\gamma, \phi_H, D)$ selon la prescription de Shelstad de sorte que les fonctions f^H existent. Soit ϕ': $W_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} \to {}^LH$ un homomorphisme admissible et soit $\phi = \phi_H \circ \phi'$. L'élément $s = \phi_H(s)$ est contenu dans S_ϕ et définit alors un élément $\mathfrak{x}$ dans $\mathcal{S}_\phi$, son image.

La somme

$$\Theta = \chi_{\phi'} = \sum_{\pi \in \Pi_{\phi'}} \chi_\pi$$

est une distribution stablement invariante et on peut définir la distribution Θ^G sur $G(F)$ par l'équation

$$\Theta^G(f) = \Theta(f^H)$$

Theoreme [32]: *Il existe une constante $c(\{\Delta\}, \phi')$ telle que*

$$\Theta^G = c(\{\Delta\}, \phi') \sum_{\pi \in \Pi_\phi} \langle \mathfrak{x}, \pi \rangle \, \chi_\pi \ .$$

C'est ce résultat qui nous permet de ramener l'étude des caractères tempérés sur $G(F)$ à l'étude des caractères tempérés stablement invariants sur les groupes endoscopiques attachés à G. Il y a seulement à vérifier que chaque classe $\{\mathfrak{x}\}$ dans $\mathcal{S}_{\{\phi\}}$ provient de données endoscopiques.

Si ϕ est donné et si s est contenu dans S_ϕ, alors s définit ${}^L H^0$, dans lequel on peut choisir ${}^L B_H^0$ et ${}^L T_H^0$. On choisit aussi les $Y_{\alpha^\vee}$. Si $w \in W_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}$ alors $\phi(w)$ normalise ${}^L H^0$ et il existe $a(w) \in {}^L H^0$ tel que $a(w)\phi(w)$ normalise ${}^L B_H^0$, ${}^L T_H^0$ et fixe l'ensemble des $Y_{\alpha^\vee}$. Soit $\rho(w)$ l'automorphisme de ${}^L H^0$ donné par $a(w)\phi(w)$. Il ne dépend que de l'image de w dans le groupe de Galois. Donc ϕ et s définissent un ensemble complet de données endoscopiques.

Le fonctions $\mathfrak{x} \mapsto \langle \mathfrak{x}, \pi \rangle$ ne sont pas canoniquement définies, et ne peuvent pas l'être. Néanmoins la nature des choix qu'il faut faire pour les définir reste obscure et le restera je suppose tant que l'on ne saura pas les définir pour les corps p-adiques. Nous y passons maintenant, mais seulement pour indiquer quelques problèmes.

2. Les groupes non archimédiens

On espère que l'on peut classifier les L-paquets pour un corps non archimédien en utilisant le produit direct

$$\mathcal{W} = SL(2, \mathbf{C}) \times W_F \ ,$$

W_F étant le groupe de Weil

$$W_F = \varprojlim W_{K/F} \qquad [K\colon F] < \infty$$

On voudrait attacher à chaque homomorhisme ϕ de $\mathcal{W}$ dans le groupe ${}^L G$ qui vérifie les conditions suivantes un L-paquet de représentations de $G(F)$:

1) ϕ se factorise par un groupe

$$SL(2, \mathbf{C}) \times W_{K/F}, \qquad [K\colon F] < \infty \ ;$$

2) ϕ est analytique sur $SL(2, \mathbf{C})$ et continu sur $W_{K/F}$;

3) le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \longrightarrow & {}^L G \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & W_{K/F} & \end{array}$$

est commutatif;

4) les images $\phi(w)$ des $w \in W_{K/F}$ sont semi-simples;

5) si l'image de $\mathcal{W}$ est contenue dans un sous-groupe parabolique ${}^LP$ de ${}^LG$, alors ${}^LP$ relève de G (voir [4] ou [15]).

On définit S_ϕ comme le centralisateur de $\phi(\mathcal{W})$ dans ${}^LG^0$, et on pose encore

$$\mathcal{S}_\phi = S_\phi / Z^W S_\phi^0 \ .$$

On voudrait encore attacher à chaque élément π de $\Pi_{\{\phi\}}$ une fonction centrale sur $\mathcal{S}_\phi$ en sorte que les conditions (i) et (ii) soient vérifiées. On voudrait aussi établir que:

(iv) si Π_ϕ est tempéré alors

$$\sum_{\pi \in \Pi_\phi} \langle 1, \pi \rangle \, \chi_\pi = \chi_\phi$$

est stablement invariant;

(v) si γ est un ensemble de données endoscopiques, si ϕ' est un homomorhisme admissible et tempéré de $\mathcal{W}$ dans ${}^LH$, si $\phi = \phi_H \circ \phi'$, et si $\Theta = \chi_{\phi'}$, alors

$$\Theta^G = c(\{\Delta\}, \phi') \sum_{\pi \in \Pi_\phi} \langle \mathfrak{x}, \pi \rangle \, \chi_\pi \ ,$$

Θ^G étant comme avant.

Pour le groupe $GL(n)$ les groupes $\mathcal{S}_{\{\phi\}}$ se réduisent toujours à $\{1\}$ parce que le centralisateur d'un sous-groupe réductif de $GL(n, \mathbf{C})$ est toujours connexe. De plus on pense que les L-paquets ne contiennent qu'un seul élément et chaque distribution inariante est déjà stablement invariante. Donc si on prend $\langle 1, \pi \rangle = 1$ les conditions (i), (ii) et (iv) sont vérifiées, et les groupes endoscopiques étant les sous-groupes de Levi des sous-groupes paraboliques, la condition (v) se réduit à la formule bien connue pour le caractère des représentations induites. Pourtant pour avoir une théorie conséquente il faut savoir que les représentations induites tempérées sont irréductibles, ce qui est connu (voir Bernstein-Zelevinsky [2]).

Pour le groupe $G = SL(n)$ les groupes $\mathcal{S}_{\{\phi\}}$ ne sont pas toujours triviaux. On prend ${}^LG = PGL(n, \mathbf{C})$. Si ϕ est donné, et si $s \in S_\phi$ on relève s et chaque élément $\phi(w)$ dans l'image de $\mathcal{W}$ à des éléments $\tilde{s}$ et $\tilde{\phi}(w)$ dans $GL(n, \mathbf{C})$ et on pose

$$\langle s, w \rangle = \tilde{s} \tilde{\phi}(w) \tilde{s}^{-1} \tilde{\phi}(w)^{-1} \ .$$

C'est une racine n-ième de l'unité qui est 1 pour $w \in SL(2, \mathbf{C})$. Donc $w \mapsto \langle s, w \rangle$ est un homomorphisme continu de W_F, et par conséquent de $F^\times$, dans $\mathbf{C}^\times$ et on obtient un plongement

$$\mathcal{S}_\phi \to \mathrm{Hom}(F^\times, \mathbf{C}^\times) \ .$$

Si l'ensemble Π_ϕ est en quelque sorte un dual de $\mathcal{S}_\phi$, on s'attendrait à pouvoir le représenter comme quotient de $F^\times$. Mais le groupe $GL(n, F)$ agit sur les classes de représentations de $SL(n, F)$. On pose

$$\pi^h(g) = \pi(hgh^{-1}), \quad h \in GL(n, F), \quad g \in SL(n, F) \ .$$

Le centralisateur de la classe π sera noté G_π. Soit

$$U = \{\det h \mid h \in G_\pi\}$$

Si on suppose que le L-paquet Π contenant π est l'ensemble $\{\pi^h \mid h \in GL(n, F)\}$, on obtient une bijection entre Π et $F^\times/U$ en envoyant π^h sur $\det h$.

Si on observe que cette bijection dépend du choix de π dans Π on trouve une autre raison pour que la fonction $\langle \mathfrak{r}, \pi \rangle$ attachée à π ne puisse pas être définie d'une façon unique.

On a donc deux points de vue à l'égard des L-paquets pour $SL(n, F)$. On peut les étudier d'une manière concrète en passant à $GL(n, F)$, ou, si on est toqué des L-groupes, on peut essayer de partir du cadre général des groupes $\mathcal{W}_{\{\phi\}}$. Gelbart et Knapp ont su faire le lien entre les deux ([5], [6]), au moins pour les représentations de la série principale.

Pour cela il fait introduire le R-groupe qui a été introduit avant le groupe $\mathcal{S}_{\{\phi\}}$ et qui le précède dans l'ordre temporel comme dans l'ordre alphabétique. Son rôle est semblable à celui de $\mathcal{S}$, mais il est dual non pas de l'ensemble de toutes les représentations dans un L-paquet mais seulement à celles qui sont contenues dans une représentation induite donnée. Donc il devrait être un quotient de groupe $\mathcal{S}_{\{\phi\}}$, ne coincidant pas avec lui sauf pour les L-paquets déduits d'une représentation induite d'un sous-groupe de Borel, parce que le sous-groupe de Levi est alors un groupe abélien avec des L-paquets réduits à un seul élément. C'est ce qui se passe pour les groupes réels.

Pour les groupes p-adiques le R-groupe n'est défini jusqu'à présent que pour les groupes de Chevalley. Nous allons vérifier, ce qui est d'ailleurs facile, qu'il coïncide avec le groupe $\mathcal{S}_{\{\phi\}}$, et puis nous allons examiner les résultats de C. D. Keys ([9]) pour voir s'ils confirment nos hypothèses.

Prenons G un groupe déployé simplement connexe de sorte que ${}^LG^0$ est un groupe adjoint. Pour notre objectif il suffit de prendre le L-groupe relatif à F, et alors ${}^LG = {}^LG^0$. Pour le L-homomorphisme nous prenons un homomorphisme continu ϕ de $W_{F/F} = F^\times$ dans ${}^LT^0$.

On fixe dans G un sous-groupe de Borel B et un sous-groupe de Cartan T dans B les deux étant définis sur F. Donc les poids de ${}^LT^0$ sont les co-poids de T. Si $a \in F^\times$ et si λ est un poids de ${}^LT^0$, soit a^λ l'élément de $T(F)$ tel que $\mu(a^\lambda) = a^{\langle \mu, \lambda \rangle}$ pour chaque poids de T. Ces éléments engendrent $T(F)$. Soit ξ_λ le caractère de $F^\times$ défini par l'équation

$$\xi_\lambda(a) = \lambda(\phi(a)) \ .$$

On vérifie facilement qu'il existe un caractère unique ξ_ϕ de $T(F)$ tel que

$$\xi_\phi(a^\lambda) = \xi_\lambda(a) \ .$$

Comme d'habitude, on étend ξ_ϕ en un caractère de $B(F)$, et on forme la représentation induite

$$\rho_\phi = \operatorname{Ind}(G(F), \xi_\phi) \ ,$$

utilisant le décalage habituel en sorte que ρ_ϕ est unitaire quand ξ_ϕ l'est, comme on le suppose désormais. Alors les éléments du L-paquet Π_ϕ attaché à ϕ sont les composantes irréductibles de ρ_ϕ.

La composante connexe de S_ϕ^0 de S_ϕ, le centralisateur de $\phi(F^\times)$, est évidemment le groupe engendré par ${}^LT^0$ et les sous-groupes à un paramètre attaché aux racines $\alpha^\vee$ telle que $\xi_{\alpha^\vee} \equiv 1$, ce qui est équivalent à l'équation $\xi_\phi(a^{\alpha^\vee}) \equiv 1$. Soit Δ_ϕ l'ensemble de racines positives simples relatives à $S_\phi^0 \cap {}^LB^0$ et soit R l'ensemble des éléments $r \in S_\phi$ tels que

(i) $\operatorname{ad} r({}^LT^0) = {}^LT^0$,

(ii) $\operatorname{ad} r(S_\phi^0 \cap {}^LB^0) = S_\phi^0 \cap {}^LB^0$,

(iii) $\operatorname{ad} r(\chi_{\alpha^\vee}) = \chi_{r\alpha^\vee}$ si $\alpha^\vee \in \Delta_\phi$.

Il est évident que S_ϕ est le produit semi-direct de S_ϕ^0 et de R et que le groupe R est le groupe défini par Keys. Donc $\mathcal{S}_\phi \simeq R$, le groupe Z^W étant trivial.

Le caractère χ_{ρ_ϕ} de ρ_ϕ se calcule facilement et on voit immédiatement qu'il est stablement invariant. On est alors porté à définir le caractère du L-paquet Π_ϕ comme

$$\chi_\rho = \chi_{\rho_\phi} \ .$$

On a l'égalité

$$\chi_\phi = \sum_{\pi \in \Pi_\phi} \langle 1, \pi \rangle \, \chi_\pi \ ,$$

où $\langle 1, \pi \rangle$ est la multiplicité avec laquelle π intervient dans ρ_ϕ.

Ce sont Knapp et Zuckerman qui ont cherché exprès un caractère ϕ pour lequel le groupe R n'est pas abélien [10]. Donnons leur exemple qui fait beaucoup rêver.

Soit G le groupe simplement connexe du type D_4 et soit F un corps à caractèristique résiduelle impaire. Le groupe ${}^LG$ est donc $SO(8, \mathbf{C})/\{\pm 1\}$. Il y a trois caractères de $F^\times$ d'ordre 2, μ_1, μ_2, μ_3. Posons

$$\phi(a) = \begin{pmatrix} \mu_1(a) & & & & & & \\ & \mu_2(a) & & & & & \\ & & \mu_3(a) & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \mu_1^{-1}(a) & & \\ & & & & & \mu_2^{-1}(a) & \\ & & & & & & \mu_3^{-1}(a) \end{pmatrix}$$

On vérifie d'abord que $S_\phi^0 = {}^LT^0$, le groupe des matrices diagonales. Le groupe $R = \mathcal{S}_\phi$ s'identifie à un sous-groupe du groupe de Weyl, et le groupe de Weyl est le groupe des applications

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (\pm x_{\sigma(1)}, \ \pm x_{\sigma(2)}, \ \pm x_{\sigma(3)}, \ \pm x_{\sigma(4)}) \ ,$$

σ étant une permutation et le nombre de changements de signe étant pair. Les caractères μ étant d'ordre deux, chaque application

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \to (\pm x_1,\ \pm x_2,\ \pm x_3,\ \pm x_4)$$

est dans R.

Les seules permutations dans R sont (12)(34), (13)(24), et (14)(23), parce que

$$\begin{pmatrix} \mu_1(a)\mu(a) &&&&&&& \\ & \mu_2(a)\mu(a) &&&&&& \\ && \mu_3(a)\mu(a) &&&&& \\ &&& \mu(a) &&&& \\ &&&& \mu_1^{-1}(a)\mu(a) &&& \\ &&&&& \mu_2^{-1}(a)\mu(a) && \\ &&&&&& \mu_3^{-1}(a)\mu(a) & \\ &&&&&&& \mu(a) \end{pmatrix}$$

est égal à $\phi(a)$ si $\mu \in \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, 1\}$, et $\{\mu_1\mu, \mu_2\mu, \mu_3\mu, \mu\}$ est une permutation de $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, 1\}$.

Donc R est un groupe non-abélien d'ordre 32, avec 16 représentations irréductibles de degré 1 et une représentation irréductible de degré 4. D'autre part Π_ϕ contient 17 représentations et 16 des nombres $\langle 1, \pi \rangle$ sont égaux à 1 tandis qu'un est égal à 4. Les éléments du L-paquet sont paramétrisés par les représentations irréductibles du grupe R, et les nombres $\langle 1, \pi \rangle$ sont égaux aux dimensions de ces représentations, ce qui est vraiment émerveillant.

Keys a étudié le cas général et a vérifié que le phénomène découvert par Knapp-Zuckermann se rencontre toujours. Le nombre des composantes irréductibles de ρ_ϕ est le nombre des représentations irréductibles du groupe fini R, et les multiplicités $\langle 1, \pi \rangle$ avec lesquelles elles interviennent dans ρ_ϕ sont égales aux degrés des représentations irréductibles de R.

Les seuls groupes pour lesquels F n'est pas abélien sont les groupes de types D_n ou E_7, E_8. Les résultats pour les groupes de type E_6, E_7, E_8 ne se trouvent pas dans la thèse de Keys, mais il sait les traiter aussi.

V. Quelques Problèmes Globaux

Avant de passer à la stabilisation de la formule des traces je voudrais dire quelques mots sur les problèmes les plus immédiats à résoudre. Pour le groupe $SL(3)$ et les formes tordues de $SU(3)$ il s'agit d'abord de vérifier le principe de fonctorialité pour les plongements ϕ_H: ${}^L H \hookrightarrow {}^L G$ et par suite d'obtenir des résultats sur L-paquets locaux analogues à ceux de Shelstad.

On constate pourtant que pour $SL(3)$, le principe de fonctorialité pour le plongement défini pour le groupe des éléments de normes 1 dans $E^\times$, E étant une extension cyclique de degré 3, a été déjà établi par Piatetski-Shapiro (voir H. Jacquet, I. I. Piatetski-Shapiro, J. Shalika *Automorphic forms on* GL_3, II, Ann. of Math., v. 109 (1979)). Donc dans ce cas les résultats nouveaux seront les résultats locaux.

Le groupe $U(2)$ quasi-déployé se trouve parmi les groupes endoscopiques attachés à une forme tordue G de $SU(3)$. Si cette forme tordue est elle-même un groupe unitaire on peut établir une partie du principe de fonctorialité en utilisant la représentation de Weil (voir l'article [12] de Kudla).

En géneral la forme quasi-déployée G^* de $SU(3)$ se trouve parmi les groupes endoscopiques attachés à G. Donc la formule des traces stables ramène l'étude des représentations automorphes de $G(\mathbf{A})$ à celle des groupes de dimension plus basse et à celle des représentations automorphes de $G^*(\mathbf{A})$.

Je ne vois qu'un seul moyen d'étudier la partie stable de la formule des traces pour $G^*(\mathbf{A})$. Si G^* est défini par rapport à l'extension quadratique E de F il faut vérifier que l'on peut changer la base de F à E, G^* devenant $G_1 = SL(3)/E$ et puis exploiter, tant que l'on peut, les résultats connus pour $SL(3)$. Quelques des résultats locaux nécessaire sont déjà acquis et dûs à Kottwitz, mais on aura besoin d'une formule tordue des traces pour G_1 qui n'est pas une conséquence immédiate de la formule d'Arthur. De plus, les formules tordues doivent être stabilisées.

Il y aura aussi des théorèmes à vérifier qui ne sont pas des conséquences formelles du principe de fonctorialité. Ce sont les variétés de Shimura qui nous ont poussé à étudier la L-indiscernabilité. Pour en avoir, passons à la forme projective de G. Le L-groupe devient $SL(3, \mathbf{C}) \times \mathrm{Gal}(E/F)$, et pour éviter des explications à présent inutiles, je vais supposer que F est $\mathbf{Q}$ et que E est imaginaire. Soit ρ_0 le plongement de ${}^L G^0 = SL(3, \mathbf{C})$ dans $GL(3, \mathbf{C})$. C'est une représentation de dimension 3. Nous posons

$$\rho = \mathrm{Ind}({}^L G, {}^L G^0, \rho_0) \ .$$

Comme j'ai expliqué dans mon exposé [17], on pense que la fonciton zêta d'une variété de Shimura attachée à G est le produit de puissances des facteurs des fonctions $L\left(s - \frac{d}{2}, \pi, \rho\right)$ et une des raisons d'introduire les groupes endoscopiques est de donner une égalité précise qu'on essayera de vérifier ensuite par d'autres moyens. En particulier, on utilisera les groupes endoscopiques pour factoriser les fonctions $L(s, \pi, \rho)$.

Supposons le quotient $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})$ compact mais le groupe G déployé sur $\mathbf{R}$. La variété de Shimura est alors de dimension 2, et les représentations qui me troublent le plus sont celles qui donnent de la cohomologie dans les degrés 1 et 3. Si $\pi = \otimes\pi_v$ est une telle représentation, alors selon les résultats qui se trouvent dans le livre de Borel-Wallach, il y a deux possibilités pour π_∞.

Considérons les deux homomorphismes ϕ^1, ϕ^2 de $W_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}$ dans ${}^LG$ définis par

$$\phi^1\colon z \longmapsto \begin{pmatrix} z & & \\ & z^{-1}\bar{z} & \\ & & \bar{z}^{-1} \end{pmatrix} \times z \qquad z \in \mathbf{C}^\times$$

$$\phi^2\colon z \longmapsto \begin{pmatrix} \bar{z} & & \\ & z\bar{z}^{-1} & \\ & & z^{-1} \end{pmatrix} \times z \qquad z \in \mathbf{C}^\times$$

$$\phi^j\colon \sigma \longmapsto \begin{pmatrix} -i & & \\ & 1 & \\ & & i \end{pmatrix} \times \sigma \qquad j = 1, 2\ .$$

On prend pour $W_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}$ le groupe engendré par $\mathbf{C}^\times$ et σ avec $\sigma^2 = -1$. Suivant la classification des représentations des groupes réels, les L-paquets Π_{ϕ^1} et Π_{ϕ^2} ne contiennent qu'un élément: Soient $\pi^1 \in \Pi_{\phi^1}$ et $\pi^2 \in \Pi_{\phi^2}$. Ils sont les deux possibilités pour π_∞. Bien qu'on pense que χ_{π^1} et χ_{π^2} se trouvent dans la partie stable de la formule des traces, elles ne sont pas stables. Donc il ne faut pas attendre à démêler la formule des traces stable sans peine.

Mais π^1 et π^2 donnent une partie de dimension un de la cohomologie dans les degrés 1 et 3. En somme une partie de dimension deux de la cohomologie totale. Donc il ne semble pas être possible que les fonctions $L(s-d, \pi^i, \rho)$, qui sont des produits eulèrients de degré 6 sur $\mathbf{Q}$ ou de degré 3 sur E, apparaissent elles-même dans le produit donnant la fonction zêta. Il faut plutôt trouver des facteurs de degré 2 sur E, la variété de Shimura étant définie sur E. Elles seront selon toute probabilité des facteurs de $L(s-d, \pi^i, \rho)$, moyennant des modifications à un nombre fini de places.

On constate ensuite que même ces facteurs de degré 2 sur E doivent se factoriser, parce que les π^i donnent de la cohomologie dans les deux dimensions 1 et 3, et la fonction zêta elle-même se factorise au moyen des fonctions L attachées à la cohomologie dans chaque dimension. Donc si π_∞ est égale à π^1 ou π^2, il semble que $L(s, \pi, \rho)$ sera le produit de trois facteurs eulériens de degré 1. Mais si π relève à la représentation π' de $\mathrm{PGL}(3, A_E)$ alors $L(s, \pi, \rho) = L(s, \pi')$ si $L(s, \pi')$ est la fonction L standard de Godement-Jacquet. Donc on est porté à croire que π' sera une représentation eisensteinienne provenant d'un sous-groupe de Borel de $PGL(3)$, et c'est cela qu'il s'agit de vérifier, ce qui suggérera que la variété de Picard de la variété de Shimura est de type CM.

Le représentations de G ou plutôt de G^* qui se relèvent en des représentations eisensteiniennes doivent se manifester assez clairement pendant la démonstration de la possibilité d'un changement de base. Mais il est difficile de prévoir si les résultats de Jacquet-Shalika nous permettront d'établir que si le relèvement de π est cuspidal alors π_∞ n'est ni π^1 ni π^2.

Il y a un autre problème que Rapoport m'a signalé. Bien qu'il l'ait résolu par des méthodes géométrique [28] on voudrait trouver une solution dans le cadre des représentations automorphes. On suppose que le groupe

G est défini par un corps non-commutatif M de dimension 3 sur E et par une involution de M. Donc G n'est pas un groupe unitaire sur **Q** bien qu'il le soit sur **R**. On se demande, pour des raisons qui ne nous concernent pas à présent, si dans ce cas-ci il n'y a aucune représentation automorphe π de $G(A)$ pour laquelle π_∞ est π^1 ou π^2. Donc on se demande si la variété de Picard est triviale. Si on a résolu le problème pour G^* posé ci-dessus on pourra globalement résoudre celui pour G en tenant compte de la forme de l'application locale $f \to f^{G^*}$.

Enfin on voudra passer à d'autres groupes, surtout au groupe symplectique à quatre variables, mais personne n'a aboré ce groupe du côté de la formule des traces. Son L-groupe est le groupe projectif symplectique sur **C** qui se plonge dans $PGL(4, \mathbf{C})$, le L-groupe de $SL(4)$. Pour obtenir des bons résultats sur le groupe symplectique et d'autres groupes avec le même groupe adjoint il faudra probablement vérifier le principe de fonctorialité pour ce plongement, ce qui se fera peut-être au moyen d'une formule des traces tordues pour l'automorphisme extérieur $A \to {}^tA^{-1}$ de $SL(4)$. Je ne suis pas sûr, et je ne sais même pas si cela est pour le proche avenir.

VI. Des Propriétés Supplémentaires Locales

Supposons que nous ayons un diagramme

$$\begin{tikzcd} T_H \arrow[r, "\nu"] & \mathbf{T}_H \arrow[r] & \mathbf{T}_{G^*} & T_{G^*} \arrow[l, "\eta_*"'] \\ & & & T_G \arrow[ul, "\eta"] \arrow[u, "\psi_{T_G,T_{G^*}}"'] \end{tikzcd} \qquad (D)$$

En remplaçant T_G par T_{G^*}, $\psi_{T_G,T_{G^*}}$ par l'ientité, et η par η_* on obtient le diagramme D_* pour le groupe G^*. Supposons de plus que les deux facteurs de transfert $\Delta(\gamma_H, D, \phi_H)$ et $\Delta(\gamma_H, D_*, \phi_H)$ soient définis. Les résultats de Shelstad suggèrent que le quotient

$$\frac{\Delta(\gamma_H, D, \phi_H)}{\Delta(\gamma_H, D_*, \phi_H)}$$

sera une constante qui dépend de D et peut-être de ϕ_H mais pas de γ_H. Vu le facteur arbitraire dans $\Delta(\gamma_H, D, \phi_H)$ cette constante ne se laisse pas prédire.

Mais si on a deux diagrammes D et D' avec le même H et si on définit $c(D', D)$ par

$$(6.1) \qquad \frac{\Delta(\gamma'_H, D', \phi_H)}{\Delta(\gamma'_H, D'_*, \phi_H)} = c(D', D)\,\frac{\Delta(\gamma_H, D, \phi_H)}{\Delta(\gamma_H, D_*, \phi_H)}\ ,$$

alors $c(D', D)$, qu'on suppose indépendant de γ_H et γ'_H, ne dépend pas de ce facteur arbitraire, et le problème de le trouver explicitement se pose.

Dans ce chapitre nous définissons pour n'importe quel corps local de caractèristique zéro un invariant $c(D', D)$ attaché aux diagrammes D et D'. Pour le corps réel et le corps complexe nous vérifions à l'aide des résultats de Shelstad que l'égalité (6.1) est satisfaite. Il nous faudra pourtant dans la suite supposer qu'elle est vérifiée en général.

Nous commençons en rappelant des théormes de Poitou-Tate dont nous aurons besoin. Comme dans les notes polycopiées de Lang ([14]) nous les déduisons de la dualité de Tate-Nakayama.

1. Rappel des résultats locaux de Poitou-Tate

Soit F un corps local de caractéristique zéro et soit U un module galoisien fini sur F, donc un $\mathrm{Gal}(\bar F/F)$-module. Le module U étant donné on construit

$$\hat U = \mathrm{Hom}(U, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

et

$$A(\bar F) = \mathrm{Hom}(\hat U, \bar F^\times)\ ,$$

qui sont tous les deux des modules galoisiens finis, et $A(\bar F)$ est l'ensemble des points géométriques sur $\bar F$ d'un groupe multiplicatif A sur F.

Nous fixons un entier positif n tel que l'ordre de chaque élément de U divise n. Alors

$$\hat{U} = \mathrm{Hom}(U, n^{-1}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}(u, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \ .$$

Si $K \subseteq K'$ sont deux extensions galoisiennes de F dans $\bar{F}$ et si $\mathrm{Gal}(\bar{F}/K)$ opère trivialement sur U alors on a un plongement

$$H^{-1}(\mathrm{Gal}(K/F), U) \to H^{-1}(\mathrm{Gal}(K'/F), U) \ ,$$

et

$$H^{-1}(U) = \varinjlim_{K} H^{-1}(\mathrm{Gal}(K/F), U)$$

est le quotient de U par le sous-groupe engendré par

$$\{\sigma u - u | \sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F),\ u \in U\} \ .$$

Si on suppose encore, et on le suppose toujours, que K est suffisamment grand pour que $\mathrm{Gal}(\bar{F}/K)$ agisse trivialement alors on a

$$A(K) = \mathrm{Hom}(\hat{U}, K^{\times}) \ .$$

L'inflation donne des homomorphismes

$$H^2(\mathrm{Gal}(G/F), A(K)) \to H^2(\mathrm{Gal}(K'/F), A(K')) \ ,$$

et nous posons

$$H^2(A(\bar{F})) = \varinjlim_{K} H^2(\mathrm{Gal}(K/F), A(K)) \ .$$

Le premier résultat dont nous aurons besoin est le suivant.

Lemme 6.1: *Il existe pour chaque U un isomoprhisme*

$$H^1(U) \to H^2(A(\bar{F})) \ ,$$

et ces isomoprhismes sont fonctoriels relatifs à U.

Avant de la vérifier nous donnons l'énoncé d'un deuxième lemme dont nous aurons besoin. Le groupe

$$H^1(A(\bar{F})) = \varinjlim_{K} H^1(\mathrm{Gal}(K/F), A(K))$$

est défini aussi comme limite directe, mais pour un corps local de caractéristique zéro cette suite se stabilise.

Si $(A(F) = A(\bar{F})$ cela est évident parce que

$$H^1(\mathrm{Gal}(K/F), A(K)) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(K/F), A(F)) \ ,$$

et le corps F n'a qu'un nombre fini d'extensions abéliennes d'un degré donné. Pour le vérifier en général on choisit une extension galoisienne finie L telle que $A(\bar{F}) = A(L)$, et on utilise le diagramme à lignes et colonnes exactes ([26], p. 125):

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & 1 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \rightarrow & H^1(\mathrm{Gal}(L/F), A(L)) & \rightarrow & H^1(\mathrm{Gal}(K/F), A(K)) & \rightarrow & H^1(\mathrm{Gal}(K/L), A(K)) \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \rightarrow & H^1(\mathrm{Gal}(L/F), A(L)) & \rightarrow & H^1(\mathrm{Gal}(K'/F)), A(K')) & \rightarrow & H^1(\mathrm{Gal}(K'/L), A(K')) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & H^1(\mathrm{Gal}(K'/K), A(K')) & = & H^1(\mathrm{Gal}(K'/K), A(K')) \end{array}$$

Il s'agit bien sûr d'un diagramme compliqué qui se réduit à un calcul simple. De toute façon si l'on a une classe α dans $H^1(\mathrm{Gal}(K'/F), A(K'))$ et si son mage β dans $H^1(\mathrm{Gal}(K'/L), A(K'))$ provient de $H^1(\mathrm{Gal}(K/L), A(K))$, alors l'image de β et donc de α dans $H^1(\mathrm{Gal}(K'/K), A(K'))$ est zéro. On conclut que α provient de $H^1(\mathrm{Gal}(K/F), A(K))$.

On a aussi des homomoprhismes surjectifs

$$H^{-2}(\mathrm{Gal}(K'/F), U) \rightarrow H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F), U)$$

Si $\{\lambda_{\sigma'} | \sigma' \in \mathrm{Gal}(K'/F)\}$ est un cycle, on l'envoie sur $\{\lambda_\sigma | \sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)\}$, où

$$\lambda_\sigma = \sum_{\sigma' \rightarrow \sigma} \lambda_{\sigma'} \ .$$

Puisque la condition imposée sur un cycle est

$$\sum_\sigma \sigma^{-1} \lambda_\sigma = \sum_\sigma \lambda_\sigma \ ,$$

on vérifie sans peine que l'homomorphisme est surjectif. On choisit pour tout σ une image inverse $\bar{\sigma}$ et si $\{\lambda_\sigma\}$ est donné on pose $\lambda_{\sigma'} = \lambda_{\bar{\sigma}}$ si $\sigma' \rightarrow \sigma$ et $\sigma' = \bar{\sigma}$ mais $\lambda_{\sigma'} = 0$ si $\sigma' \rightarrow \sigma$ et $\sigma' \neq \bar{\sigma}$. Nous posons

$$H^{-2}(U) = \varprojlim_K H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F), U) \ .$$

C'est aussi une suite qui se stabilise.

Cela se vérifie en trois étapes. On observe d'abord que la suite

$$H^{-2}(\mathrm{Gal}(K'/K), U) \rightarrow H^{-2}(\mathrm{Gal}(K'/F), U) \rightarrow H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F), U) \rightarrow 0$$

est exacte même si l'action de $\mathrm{Gal}(K'/K)$ sur U n'est pas triviale. Il s'agit en effet d'un fait bien connu. Si l'image de $\{\lambda_{\sigma'}\}$ est zéro on peut supposer que

$$\sum_{\sigma' \to \sigma} \lambda_{\sigma'} = 0$$

pour chaque σ. Un bord est de la forme

$$\mu_{\sigma'} = \sum_{\tau \in \mathrm{Gal}(K'/F)} \tau^{-1}\mu_{\tau,\sigma'} + \mu_{\sigma',\tau} - \mu_{\tau^{-1},\tau\sigma}$$

Si $\sigma \neq 1$ et si σ' est donné soit $\sigma' = \bar{\sigma}\rho$, $\rho \in \mathrm{Gal}(K'/K)$. Si $\mu_{\tau_1,\tau_2}(\sigma') = 0$ sauf pour $\tau_1 = \bar{\sigma}$, $\tau_2 = \rho$ et si $\mu_{\bar{\sigma},\rho} = \lambda_{\sigma'}$ alors son bord est zéro sauf à ρ, $\bar{\sigma}$ et σ', où il prend respectivement les valeurs $\bar{\sigma}^{-1}\lambda_{\sigma'}$, $\lambda_{\sigma'}$, et $-\lambda_{\sigma'}$, ou, si $\rho = 1$, $\bar{\sigma}^{-1}\lambda_{\sigma'}$ et 0. On conclut qu'on peut supposer que $\lambda_{\sigma'} = 0$ si $\sigma \neq 1$, c'est-à-dire que $\{\lambda_{\sigma'}\}$ provient de $H^{-2}(\mathrm{Gal}(K'/K), U)$.

Pour vérifier que la suite se stabilise quand l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ est triviale on peut supposer que $U = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ de sorte que

$$H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F), U) = \mathrm{Gal}(K/F)/\bigcap_{\phi} N(\phi) \ ,$$

où ϕ parcourt l'ensemble des homomorphismes de $\mathrm{Gal}(K/F)$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ et $N(\phi)$ est ls noyau de ϕ.

Pour traiter le cas général on utilise le diagramme à lignes et colonnes exactes:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^{-2}(\mathrm{Gal}(K'/K), U) & = & H^{-2}(\mathrm{Gal}(K'/K), U) & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
H^{-2}(\mathrm{Gal}(K'/L), U) & \to & H^{-2}(\mathrm{Gal}(K'/F), U) & \to & H^{-2}(\mathrm{Gal}(L/F), U) & \to & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/L), U) & \to & H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F), U) & \to & H^{-2}(\mathrm{Gal}(L/F), U) & \to & 1
\end{array}$$

Si α dans $H^{-2}(\mathrm{Gal}(K'/F), U)$ s'envoie sur 0 dans $H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F), U)$ il provient d'un élément β dans $H^{-2}(\mathrm{Gal}(K'/K), U)$. Si la flèche verticale en bas à gauche est injective alors l'image de β dans $H^{-1}(\mathrm{Gal}(K'/L), U)$ est zéro. Il en résulte que α est zéro.

Nous vérifions maintenant le Lemme 6.1 et le lemme suivant.

Lemme 6.2: *Il existe pour chaque U un isomorphisme*

$$H^{-2}(U) \to H^1(A(\bar{F}))$$

et ces isomorphismes sont fonctoriels en U.

Mais nous ne voulons pas seulement vérifier l'existence de ces isomorphismes mais aussi les donner d'une façon explicite. Nous expliquons maintenant comment ils se définissent.

Si ε est une racine n-ième de l'unité dans $\bar{F}$ et si u est dans $\mathbf{N}$, alors ε^u sera l'élément de $A(\bar{F})$ qui envoie $\hat{u}$ dans $\hat{U} = \mathrm{Hom}(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ dans $\varepsilon^{\langle u,\hat{u}\rangle}$.

Soit K/F une extension galoisienne suffisamment grande mais finie et soit $\alpha = \{\alpha_{\rho,\sigma}\}$ un représentant de la classe fondamentale de K/F. Soit K' une extension de K dans $\bar{F}$ qui contient les racines n-ièmes des $\alpha_{\rho,\sigma}$. Soit $\beta = \{\beta_{\rho,\sigma}\}$ tel que

$$\beta^n_{\rho,\sigma} = \alpha_{\rho,\sigma} \ ,$$

et définissons le 3-cocycle

$$\delta = \{\delta_{\rho',\sigma',\tau'} | \rho', \sigma', \tau' \in \mathrm{Gal}(K'/F)\}$$

à valeurs dans le groupe des racines n-ièmes de l'unité par

$$\delta_{\rho',\sigma',\tau'} = \rho'(\beta_{\sigma,\tau})\beta^{-1}_{\rho\sigma,\tau}\beta^{-1}_{\rho,\sigma}$$

si ρ, σ, τ sont les images de ρ', σ', τ' dans $\mathrm{Gal}(K/F)$. Puisque $\delta_{\rho',\sigma',\tau'}$ ne dépend que de ρ', σ, τ me permets d'écrire $\delta_{\rho',\sigma,\tau}$ ou $\delta_{\rho',\sigma',\tau}$.

Chaque élément de $H^{-1}(U)$ est représenté par un élément u de U tel que pour un K suffisamment grand

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(K/F)} \sigma u = 0 \ .$$

Nous posons

$$b_{\rho',\sigma'} = \prod_{\tau\in\mathrm{Gal}(K/F)} \delta^{-\rho\sigma\tau u}_{\rho',\sigma',\tau} \in A(K') \tag{6.2}$$

J'affirme que $b = \{b_{\rho',\sigma'}\}$ est un 2-cocycle.

En effet on a les égalités

$$\pi'(\delta_{\rho',\sigma,\tau})\delta^{-1}_{\pi',\rho',\sigma,\tau}\delta_{\pi',\rho,\sigma} = 1 \ .$$

Donc le bord de b, qui est donné par

$$\Pi_\tau \pi'(\delta_{\rho',\sigma,\tau})^{-\pi\rho\sigma\tau u}\delta^{\pi\rho\sigma\tau u}_{\pi',\rho',\sigma,\tau}\delta^{-\pi\rho\sigma\tau u}_{\pi',\rho\sigma,\tau}\delta^{\pi\rho\tau u}_{\pi',\rho,\tau}$$

est égal à

$$\Pi_\tau \delta^{-\pi\rho\sigma\tau u}_{\pi',\rho,\sigma} = \delta^{-\pi\rho\sigma\Sigma\tau u}_{\pi',\rho,\sigma} = 1 \ .$$

Que la classe de b dans $H^2(A(\bar{F}))$ ne dépend pas du choix de u, $\{\alpha_{\rho,\sigma}\}$, $\{\beta_{\rho,\sigma}\}$ et K' résulte d'un calcul facile, mais la vérification directe qu'elle ne dépend pas de K m'échappe, bien qu'une telle vérification doit en principe exister. Heureusement la preuve que $\{u\} \to \{b\}$ est un isomorphisme établit au même temps qu'il est bien défini.

Supposons que $\{u_\sigma | \sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)\}$ définisse un élément de $H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F), U)$. Nous posons

$$b_{\rho'} = \Pi_{\sigma,\tau} \delta_{\rho',\sigma,\tau}^{\rho\sigma u_\tau} \ . \tag{6.3}$$

On vérifie sans peine que $\{b_{\rho'}\}$ est un cocycle, et définit donc un élément de $H^1(A(\bar{F}))$. Nous donnerons plus tard la preuve qu'on obtient de cette façon un homomorphisme bien défini de $H^{-2}(U)$ dans $H^1(A(\bar{F}))$ pourvu que K soit assez grand, et en particulier que

$$\begin{tikzcd} H^{-2}(\mathrm{Gal}(K'/F), U) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F), U) \arrow[dl] \\ & H^1(A(\bar{F})) & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Pour les démonstrations nous choisissons une extension finie de F telle que U se donne comme $\mathrm{Gal}(L/F)$-module et ensuite deux suites exactes:

$$0 \to X \to Y \to U \to 0 \ ; \tag{6.4}$$

$$0 \to \hat{V} \to \hat{W} \to \hat{U} \to 0 \ . \tag{6.5}$$

Dans ces suites $X, Y, \hat{V}$, et $\hat{W}$ sont des $\mathbf{Z}$-modules de rang fini et sans torsion sur lesquels $\mathrm{Gal}(L/F)$ agit, et Y et $\hat{W}$ sont des $\mathrm{Gal}(L/F)$-modules libres.

Dualisant nous obtenons:

$$0 \to \hat{Y} \to \hat{X} \to \hat{U} \to 0 \ ; \tag{6.6}$$

$$0 \to W \to V \to U \to 0 \ . \tag{6.7}$$

On a posé, par exemple, $\hat{X} = \mathrm{Hom}(X, \mathbf{Z})$. On a $\hat{X} \subseteq \mathrm{Hom}(Y, \mathbf{Q})$. Soit $\left\langle \lambda, \hat{\lambda} \right\rangle$ la valeur de $\lambda \in \hat{X}$ à $\hat{\lambda} \in Y$. Si λ représente u et $\hat{\lambda}$ représente $\hat{u}$ alors

$$\langle u, \hat{u} \rangle \equiv \left\langle \lambda, \hat{\lambda} \right\rangle \pmod{\mathbf{Z}}$$

où on a pris pour $\hat{U}$ le groupe $\mathrm{Hom}(U, n^{-1}\mathbf{Z}/\mathbf{Z})$. Si on prend $\mathrm{Hom}(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ alors

$$\langle u, \hat{u} \rangle \equiv n \left\langle \lambda, \hat{\lambda} \right\rangle \pmod{n\mathbf{Z}} \ .$$

Soient S_X et S_Y les tores algèbriques attachés à X et Y. Donc

$$S_X(\bar{F}) = \mathrm{Hom}(X, \bar{F}^\times) \ ,$$

et on a une suite exacte

$$1 \to A(\bar{F}) \to S_X(\bar{F}) \to S_Y(\bar{F}) \to 1 \ .$$

Si α est dans $\bar{F}^\times$ et λ dans X soit α^λ l'élément dans $S_X(\bar{F})$ qui envoie $\hat{\lambda}$ sur $\alpha^{\langle\lambda,\hat{\lambda}\rangle}$. On observe que si ε est une racine n-ième de l'unité et u dans U est représenté par λ dans Y alors l'image de $\varepsilon^u \in A(\bar{F})$ est $\varepsilon^{n\lambda} \in S_X(F)$.

Nous avons un diagramme commutatif qu'il reste à expliquer:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & H^{-1}(U) & \to & \varinjlim_K H^0(\mathrm{Gal}(K/F), X) & \to & \varinjlim_K H^0(\mathrm{Gal}(K/F), Y) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & H^2(A(\bar{F})) & \to & \varinjlim_K H^2(\mathrm{Gal}(K/F), S_X(K)) & \to & \varinjlim_K H^2(\mathrm{Gal}(K/F), S_Y(K)) \end{array} \tag{6.8}$$

La suite horizontale en bas est la suite évidente qu'on obtient en utilisant le théorème 90 de Hilbert qui affirme que

$$H^1(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), S_Y(\bar{F})) = 0 \ ,$$

ainsi que l'égalité

$$H^2(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), S_X(\bar{F})) = \varinjlim_K H^2(\mathrm{Gal}(K/F), S_X(K))$$

et la même égalité pour Y.

la suit ehorizontale en haut s'obtient des diagrammes commutatifs:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & H^{-1}(\mathrm{Gal}(K/F), U) & \to & H^0(\mathrm{Gal}(K/F), X) & \to & H^0(\mathrm{Gal}(K/F), Y) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & H^{-1}(\mathrm{Gal}(K'/F), U) & \to & H^0(\mathrm{Gal}(K'/F), X) & \to & H^0(\mathrm{Gal}(K'/F), Y) \ . \end{array}$$

La deuxième et la troisième flèche verticale sont données par $\lambda \to [K'\colon K]\lambda$.

L'isomorphisme

$$H^0(\mathrm{Gal}(K/F), X) \to H^2(\mathrm{Gal}(K/F), S_X(K))$$

donné par la théorie de Tate-Nakayama est

$$\lambda \to \{\alpha^\lambda_{\rho,\sigma}\}$$

si λ est un élément invariant de X. Puisque l'inflation de la classe fondamentale $\{\alpha_{\rho,\sigma}\}$ de K à K' est la $[K'\colon K]$-ième puissance de la classe fondamentale de K', ces isomorphismes commutent avec la limite directe, et on obtient le diagramme (6.8), qui donne alors un isomorphisme $H^{-1}(U) \to H^2(A(\bar{F}))$.

Pour l'expliciter nous choisissons un élément λ de Y dont l'image u dans U représente une classe donnée. alors

$$\mu = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)} \sigma\lambda$$

est contenu dans X et est invariante. Son image dans $H^2(\mathrm{Gal}(K/F), S_X(K))$ est la classe de $\{\alpha^\mu_{\rho,\sigma}\}$. Dans $S_Y(K)$ le bord de

$$\{a_\sigma\} = \left\{ \prod_{\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)} \alpha^{\sigma\tau\lambda}_{\sigma,\tau} \right\}$$

est

$$\Pi_\tau \rho(\alpha_{\sigma,\tau})^{\rho\sigma\tau\lambda}\ \alpha_{\rho\sigma,\tau}^{-\rho\sigma\tau\lambda}\ \alpha_{\rho,\tau}^{\rho\tau\lambda} = \alpha_{\rho,\sigma}^{\mu}\ .$$

Donc pour trouver l'image de la classe donnée dans $H^2(A(\bar{F}))$ on relève $\{a_\sigma\}$ à $S_X(K')$, K' étant une extension galoisienne convenable de F contenant K. En effet $\lambda' = n\lambda$ est dans X et

$$b_\sigma = \prod_{\tau\in \mathrm{Gal}(K/F)} \beta_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\lambda'}$$

est un relèvement de a_σ. Avant de calculer le bord il faut se rendre compte que les éléments b_σ ne sont pas dans $S_X(K)$ mais dans $S_X(K')$, et nous posons $b_{\sigma'} = b_\sigma$ si $\sigma' \to \sigma$. De la même façon nous posons $a_{\rho',\sigma'} = a_{\rho,\sigma}$ si $\rho' \to \rho$, $\sigma' \to \sigma$. Si $\{c_{\rho',\sigma'}\}$ est le bord de $\{b_{\rho'}\}$ l'image de la classe donnée est la classe de

$$\left\{a^{\mu}_{\rho',\sigma'}\ c^{-1}_{\rho',\sigma'}\right\}\ . \tag{6.9}$$

Mais

$$\begin{aligned} c_{\rho',\sigma'} &= \prod_{\tau\in \mathrm{Gal}(K/F)} \rho'(\beta_{\sigma,\tau})^{\rho\sigma\tau\lambda'}\ \beta_{\rho\sigma,\tau}^{-\rho\sigma\tau\lambda'}\ \beta_{\rho,\tau}^{\rho\tau\lambda'} \\ &= \left\{\prod_\tau \delta_{\rho',\sigma,\tau}^{\rho\sigma\tau\lambda'}\right\}\cdot\left\{\beta_{\rho,\sigma}^{\Sigma_\tau \rho\sigma\tau\lambda'}\right\}\ . \end{aligned}$$

Puisque

$$\sum_{\tau\in \mathrm{Gal}(K/F)} \tau\lambda' = n\mu$$

et μ est déjà dans X le deuxième facteur du produit est $\alpha^{\mu}_{\rho,\sigma}$. Par conséquent (6.9) est égal à

$$\left\{\prod_\tau \delta_{\rho',\sigma,\tau}^{-\rho\sigma\tau\lambda'}\right\}\ ,$$

qui est, avec nos conventions de notation,

$$\left\{\prod_\tau \delta_{\rho',\sigma,\tau}^{-\rho\sigma\tau\lambda'}\right\}\ ,$$

le 2-cocycle donné par (6.2).

Nous revenons maintenant à (6.3), pour lequel nous construisons un diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccccc} \varprojlim_K H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F), W) & \to & \varprojlim_K H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F), V) & \to & H^{-2}(U) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \varprojlim_K H^{0}(\mathrm{Gal}(K/F), S_W(K)) & \to & \varprojlim_K H^{0}(\mathrm{Gal}(K/F), S_V(K)) & \to & H^{1}(A(\bar{F})) & \to & 0 \end{array} \tag{6.10}$$

De ce diagramme on pourra au moins déduire l'existence de l'isomorphisme du lemma 6.2.

La construction de la suite en haut est évidente. Pour celle en bas, on définit d'abord un homomorhisme

$$H^0(\mathrm{Gal}(K'/F), S_W(K')) \to H^0(\mathrm{Gal}(K/F), S_W(K))$$

en envoyant la classe représentée par s, prise modulo $\mathrm{Nm}_{K'/F} S_W(K')$, sur sa classe modulo $\mathrm{Nm}_{K/F} S_W(K)$. Cela, et les homomorphismes analogues pour S_V, nous donne les limites inverses et la première flèche.

Pour la deuxième on choisit une extension galoisienne de F finie mais suffisamment grande pour que

$$\mathrm{Nm}_{K_0/F} S_V(K_0) \subseteq S_V(F)^n \ .$$

Alors la même relation est valable pour chaque K qui contient K_0. Puisque le noyau de $S_W(\bar{F}) \to S_V(\bar{F})$ est $A(\bar{F})$ l'ordre de chacun de ses éléments est divisible par n. Donc si $s \in S_V(F)$ est l'image de t dans $S_W(\bar{F})$ on a

$$\sigma(t) = a_\sigma t \,, \quad a_\sigma \in A(\bar{F})$$

pour chaque $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, et $t^n \in S_W(F)$.

Par conséquent, si on attache à chaque s dans $S_V(F)$ le bord d'une image inverse de s dans $S_W(\bar{F})$ on obtient pour chaque K contenant K_0 un homomorphisme bien défini de

$$H^0(\mathrm{Gal}(K/F), S_V(K)) = S_V(F)/\mathrm{Nm}_{K/F} S_V(K)$$

dans $H^1(A(\bar{F}))$. En passant à la limite on obtient la deuxième flèche de la ligne en bas. L'exactitude résulte du théorème 90 de Hilbert.

Le deux flèches verticales seront définies par la dualité de Tate-Nakayama. Plus explicitement, si $\{\lambda_\sigma\}$, qui satisfait l'équation

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)} \sigma^{-1} \lambda_\sigma = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)} \lambda_\sigma \ ,$$

représente une classe dans $H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F), V)$, alors l'isomorphisme de $H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F), V)$ sur $H^0(\mathrm{Gal}(K/F), S_V(K))$ envoie cette classe sur

$$a = \prod_{\sigma\tau} \alpha_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\lambda}$$

Toutefois il faut vérifier que ces isomorphismes sont compatibles avec les limites inverses. Nous prenons une extension finie $\bar{K}$ contenant K et nous rappelons comment on déduit la classe fondamentale de l'extension K/F de celle de $\bar{K}/F$. Puisque il ne s'agit que d'un rappel nous prenons pour point de départ le groupe de Weil. On se souvient du diagramme:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \bar{K}^\times & \to & W_{\bar{K}/F} & \to & \mathrm{Gal}(\bar{K}/F) & \to & 1 \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\ 1 & \to & K^\times & \to & W_{K/F} & \to & \mathrm{Gal}(K/F) & \to & 1 \ . \end{array}$$

La flèche à gauche est la norme.

Si on prend pour chaque $\bar{\sigma}$ dans $\mathrm{Gal}(\bar{K}/F)$ une image inverse $u_{\bar{\sigma}}$ dans $W_{\bar{K}/F}$ alors

$$u_{\bar{\rho}}\, u_{\bar{\sigma}} = \bar{\alpha}_{\bar{\rho},\bar{\sigma}} u_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} \ ,$$

et $\bar{\alpha}_{\bar{\rho},\bar{\sigma}}$ donne la classe fondamentale de $\bar{K}/F$. La façon la plus convenable de choisir les $u_{\bar{\sigma}}$ est de choisir d'abord pour chaque σ dans $\mathrm{Gal}(K/F)$ une image inverse, notée encore σ, dans $\mathrm{Gal}(K/F)$ et, les u_σ et u_π, $\pi \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ étant choisis avec $u_1 = 1$, de poser

$$u_{\pi\sigma} = u_\pi u_\sigma \ .$$

Alors

$$\bar{\alpha}_{\pi,\sigma} = 1$$
$$\bar{\alpha}_{\pi_1,\pi_2\sigma} = \bar{\alpha}_{\pi_1,\pi_2} \ .$$

L'image de u_{π_1} dans $W_{K/F}$ est contenu dans $K^\times$ et est égale à

$$\prod_{\pi \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)} \bar{\alpha}_{\pi,\pi_1} \ .$$

Si $\rho\sigma = \tau$ dans $\mathrm{Gal}(K/F)$ et si $\rho\sigma = \pi_{\rho,\sigma}\tau$ dans $\mathrm{Gal}(\bar{K}/F)$, où $\pi_{\rho,\sigma}$ est dans $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ alors

$$u_\rho u_\sigma = \bar{\alpha}_{\rho,\sigma} u_{\pi_{\rho,\sigma}} u_\tau \ .$$

On prend pour représentant d'un élément σ de $\mathrm{Gal}(K/F)$ dans $W(K/F)$ l'image de u_σ de sorte que la classe fondamentale de K/F est donnée par

$$\begin{aligned} \alpha_{\rho,\sigma} &= (\mathrm{Nm}_{\bar{K}/K}\bar{\alpha}_{\rho,\sigma})\Bigg(\prod_{\pi \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)} \bar{\alpha}_{\pi,\pi_{\rho,\sigma}}\Bigg) \\ &= (\mathrm{Nm}_{\bar{K}/K}\bar{\alpha}_{\rho,\sigma})\Bigg(\prod_{\pi \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)} \bar{\alpha}_{\pi,\rho\sigma}\Bigg) \ . \end{aligned}$$

L'image de la classe de $\{\bar{\lambda}_{\bar{\tau}} | \bar{\tau} \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/F)\}$ dans $H^0(\mathrm{Gal}(\bar{K}/F), S_V(\bar{K}))$ est représentée par

$$a = \prod_{\sigma,\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)} \ \prod_{\pi_1,\pi_2 \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)} \bar{\alpha}_{\pi_1\sigma,\pi_2\tau}^{\sigma\bar{\lambda}_{\pi_2}\tau} \ .$$

Mais

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{\pi_1\sigma,\pi_2\tau} &= \pi_1\sigma(\bar{\alpha}_{\pi_2,\tau})^{-1}\bar{\alpha}_{\pi_1\sigma\pi_2,\tau}\bar{\alpha}_{\pi_1\sigma,\pi_2} \\ &= \bar{\alpha}_{\pi_1\sigma\pi_2,\tau}\bar{\alpha}_{\pi_1\sigma,\pi_2} \end{aligned}$$

Puisque on prend la produit sur π_1 on peut remplacer le premier facteur par

$$\bar{\alpha}_{\pi_1\sigma,\tau} = \pi_1(\bar{\alpha}_{\sigma,\tau})\bar{\alpha}_{\pi_1,\sigma\tau}\bar{\alpha}_{\pi_1,\sigma}^{-1} = \pi_1(\bar{\alpha}_{\sigma,\tau})\bar{\alpha}_{\pi_1,\sigma,\tau} \ .$$

Donc si

$$\lambda_\tau = \sum_{\pi \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)} \bar{\lambda}_{\pi\tau}$$

on a

$$\overline{a} = \left\{ \prod_{\alpha,\tau} \alpha_{\sigma,\tau}^{\sigma\lambda_\tau} \right\} \left\{ \prod_{\pi_1,\pi_2,\sigma,\tau} \bar{\alpha}_{\pi_1\sigma,\pi_2}^{\alpha\bar{\lambda}_{\pi_2\tau}} \right\}$$

Pour érifier la compatibilité avec les limites inverses il suffit de vérifier que le deuxième facteur à droite est une norme.

On remplace $\pi_1\sigma$ par $\sigma\pi_1$ et observe que

$$\bar{\alpha}_{\sigma\pi_1,\pi_2} = \sigma\left(\bar{\alpha}_{\pi_1,\pi_2}\right) \bar{\alpha}_{\sigma,\pi_1\pi_2} \bar{\alpha}_{\sigma,\pi_1}^{-1} \ .$$

Prenant la produit on obtient

$$\prod_\tau \prod_\sigma \sigma \bigg(\prod_{\pi_1,\pi_2} \bar{\alpha}_{\pi_1,\pi_2}^{\bar{\lambda}_{\pi_2\tau}} \bigg) \ ,$$

ce qui est évidemment une norme.

Il reste à vérifier que l'isomorphisme défini par le diagramme (6.10) est celui de (6.3). Si K contient K_0 et si $\{u_\sigma | \sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)\}$ définit un élément dans $H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F), U)$ on peut trouver des λ_σ dans V tels que $\lambda_\sigma \to u_\sigma$ et

$$\sum \sigma^{-1}\lambda_\sigma = \sum \lambda_\sigma \ .$$

On forme ensuite

$$a = \prod_{\sigma,\tau} \alpha_{\sigma,\tau}^{\sigma\lambda_\tau}$$

dans $S_V(F)$, dont une image inverse dans $S_W(\bar{F})$ est

$$b = \prod_{\sigma,\tau} \beta_{\sigma,\tau}^{\sigma\lambda'_\tau} \ ,$$

où $\lambda'_\tau = n\lambda_\tau$. Le bord de b est

$$\prod_{\sigma,\tau} \rho'(\beta_{\sigma,\tau})^{\rho\sigma\lambda'_\tau} \beta_{\sigma,\tau}^{-\sigma\lambda'_\tau} = \prod_{\sigma,\tau} \rho'(\beta_{\sigma,\tau})^{\rho\sigma\lambda'_\tau} \beta_{\rho\sigma,\tau}^{-\rho\sigma\lambda'_\tau}$$

qui est égal à

$$\left\{ \prod_{\sigma,\tau} \delta_{\rho',\sigma,\tau}^{\rho\sigma\lambda'_\tau} \right\} \left\{ \prod_{\sigma,\tau} \beta_{\rho,\sigma\tau}^{-\rho\sigma\lambda'_\tau} \right\} \left\{ \prod_{\sigma,\tau} \beta_{\rho,\sigma}^{\rho\sigma\lambda'_\tau} \right\}$$

Puisque $\sum \tau^{-1}\lambda'_\tau = \sum \lambda'_\tau$ ce produit se réduit à

$$\prod_{\sigma,\tau} \delta_{\rho',\sigma,\tau}^{\rho\sigma\lambda'_\tau} = \prod_{\sigma,\tau} \delta_{\rho',\sigma,\tau}^{\rho\sigma u_\tau}$$

Les deux lemmes sont maintenant démontrés et nous passons à la définition de l'invariant $\theta(E, E')$.

2. L'invariant $\theta(E, E')$

On se donne comme dans le chapitre III, $\psi\colon G \to G^*$ et le sous-groupe de Cartan $\mathbf{T}_{G^*}$. Nous voulons attacher à un couple de diagrammes:

$$E\colon\quad \begin{tikzcd} T_{G^*} & T_{G^*} \arrow[l, "\eta_*"'] \\ & T_G \arrow[ul, "\eta"] \arrow[u, "\psi_{T_G,T_{G^*}}"'] \end{tikzcd}$$

$$E'\colon\quad \begin{tikzcd} \mathbf{T}_{G^*} & T'_{G^*} \arrow[l, "\eta'_*"'] \\ & T_G \arrow[ul, "\eta'"] \arrow[u, "\psi_{T'_G,T'_{G^*}}"'] \end{tikzcd}$$

un invariant $\theta(E,E')$ dans $X_*(T'_{G^*_{\mathrm{sc}}})$.

Puisque tous les objets de ces diagrammes se relèvent d'une façon unique au revêtement simplement connexe nous pouvons y passer tout de suite en supposant que G lui-même est simplement connexe. L'isomorphisme $\psi_{T_G,T_{G^*}}$ s'étend à un homomorphisme φ_{T_G,T^*_G} de G sur G^* défini à un élément de $\mathrm{ad}\, T^*(\bar F)$ près. Pour l'instant nous fixons $\varphi_{T_G,T_{G^*}}$ aussi bien que $\varphi_{T'_G,T'_{G^*}}$. Il existe un $g \in G^*(\bar F)$ tel que

$$\varphi_{T'_G,T'_{G^*}} = \mathrm{ad}\ g \circ \varphi_{T_G,T_{G^*}}\ .$$

Puisque les deux diagrammes donnent des isomorphismes de T_{G^*} et T'_{G^*} sur $\mathbf{T}_{G^*}$ ils donnent aussi un isomorphisme de T_{G^*} sur T'_{G^*} et de $X_*(T_{G^*})$ sur $X_*(T'_{G^*})$, ce qui nous permet de les identifier comme modules sur $\mathbf{Z}$, mais pas comme modules galoisiens. Les actions de σ dans le groupe de Galois seront notées $\sigma_{T_{G^*}}$ et $\sigma_{T'_{G^*}}$. On identifie aussi – en définissant θ – les deux modules $X_*(T_{G^*_{\mathrm{ad}}})$ et $X_*(T'_{G^*_{\mathrm{ad}}})$, et donc les quotients

$$U = X_*\left(T_{G^*_{\mathrm{ad}}}\right)/X_*(T_{G^*})$$

et

$$U' = X_*\left(T'_{G^*_{\mathrm{ad}}}\right)/X_*(T'_{G^*})$$

Sur les quotients l'identification est compatible avec les actions du groupe de Galois.

Selon les hypothèses

$$\sigma\left(\varphi_{T_G,T_{G^*}}\right)\varphi^{-1}_{T_G,T_{G^*}} = \mathrm{ad}\ t_\sigma$$

avec $t_\sigma \in T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(\bar F)$ si $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar F/F)$. Alors

$$\sigma\left(\varphi_{T'_G,T'_{G^*}}\right)\varphi^{-1}_{T'_G,T'_{G^*}} = \mathrm{ad}(\sigma(g)t_\sigma g^{-1}) = \mathrm{ad}\ s_\sigma$$

avec $s_\sigma \in T'_{G^*_{\mathrm{ad}}}(\bar F)$.

Le groupe de type multiplicatif défini par U est le centre A de G^* ou de G. Soit n son ordre. A cause des suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & T_{G^*}(\bar F) & \to & T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(\bar F) & \to & A(\bar F) & \to & 1 \\ 1 & \to & T'_{G^*}(\bar F) & \to & T'_{G^*_{\mathrm{ad}}}(\bar F) & \to & A(\bar F) & \to & 1 \end{array}$$

les classes de $\{t_\sigma\}$ et $\{s_\sigma\}$ nous donnent des images dans $H^2(F, A)$. Pour les calculer on prend des images inverses y_σ dans $T_{G^*}(\bar{F})$ des t_σ et des images inverses x_σ dans $T'_{G^*}(\bar{F})$ des s_σ, et puis on prend leurs bords. Nous prenons les y_σ vérifiant pour unique condition que $\sigma \to y_\sigma$ est une fonction localement constante sur $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, et alors, ce qui sera une condition importante par la suite, nous prenons

$$x_\sigma = \sigma(g) y_\sigma g^{-1} \ . \tag{6.11}$$

Un calcul immédiat donne

$$\begin{aligned} \rho(x_\sigma) x_\rho x_{\rho\sigma}^{-1} &= \rho\sigma(g)\rho(y_\sigma)\rho(g)^{-1}\rho(g) y_\rho g^{-1} g\, y_{\rho\sigma}^{-1}\rho\sigma(g^{-1}) \\ &= \rho\sigma(g) \left[\rho(y_\sigma) y_\rho y_{\rho\sigma}^{-1}\right] \rho\sigma(g^{-1}) \\ &= \rho(y_\sigma) y_\rho y_{\rho\sigma}^{-1} \end{aligned}$$

parce que ce dernier élément est contenu dans le centre.

D'autre part si on prend l'extension galoisienne K/F suffisamment grande alors les s_σ et t_σ ne dépendent que de $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$ et selon la théorie de Tate-Nakayama on a des égalités

$$\begin{aligned} s_\sigma &= \left\{ \prod_{\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)} \alpha_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\lambda'} \right\} \sigma(a) a^{-1} \ , \\ t_\sigma &= \left\{ \prod_{\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)} \alpha_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\lambda} \right\} \sigma(b) b^{-1} \end{aligned}$$

où $\{\alpha_{\sigma,\tau}\}$ est la classe fondamentale, $\lambda \in X_*(T_{G^*_{\mathrm{ad}}})$ satisfait

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)} \sigma_{T_{G^*}} \lambda = 0$$

et $\lambda' \in X_*(T'_{G^*_{\mathrm{ad}}})$ satisfait

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)} \sigma_{T'_{G^*}} \lambda' = 0 \ .$$

D'ailleurs $a \in T'_{G^*_{\mathrm{ad}}}(\bar{F})$, $b \in T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(\bar{F})$. On observe que σ dénote soit un élément de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, soit son image dans $\mathrm{Gal}(K/F)$.

On définit $\beta_{\rho,\sigma}$ comme dans les preuves du lemme 6.1 et du lemme 6.2 et on pose $\mu = n\lambda$, $\mu' = n\lambda'$. Alors le bord de $\{x_\sigma\}$ est dans la classe du bord de

$$\prod_{\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)} \beta_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\mu'} \ ,$$

qui se calcule facilement. Comme précédemment, nous dénotons l'image de $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ dans $\mathrm{Gal}(K'/F)$ par σ'.

$$\begin{aligned} \prod_\tau \sigma' \left(\beta_{\sigma,\tau}^{\rho\sigma\tau\mu'}\right) \beta_{\rho,\tau}^{\rho\tau\mu'} \beta_{\rho\sigma,\tau}^{-\rho\sigma\tau\mu'} &= \left\{\prod_\tau \delta_{\rho',\sigma,\tau}^{\rho\sigma\tau\mu'}\right\} \left\{\prod_\tau \beta_{\rho,\sigma}^{\rho\sigma\tau\mu'}\right\} \\ &= \prod_\tau \delta_{\rho',\sigma,\tau}^{\rho\sigma\tau\mu'} \ . \end{aligned}$$

La classe du bord de $\{y_\sigma\}$ est celle de

$$\prod_\tau \delta_{\rho',\sigma,\tau}^{\rho\sigma\tau\mu} \ .$$

On déduit du lemme 6.1 qu'il existe des éléments ν_σ dans $X_*(T'_{G^*_{\mathrm{ad}}})$ tels que

$$\lambda - \lambda' - \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)} \sigma_{T'_G}^{-1} \nu_\sigma - \nu_\sigma \in X_*(T'_{G^*}) \ .$$

Puisque

$$\begin{aligned}\prod_\tau \alpha_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau}(\varepsilon^{-1}\nu - \nu) &= \prod_\tau \left(\alpha_{\sigma,\tau\varepsilon}\alpha_{\sigma,\tau}^{-1}\right)^{\sigma\tau\nu} \\ &= \sigma\Big(\prod_\tau \alpha_{\tau,\varepsilon}^{-\tau\nu}\Big)\Big(\prod_\tau \alpha_{\sigma\tau,\varepsilon}^{\sigma\tau\nu}\Big) \\ &= \sigma\Big(\prod_\tau \alpha_{\tau,\varepsilon}^{-\tau\nu}\Big)\Big(\prod_\tau \alpha_{\tau,\varepsilon}^{\tau\nu}\Big)\end{aligned}$$

est un bord pour chaque ε, nous pouvons remplacer λ' par

$$\lambda' + \sum_\sigma \sigma_{T'_{G^*}}^{-1} \nu_\sigma - \nu_\sigma$$

et supposer que

$$\lambda - \lambda' \in X_*(T'_{G^*}) \ . \tag{6.12}$$

Sous l'hypothèse (6.12) nous allons définir

$$\theta = \theta(E, E') = \theta(E, \lambda;\ E', \lambda') \ .$$

L'influence de λ et λ' sur θ minimale.

Si d est un relèvement de b à $T_{G^*}(\bar F)$ on peut choisir pour y_σ:

$$y_\sigma = \Big\{\prod_\tau \beta_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\mu}\Big\}\sigma(d)d^{-1} \ .$$

Alors si c est un relèvement de a à $T'_{G^*}(\bar F)$ on a

$$x_\sigma = \Big\{\prod_\tau \beta_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\mu'}\Big\}\left\{\sigma(c)c^{-1}\right\}\varepsilon_\sigma \ ,$$

où ε_σ est contenu dans $A(\bar F)$. En prenant les bords de $\{x_\sigma\}$ et $\{y_\sigma\}$ et en tenant compte de (6.12) on constate que

$$\rho(\varepsilon_\sigma)\varepsilon_\rho\varepsilon_{\rho\sigma}^{-1} = 1 \ .$$

Donc $\{\varepsilon_\sigma\}$ définit une classe dans $H^1(F,A)$ qui correspond à une classe de $H^{-2}(F,U)$. Si K est suffisamment grand, plus précisément si $K \supseteq K_0$, cette classe est donnée par un ensemble $\{u_\sigma | \sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)\} \subseteq U$ et u_σ se relève en $\nu_\sigma \in X_*(T'_{G^*_{\mathrm{ad}}})$. Nous posons

$$\theta(E,\lambda;\, E',\lambda') = \lambda - \lambda' - \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)} \sigma^{-1}_{T'_{G^*}} \nu_\sigma - \nu_\sigma \ .$$

Les ν_σ seront presque aussi importants que θ. Pour souligner qu'eux aussi, ils dépendent de E, E', λ et λ' nous écrivons

$$\nu_\sigma = \nu_\sigma(E,E') = \nu_\sigma(E,\lambda;\, E',\lambda') \ .$$

Bien qu'ils ne sont pas bien définis,, on a au moins le lemme suivant, qui nous suffit.

Lemme 6.3: *(a) Si K, λ, et λ' sont donnés et si K est suffisamment grand alors la différence entre deux choix des $\nu_\sigma(E,\lambda;\, E',\lambda')$ est égale à $\omega^1_\sigma + \omega^2_\sigma + \omega^3_\sigma$ où $\omega^1_\sigma \in X_*(T'_{G^*})$, ω^2_σ, $\omega^3_\sigma \in X_*(T'_{G^*_{\mathrm{ad}}})$,*

$$\sum \sigma^{-1}_{T'_{G^*}} \omega^2_\sigma = \sum \omega^2_\sigma$$

et

$$\sum \sigma^{-1}_{T_{G^*}} \omega^3_\sigma = \sum \omega^3_\sigma$$

(b) *Si K est suffisamment grand et si $K \subseteq \bar{K}$ alors on peut prendre*

$$\nu_\sigma(E,\lambda;\, E',\lambda') = \sum_{\bar\sigma \to \sigma} \nu_{\bar\sigma}(E,\lambda;\, E',\lambda')$$

Pour vérifier le lemme nous considérons tour à tour l'influence des divers choix faits dans la définition des ν_σ. Les termes ω^1_σ tiennent compte de l'ambiguïté dans le relèvement des u_σ. Si on remplace $\{u_\sigma\}$ par

$$\left\{ u_\sigma - \sum_\tau (\tau^{-1} v_{\tau,\sigma} + v_{\sigma,\tau} - v_{\sigma\tau^{-1},\tau}) \right\}$$

alors on remplace ν_σ par

$$\nu_\sigma - \sum_\tau \tau^{-1}_{T'_{G^*}} \eta_{\tau,\sigma} + \eta_{\sigma,\tau} - \eta_{\sigma\tau^{-1},\tau} \ ,$$

$\eta_{\sigma,\tau}$ étant un relèvement de $v_{\sigma,\tau}$. Mais si

$$\omega^2_\sigma = \sum_\tau \tau^{-1}_{T'_{g^*}} \eta_{\tau,\sigma} + \eta_{\sigma,\tau} - \eta_{\sigma\tau^{-1},\tau}$$

alors

$$\sum \sigma^{-1}_{T'_{G^*}} \omega^2_\sigma = \sum \omega^2_\sigma \ .$$

Il est possible de remplacer $\beta_{\sigma,\tau}$ par $\varepsilon_{\sigma,\tau}\beta_{\sigma,\tau}$ avec $\varepsilon^n_{\sigma,\tau} = 1$. Alors y_σ se multiplie par

$$\prod_\tau \varepsilon^{\sigma\tau\mu}_{\sigma,\tau}$$

et x_σ se multiplie par le même facteur. Mais

$$\prod_\tau \beta_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\mu'}$$

se multipliant par

$$\prod_\tau \varepsilon_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\mu'}$$

et

$$\prod_\tau \varepsilon_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau(\mu-\mu')}$$

étant égal à

$$\prod_\tau \varepsilon_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau n(\lambda-\lambda')} = 1$$

les facteurs ε_σ ne changent pas.

Si les éléments a et b sont donnés, un nouveau choix de c ou de d ne modifie $\{\varepsilon_\sigma\}$ que par un bord, et par conséquent ne modifie pas $\theta(E,E')$. Pour vérifier que l'invariant ne dépend pas du choix de a et b il faut supposer que l'extension K/F est suffisamment grande pour que:

$$\begin{aligned}\mathrm{Nm}_{K/K_0} T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(F) &\subseteq T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(F)^n\\ \mathrm{Nm}_{K/K_0} T'_{G^*_{\mathrm{ad}}}(F) &\subseteq T'_{G^*_{\mathrm{ad}}}(F)^n \ .\end{aligned}$$

Supposons que nous remplaçons a par ae avec $e \in T'_{G^*_{\mathrm{ad}}}(F)$ et b par bfs avec $f \in T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(F)$. Alors il existe $\eta'_\sigma \in X_*(T'_{G^*_{\mathrm{ad}}})$ et $\eta_\sigma \in X_*(T_{G^*_{\mathrm{ad}}})$ tels que

$$\begin{aligned}e &= \Big\{\prod_{\rho,\sigma} \alpha_{\rho,\sigma}^{\rho\eta'_\sigma}\Big\} p^n, \qquad p \in T'_{G^*_{\mathrm{ad}}}(F) \ ,\\ f &= \Big\{\prod_{\rho,\sigma} \alpha_{\rho,\sigma}^{\rho\eta_\sigma}\Big\} q^n, \qquad q \in T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(F) \ ,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum \sigma_{T'_{G^*}}^{-1} \eta'_\sigma &= \sum \eta'_\sigma\\ \sum \sigma_{T_{G^*}}^{-1} \eta_\sigma &= \sum \eta_\sigma \ .\end{aligned}$$

Nous avons déjà constaté que p^n et q^n se relèvent à $T'_{G^*}(F)$ et $T_{G^*}(F)$ respectivement. Un relèvement possible du premier facteur de e est

$$\prod_{\rho,\sigma} \beta_{\rho,\sigma}^{\rho\xi'_\sigma} \qquad \xi'_\sigma = n\eta'_\sigma \ ,$$

dont le bord est

$$\begin{aligned}\prod_{\sigma,\tau} \rho'(\beta_{\sigma,\tau})^{\rho\sigma\xi'_\tau} \beta_{\sigma,\tau}^{-\sigma\xi'_\tau} &= \Big\{\prod_{\sigma,\tau} \beta_{\rho,\sigma}^{\rho\sigma(\Sigma\tau^{-1}\xi'_\tau - \xi'_\tau)}\Big\}\Big\{\prod_{\sigma,\tau} \delta_{\rho',\sigma,\tau}^{\rho\sigma\xi'_\tau}\Big\}\\ &= \prod_{\sigma,\tau} \delta_{\rho',\sigma,\tau}^{\rho\sigma\xi'_\tau}\end{aligned}$$

Faisant le même calcul pour f nous trouvons que nous avons finalement remplacé u_σ par

$$\nu_\sigma + \eta'_\sigma - \eta_\sigma \qquad (\operatorname{mod} X_*(T'_{G^*}))\ .$$

Soit

$$\{\alpha_{\sigma,\tau}\sigma(\gamma_\tau)\gamma_\sigma\gamma_{\sigma\tau}^{-1}\}$$

un autre représentant de la classe fondamentale. Si δ_σ est une racine n-ième de γ_σ et si σ'_0 est un relèvement donné de $\sigma \in \operatorname{Gal}(K/F)$ à $\operatorname{Gal}(K'/F)$ on peut remplacer $\beta_{\sigma,\tau}$ par

$$\beta_{\sigma,\tau}\sigma'_0(\delta_\tau)\delta_\sigma\delta_{\sigma\tau}^{-1}\ .$$

Alors

$$\prod_\tau \alpha_{\sigma\tau}^{\sigma\tau\lambda} \to \left\{\prod_\tau \alpha_{\sigma\tau}^{\sigma\tau\lambda}\right\}\left\{\prod_\tau \sigma(\gamma_\tau)^{\sigma\tau\lambda}\gamma_\sigma^{\sigma\tau\lambda}\gamma_{\sigma\tau}^{-\sigma\tau\lambda}\right\}$$

Puisque $\sum \tau\lambda = 0$, le deuxième facteur est égal à

$$\sigma\left(\prod_\tau \gamma_\tau^{\tau\lambda}\right)\left(\prod_\tau \gamma_\tau^{\tau\lambda}\right)^{-1}$$

et il faut remplacer b par

$$b\prod_\tau \gamma_\tau^{-\tau\lambda}$$

et d par

$$d\prod_\tau \gamma_\tau^{-\tau\mu}\ .$$

De la même façon

$$c \to c\prod_\tau \delta_\tau^{-\tau\mu'}\ .$$

D'autre part

$$\prod_\tau \beta_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\mu} \to \left\{\prod_\tau \beta_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\mu}\right\}\left\{\prod_\tau \sigma'_0(\delta_\tau)^{\sigma\tau\mu}\delta_{\sigma\tau}^{-\sigma\tau\mu}\right\}$$

Donc

$$y_\sigma \to y_\sigma \prod_\tau (\sigma'_0(\delta_\tau)\sigma(\delta_\tau^{-1}))^{\sigma\tau\mu}\ ,$$

où $\sigma \in \operatorname{Gal}(\bar{F}/F)$ et σ'_0 et un relèvement donné de son image dans $\operatorname{Gal}(K/F)$ à $\operatorname{Gal}(K'/F)$. Le quotient

$$\sigma'_0(\delta_\tau)\sigma(\delta_\tau^{-1})$$

est une racine n-ième de l'unité de sorte que

$$\prod_\tau (\sigma'_0(\delta_\tau)\sigma(\delta_\tau^{-1}))^{\sigma\tau\mu} \in A(\bar{F})\ .$$

En traitant $\prod_\tau \beta_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\mu'}$ de la même façon on déduit que

$$\varepsilon_\sigma \to \varepsilon_\sigma \prod_\tau (\sigma_0'(\delta_\tau)\sigma(\delta_\tau^{-1}))^{\sigma\tau(\mu-\mu')} = \varepsilon_\sigma \ ,$$

parce que

$$\mu - \mu' = n(\lambda - \lambda')$$

et $\lambda - \lambda' \in X_*(T'_{G^*})$.

Le premier énoncé du lemme est maintenant vérifié et nous passons au deuxième. On se souviente de l'égalité

$$\alpha_{\rho,\sigma} = \prod_{\pi \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)} \pi(\bar{\alpha}_{\rho,\sigma})\bar{\alpha}_{\pi,\rho\sigma}$$

vérifiée au paragraphe précédent. Si

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)} \sigma\lambda = 0$$

on a

$$\prod_{\bar{\tau} \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/F)} \bar{\alpha}_{\bar{\sigma},\bar{\tau}}^{\sigma\tau\lambda} = \prod_{\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)} \prod_{\pi \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)} \bar{\alpha}_{\bar{\sigma},\pi\tau}^{\sigma\tau\lambda} \ ,$$

où comme ci-dessus τ dénote soit un élément de $\mathrm{Gal}(K/F)$ soit un relèvement donné dans le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{K}/F)$. On a de plus

$$\begin{aligned}\prod_\tau \prod_\pi \bar{\alpha}_{\bar{\sigma},\pi\tau}^{\sigma\tau\lambda} &= \prod_\tau \prod_\pi \left\{\bar{\alpha}_{\bar{\sigma}\pi,\tau}\bar{\alpha}_{\bar{\sigma},\pi}\bar{\alpha}(\bar{\alpha}_{\pi,\tau})^{-1}\right\}^{\sigma\tau\lambda} \\ &= \prod_\tau \prod_\pi \bar{\alpha}_{\bar{\sigma}\pi,\tau}^{\sigma\tau\lambda}\end{aligned}$$

parce que $\bar{\alpha}_{\pi,\tau} = 1$. Nous pouvons remplacer $\bar{\sigma}$ par σ et $\sigma\pi$ pour obtenir

$$\prod_\tau \prod_\pi \bar{\alpha}_{\pi\sigma,\tau}^{\sigma\tau\lambda} = \prod_\tau \left\{\prod_\pi \pi(\bar{\alpha}_{\sigma,\tau})\bar{\alpha}_{\pi,\sigma\tau}\right\}^{\sigma\tau\lambda} \ ,$$

parce que $\bar{\alpha}_{\pi,\sigma} = 1$. On en déduit qu'en passant de K à $\bar{K}$ il ne faut pas changer λ ou λ' et par conséquent aucun des a, b, c, d.

En définissant $\bar{\beta}_{\bar{\sigma},\bar{\tau}}$ on obtient une extension $\bar{K}'$ du corps K. Si $\pi \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ soit π' un relèvement fixe à $\mathrm{Gal}(\bar{K}'/K)$ et si $\bar{\sigma} \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ soit $\bar{\sigma}'$ un relèvement fixe à $\mathrm{Gal}(\bar{K}'/F)$. Nous choisissons $\bar{\beta}_{\bar{\rho},\bar{\sigma}}$ de telle façon que $\bar{\beta}_{\pi,\sigma} = 1$, et nous prenons

$$\beta_{\rho,\sigma} = \prod_{\pi \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)} \pi'(\bar{\beta}_{\rho,\sigma})\bar{\beta}_{\pi,\rho\sigma} \ .$$

Calculons le produit

$$\prod_{\tau,\pi} \bar{\beta}_{\bar{\sigma},\pi\tau}^{\sigma\tau\mu}$$

Il est égal à

$$\prod_{\tau,\pi}\left\{\bar\beta_{\bar\sigma\pi,\tau}\bar\beta_{\bar\sigma,\pi}\bar\sigma'(\bar\beta_{\pi,\tau})^{-1}\right\}^{\sigma\tau\mu}\prod_{\tau,\mu}\delta^{\sigma\tau\mu}_{\bar\sigma',\pi,\tau}$$

Le premier facteur est égal à

$$\prod_{\tau}\prod_{\pi}\bar\beta^{\sigma\tau\mu}_{\bar\sigma\pi,\tau}=\prod_{\tau,\pi}\pi'(\bar\beta_{\sigma,\tau})\bar\beta_{\pi,\sigma\tau}\beta^{-1}_{\pi,\sigma}\delta^{-\sigma\tau\mu}_{\pi',\sigma,\tau}\ .$$

On en déduit que le passage de K à $\bar K$ entraîne le remplacement de y_σ par

$$\bar y_\sigma=y_\sigma\prod_{\tau,\pi}\delta^{\sigma\tau\mu}_{\bar\sigma',\pi,\tau}\delta^{-\sigma\tau\mu}_{\pi',\sigma,\tau}\ .$$

Un calcul semblable avec λ' au lieu de λ nous montre que

$$\varepsilon_\sigma\to\bar\varepsilon_\sigma=\varepsilon_\sigma\prod_{\tau,\pi}\delta^{\sigma\tau(\mu-\mu')}_{\bar\sigma',\pi,\tau}\delta^{\sigma\tau(\mu'-\mu)}_{\pi',\sigma,\tau}=\varepsilon_\sigma\ .$$

Le deuxième énoncé est alors vérifié.

Il nous reste à découvrir l'influence des choix de λ et λ'.

Lemme 6.4: *Supposons que*

$$\lambda_1=\lambda+\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(K/F)}\sigma^{-1}_{T_{G^*}}\eta_\sigma-\eta_\sigma,\qquad \eta_\sigma\in X_*(T'_{G^*_{\mathrm{ad}}})\ ,$$
$$\lambda_1'=\lambda'+\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(K/F)}\sigma^{-1}_{T'_{G^*}}\xi_\sigma-\xi_\sigma\ ,\qquad \xi_\sigma\in X(T'_{G^*_{\mathrm{ad}}})\ ,$$

où

$$\sum\sigma^{-1}_{T_{G^*}}\eta_\sigma-\eta_\sigma\equiv\sum\sigma^{-1}_{T'_{G^*}}\xi_\sigma-\xi_\sigma\qquad\quad(\mathrm{mod}\,X_*(T'_{G^*}))\ .$$

Alors

$$\nu_\sigma(E,\lambda_1;\,E',\lambda_1')=\nu_\sigma(E,\lambda;\,E',\lambda')+\eta_\sigma-\xi_\sigma\ .$$

Un calcul facile que nous avons déjà eu l'occasion de faire nous montre que

$$\prod_\tau\alpha^{\sigma\tau\lambda_1}_{\sigma,\tau}=\left\{\prod_\tau\alpha^{\sigma\tau\lambda}_{\sigma,\tau}\right\}\sigma\left(\prod_{\tau,\varepsilon}\alpha^{-\tau\eta_\varepsilon}_{\tau,\sigma}\right)\left(\prod_{\tau,\varepsilon}\alpha^{\tau\eta_\varepsilon}_{\tau,\varepsilon}\right)\ ,$$

de sorte que

$$b\to b_1=b\prod_{\tau,\varepsilon}\alpha^{\tau\eta_\varepsilon}_{\tau,\varepsilon}\ .$$

De la même façon

$$a\to a_1=a\prod_{\tau,\varepsilon}\alpha^{\tau\xi_\varepsilon}_{\tau,\varepsilon}\ .$$

Donc

$$c \to c_1 = c \prod_{\tau,\varepsilon} \beta_{\tau,\varepsilon}^{\tau\xi'_\varepsilon} \ , \qquad \xi'_\varepsilon = n\xi_\varepsilon$$

$$d \to d_1 = d \prod_{\tau,\varepsilon} \beta_{\tau,\varepsilon}^{\tau\eta'_\varepsilon} \ , \qquad \eta'_\varepsilon = n\eta_\varepsilon \ .$$

On en déduit que y_σ est multiplié par

$$\prod_{\tau,\varepsilon} \beta_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\varepsilon^{-1}\eta'_\varepsilon} \beta_{\sigma,\tau}^{-\sigma\tau\eta'_\varepsilon} \sigma'(\beta_{\tau,\varepsilon})^{\sigma\tau\eta'_\varepsilon} \beta_{\tau,\varepsilon}^{-\tau\eta'_\varepsilon} = \prod_{\tau,\varepsilon} \delta_{\sigma',\tau,\varepsilon}^{\sigma\tau\eta'_\varepsilon} \ .$$

On se souvient que σ dénote ici un élément de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ aussi bien que son image dans $\mathrm{Gal}(K/F)$, et que σ' est l'image de σ dans $\mathrm{Gal}(K'/F)$. Le produit à droite est un élément central et selon sa définition x_σ se multiplie par le même facteur.

Puisque

$$\left\{\prod_{\tau} \beta_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\mu'}\right\} \sigma(c)c^{-1}$$

se multiplie par

$$\prod_{\tau,\varepsilon} \delta_{\sigma',\tau,\varepsilon}^{\sigma\tau\xi'_\varepsilon} \ ,$$

l'élément ε_σ se multiplie par

$$\prod_{\tau,\varepsilon} \delta_{\sigma',\tau,\varepsilon}^{\sigma\tau(\eta'_\varepsilon - \xi'_\varepsilon)} \ ,$$

ce qui implique que ν_σ se remplace par

$$\nu_\sigma + \eta_\sigma - \xi_\sigma \ .$$

Les lemmes 6.3 et 6.4 impliquent les propriétés suivantes de l'invariant $\theta(E,\lambda;\ E',\lambda')$.

Lemme 6.5:

(a) *Si λ et λ' sont donnés l'invariant $\theta(E,\lambda;\ E',\lambda')$ est défini à un élément $\sum \sigma_{T_{G^*}}^{-1}\omega_\sigma - \omega_\sigma$ près, où $\omega_\sigma = \omega_\sigma^1 + \omega_\sigma^2 + \omega_\sigma^3$, les ω_σ^i satisfaisant les conditions du lemme 6.3.*

(b) *Si on ne fixe pas λ et λ' alors l'invariant $\theta(E,E') = \theta(E,\lambda;\ E',\lambda')$ est défini à un élément $\sum \sigma_{T'_{G^*}}^{-1}\omega_\sigma - \omega_\sigma$ près, où*

$$\omega_\sigma = \omega_\sigma^1 + \omega_\sigma^2 + \omega_\sigma^3,\ \omega_\sigma^1 \in X_*(T'_{G^*}) \ ,$$

et

$$\sum \sigma_{T'_{G^*}}^{-1}(\omega_\sigma^2 + \omega_\sigma^3) - (\omega_\sigma^2 + \omega_\sigma^3) = \sum \left(\sigma_{T'_{G^*}}^{-1} - \sigma_{T_{G^*}}^{-1}\right)\omega_\sigma^2$$

Avant de tenir les invariants $\nu_\sigma(E,\lambda;\ E',\lambda')$ et $\theta(E,\lambda;\ E',\lambda')$ pour définis, il faut tenir compte de l'influence des choix de g, $\varphi_{T_G,T_{G^*}}$, et $\varphi_{T'_G,T'_{G^*}}$.

Si $\varphi_{T_G,T_{G^*}}$ et $\varphi_{T'_G,T'_{G^*}}$ sont donnés, la seule façon de modifier g est de le remplacer par γg, $\gamma \in A(\bar{F})$, ce qui remplace ε_σ par $\sigma(\gamma)\varepsilon_\sigma\gamma^{-1}$. Par conséquent les invariants ne changent pas.

On peut remplacer $\varphi_{T_G,T_{G^*}}$ par

$$\mathrm{ad}(f)\varphi_{T_G,T_{G^*}}, \quad f \in T_{G^*}(\bar{F})$$

et $\varphi_{T'_G,T'_{G^*}}$ par

$$\mathrm{ad}(e)\varphi_{T'_G,T'_{G^*}}, \quad e \in T'_{G^*}(\bar{F}) \ .$$

Soient $\bar{e}$ et $\bar{f}$ les images de e et f dans $G^*_{\mathrm{ad}}(\bar{F})$. Alors

$$\begin{aligned} &t_\sigma \to \sigma(\bar{f})t_\sigma\bar{f}^{-1} \qquad y_\sigma \to \sigma(f)t_\sigma f^{-1} \ , \\ &g \to e\,g\,f^{-1}, \\ &s_\sigma \to \sigma(\bar{e})s_\sigma\bar{e}^{-1}, \qquad x_\sigma \to \sigma(e)^{-1}x_\sigma e^{-1} \ . \end{aligned}$$

Sonc ni λ, ni λ', ni $\{\varepsilon_\sigma\}$ ne se modifient, mais seulement c et d, ce qui ne change pas les invariants.

Nous passons maintenant à quelques propriétés de l'invariant $\theta(E,E')$.

3. Des propriétés de l'invariant $\theta(E,E')$

Soient $Z(E,E')$ l'ensemble des $\{\omega_\sigma | \sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)\} \subseteq X_*(T'_{G^*_{\mathrm{ad}}}) = X_*(T_{G^*_{\mathrm{ad}}})$ tels que $\omega_\sigma = \omega^1_\sigma + \omega^2_\sigma + \omega^3_\sigma$ où les ω^i_σ satisfont les conditions du lemme 6.3. Quoiqu'il est facile de tenir compte du comportement de $Z(E,E')$ quand le corps K s'élargit, ce qui nous importe à l'instant est que $\{\nu_\sigma(E,\lambda;\, E',\lambda')\}$ est défini modulo $Z(E,E')$ pour un K donné mais suffisamment grand, et nous voulons vérifier ses propriétés élémentaires.

Lemme 6.6: *On a*

$$\{\nu_\sigma(E,\lambda;\, E',\lambda')\} \equiv \{-\nu_\sigma(E',\lambda';\, E,\lambda)\} \qquad (\mathrm{mod}\, Z(E,E')) \ .$$

On observe que $Z(E,E') = Z(E',E)$ comme la symétrie exige. L'effet de la substitution $E \leftrightarrow E'$ et$\lambda \leftrightarrow \lambda'$ est évidemment de remplacer $\{\varepsilon_\sigma\}$ par $\{\varepsilon_\sigma^{-1}\}$ et donc $\{u_\sigma\}$ par $\{-u_\sigma\}$ et $\{\nu_\sigma\}$ par $\{-\nu_\sigma\}$.

Lemme 6.7: *On a*

$$\{\nu_\sigma(E,\lambda;\, E',\lambda') + \nu_\sigma(E',\lambda';\, E'',\lambda'')\} \equiv \{\nu_\sigma(E,\lambda;\, E'',\lambda'')\}$$

modulo $Z(E,E') + Z(E',E'')$.

Si

$$\varphi_{T'_G,T'_{G^*}} = \mathrm{ad}\ g \circ \varphi_{T_G,T_{G^*}}$$

et

$$\varphi_{T''_G,T''_{G^*}} = \mathrm{ad}\ h \circ \varphi_{T'_G,T'_{g^*}}$$

alors

$$\varphi_{T''_G,T''_{G^*}} = \mathrm{ad}\ hg \circ \varphi_{T_G,T_{G^*}} \ .$$

Si $x_\sigma = \sigma(g)y_\sigma g^{-1}$ et $w_\sigma = \sigma(h)x_\sigma h^{-1}$ alors.

$$w_\sigma = \sigma(hg)y_\sigma g^{-1}h^{-1} \ .$$

Mais si

$$y_\sigma = \left(\prod_\tau \beta_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\mu}\right)\sigma(d)d^{-1}$$

et

$$x_\sigma = \left(\prod_\tau \beta_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\mu'}\right)(\sigma(c)c^{-1})\varepsilon_\sigma$$

alors pour définir $\nu_\sigma(E', E'')$ il faut remplacer x_σ par $\bar{x}_\sigma = x_\sigma\varepsilon_\sigma^{-1}$ et w_σ par $\bar{w}_\sigma = w_\sigma\varepsilon_\sigma^{-1}$. Soit

$$\bar{w}_\sigma = \left(\prod_\tau \beta_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\mu''}\right)(\sigma(e)e^{-1})\gamma_\sigma$$

de sorte que

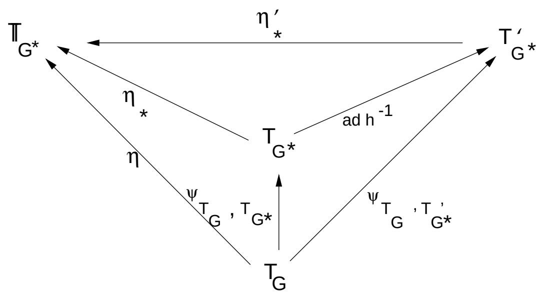
$$w_\sigma = \left(\prod_\tau \beta_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\mu''}\right)(\sigma(e)e^{-1})\gamma_\sigma\varepsilon_\sigma \ .$$

Donc la classe dans $H^1(\mathrm{Gal}(K/F), A(K))$ attachée à E, λ, E'', λ'' est la produit de celles attachées à E, λ, E', λ' et E', λ', E'', λ''; d'où le lemme.

Si $h \in \mathfrak{A}(T_{G^*}/F)$ on peut attacher à E un diagramme adjoint E' relatif à h en posant $T'_{G^*} = \mathrm{ad}\ h^{-1}(T_{G^*})$, $T'_G = T_G$, $\eta'_* = \eta_* \circ \mathrm{ad}\ h$, et

$$\psi_{T'_G,T'_{G^*}} = \mathrm{ad}\ h^{-1} \circ \psi_{T_G,T_{G^*}} \ .$$

L'homomorphisme η ne change pas. D'une façon plus graphique:



le cocycle $\{a\} = \{\sigma(h)h^{-1}\}$ est contenu dans $T_{G^*_{\mathrm{sc}}}(K)$ et définit un invariant η dans $X_*(T_{G^*_{\mathrm{sc}}})$.

Lemme 6.8: *On peut prendre $\lambda' = \lambda - \eta$ et on a alors*

$$\nu_\sigma(E, \lambda;\ E', \lambda') \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}(Z(E, E'))) \ .$$

On a $g = h^{-1}$;

$$s_\sigma = \mathrm{ad}\ \sigma(h^{-1}) t_\sigma \,\mathrm{ad}(h) = \mathrm{ad}(h^{-1})((\mathrm{ad}\ a_\sigma^{-1}) t_\sigma) \ ,$$

d'où la possibilité de prendre $\lambda' = \lambda - \eta$. De plus

$$x_\sigma = \mathrm{ad}\ h^{-1}(a_\sigma^{-1} y_\sigma) \ .$$

Mais

$$a_\sigma^{-1} = \Big(\prod_{\sigma,\tau} \alpha_{\sigma,\tau}^{-\sigma\tau\eta}\Big)\sigma(e)e^{-1} = \Big(\prod_{\sigma,\tau} \beta_{\sigma,\tau}^{-\sigma\tau\xi}\Big)(\sigma(e)e^{-1})$$

xi $\xi = n\eta$. Donc si $\mu = n\lambda$,

$$x_\sigma = \mathrm{ad}\ h^{-1}\bigg(\Big(\prod_{\sigma,\tau} \beta_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau(\mu-\xi)}\Big)(\sigma(ed)d^{-1}e^{-1})\bigg) \ .$$

Tenant compte de nos conventions on déduit de cette égalité que $\varepsilon_\sigma \equiv 1$, et le lemme est vérifié.

On peut aussi attacher à $h \in \mathfrak{A}(T_G/F)$ un diagramme adjoint E' avec $\psi_{T'_G, T_{G^*}} = \psi_{T_G, T_{G^*}} \circ \mathrm{ad}\ h$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T}_{G^*} & T_{G^*} \arrow[l] & \\
 & & T'_G \arrow[ul, "\psi_{T'_G, T_{G^*}}"'] \\
 & T_G \arrow[uu, "\psi_{T_G, T_{G^*}}"] \arrow[ur, "\mathrm{ad}\ h^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Soit $\eta \in X_*(T_{G_{\mathrm{sc}}})$ l'invariant attaché à $\{a_\sigma\} = \{\sigma(h)h^{-1}\}$. Le lemme suivant se vérifie de la même façon que le lemme 6.8.

Lemme 6.9: *Onpeut prendre $\lambda' = \lambda + \eta$ et alors on a*

$$\nu_\sigma(E, \lambda;\ E', \lambda') \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}(Z(E, E'))) \ .$$

La dernière propriété de $\{\nu_\sigma(E, \lambda;\ E', \lambda')\}$ à vérifier est plus difficile à formuler. Supposons que F soit non archimédien et que sa caractéristique résiduelle soit première à l'ordre du centre de G_{sc}. Nous supposons en plus que K/F est une extension non ramifiées assez grande pour que chacun des tores dans les diagrammes se déploie sur K et que $\psi_{T_G, T_{G^*}}$ et $\psi_{T'_G, T'_{G^*}}$ proviennent d'isomorphismes $\varphi_{T_G, T_{G^*}}$ et $\varphi_{T'_G, T'_{G^*}}$ définis sur K. Nous supposons aussi que G est quasi-déployé sur F. Soient U et U^* des sous-groupes compacts hyper-spéciaux donnés de $G(K)$ et $G^*(K)$ invariants sous l'action de $\mathrm{Gal}(K/F)$. Si $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}^*$ sont les immeubles de Bruhat-Tits attachés à $G(K)$ et $G^*(K)$ alors U et U^* sont attachés à des sommets $x \in \mathfrak{X}$ et $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Nous supposons que x est contenu dans les appartements de T_G et de T'_G et que x^* est contenu dans les appartements de T_{G^*} et T'_{G^*}. Si toutes ces conditions sont vérifiées nous disons que la couple E, E' est non ramifié relativement à U, U^* ou smplement non ramifié si U et U^* ne sont pas explicités.

Lemme 6.10: *Si E, E' est non ramifié on peut choisir $\lambda = \lambda' = 0$ et on a alors*

$$\nu_\sigma(E, \lambda;\, E', \lambda') \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, Z(E, E'))\ .$$

Les préparatifs sont plus difficiles que la vérification. En effet $\varphi_{T_G, T_{G^*}}$ et $\varphi_{T'_G, T'_{G^*}}$ définissent des bijections $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^*$. En remplaçant au besoin $\varphi_{T_G, T_{G^*}}$ par ad $t \circ \varphi_{T_G, T_{G^*}}$ et $\varphi_{T'_G, T'_{G^*}}$ par ad $t \circ \varphi_{T'_G, T'_{G^*}}$ avec $t \in T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(K)$ et $t' \in T'_{G_{\mathrm{ad}}}(K)$ nous pouvons supposer que

$$\varphi_{T_G, T_{G^*}}(x) = \varphi_{T'_G, T'_{G^*}}(x) = x^*\ .$$

Alors t_σ est contenu dans le stabilisateur $T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(K)_{x^*}$ de x^* dans $T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(K)$.

Mais le groupe

$$H^1(\mathrm{Gal}(K/F), T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(K)_{x^*})$$

est réduit à l'élément neutre et on a

$$t_\sigma = \sigma(b) b^{-1}, \quad b \in T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(K)_{x^*}\ .$$

Puisque la caractéristique résiduelle est première à l'ordre du centre de G_{sc}, nous pouvons supposer, en élargissant K au besoin, que b se relève en $d \in T_{G^*}(K)$, et nous prenons

$$y_\sigma = \sigma(d) d^{-1}\ .$$

On a

$$\varphi_{T'_G, T'_{G^*}} = \mathrm{ad}\ g \circ \varphi_{T_G, T_{G^*}}$$

où ad g est dans $G^*_{\mathrm{ad}}(K)$ et fixe x^*. En prenant une extension non ramifiée encore plus grande nous pouvons supposer que $g \in G^*_{\mathrm{sc}}(K)$ et donc $g \in U^*$. Alors

$$x_\sigma = \sigma(gf) f^{-1} g^{-1} \in T'_{G^*_{\mathrm{sc}}}(K)_{x^*}\ .$$

Puisque

$$H^1(\mathrm{Gal}(K/F), T'_{G^*_{\mathrm{sc}}}(K)_{x^*}) = 1$$

on a

$$x_\sigma = \sigma(c) c^{-1}\ ,$$

et le lemme résulte des définitions.

Supposons qu'on ait deux diagrammes D et D' de la sorte introduite dans le chapitre III. Donc, par exemple, soit D le diagramme

$$\begin{tikzcd}
T_H \arrow[r, "\nu"] & \mathbb{T}_H \arrow[r] & \mathbb{T}_{G^*} & T_{G^*} \arrow[l, "\eta_*"'] \\
 & & & T_G \arrow[ul, "\eta"] \arrow[u, "\psi_{T_G,T_{G^*}}"']
\end{tikzcd}$$

En enlevant T_H, T'_H, et $\mathbf{T}_H$, nous obtenons des diagrammes E et E'.

Nous supposons dans la suite de ce chapitre que E, E', ou E'' proviennent de D, D', ou D'' et que les mêmes données endoscopiques interviennent dans D, D', et D''. La donnée s définit un caractère de $X_*(\mathbf{T}_H)$ et aussi, à l'aide des identifications permises par les diagrammes, un caractère $\kappa = \kappa(D) = \kappa(D')$ de $X_*(T_{G^*_{\mathrm{sc}}}) = X_*(T'_{G^*_{\mathrm{sc}}}) = X_*(T''_{G^*_{\mathrm{sc}}})$.

Lemme 6.11:

(a) *La valeur $\kappa(\theta(E,E'))$ est bien définie.*

(b) *On a*

$$\kappa(\theta(E,E')) = \kappa(\theta(E',E))^{-1}$$

et

$$\kappa(\theta(E,E'')) = \kappa(\theta(E,E'))\kappa(\theta(E',E''))$$

Les définitions sont telles que κ est égal à 1 sur

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(K/F)} \sigma^{-1}\mu_\sigma - \mu_\sigma$$

si $\{\mu_\sigma\} \in Z(D,D')$. Donc $\kappa(\theta(E,\lambda;\ E',\lambda'))$ est bien défini. Si $\mu_\sigma \in X_*(T'_{G^*_{\mathrm{ad}}})$ alors

$$\sum \left(\sigma^{-1}_{T'_{g^*}} - \sigma^{-1}_{T_{G^*}}\right)\mu_\sigma = \sum(\omega(\sigma)^{-1}-1)\sigma^{-1}_{T_{G^*}}\mu_\sigma$$

où

$$\sigma_{T'_{G^*}} = \sigma_{T_{G^*}}\omega(\sigma)\ .$$

Puisque $\omega(\sigma)$ est contenu dans la groupe de Weyl de H,

$$\kappa((\omega(\sigma)^{-1}-1)\sigma^{-1}_{T_{G^*}}\mu_\sigma) = 1\ .$$

En tenant compte du lemme 6.5 (b), on conclut que $\kappa(\theta(E,E'))$ est bien défini.

Quant à l'affirmation (b), on a

$$\theta(E, E') = \lambda - \lambda' - \sum \sigma_{T'_{G^*}}^{-1} \nu_\sigma(E, \lambda;\, E', \lambda') - \nu_\sigma(E, \lambda;\, E', \lambda') \ .$$

La première égalité résulte du lemme 6.6 et de l'égalité

$$\kappa\Bigl(\sum (\sigma_{T_{G^*}}^{-1} - \sigma_{T'_{G^*}}^{-1}) \nu_\sigma(E, \lambda;\, E', \lambda')\Bigr) = 1 \ .$$

La seconde résulte de la même façon du lemme 6.7.

Si h est dans $\mathfrak{A}(T_{G^*}/F)$ ou dans $\mathfrak{A}(T_G/F)$ alors on peut construire le diagramme adjoint associé.

Lemme 6.12:

(a) *Supposons que $h \in \mathfrak{A}(T_{G^*}/F)$ et soit $\mu \in X_*(T_{G^*_{\mathrm{sc}}})$ l'invariant attaché à $\{\sigma(h)h^{-1}\}$. Si D' est le diagramme adjoint défini par h alors*

$$\kappa(\theta(E, E')) = \kappa(\mu) = \kappa(h) \ .$$

(b) *Supposons que $h \in \mathfrak{A}(T_G/F)$ et soit $\mu \in X_*(T_{G_{\mathrm{sc}}})$ l'invariant attaché à $\{\sigma(h)h^{-1}\}$. Si D' est le diagramme adjoint défini par h alors*

$$\kappa(\theta(E, E')) = \kappa^{-1}(\mu) = \kappa^{-1}(h) \ .$$

Ce sont des conséquences immédiates des lemmes 6.8 et 6.9 et des définitions.

4. Une hypothèse locale

Supposons que E et E' proviennent de D et D' que le même groupe H intervienne dans D et D' de sorte qu'on peut s'attendre à ce que $c(D', D)$ soit défini. L'hypothèse locale affirme que

$$c(D', D) = \kappa(\theta(E', E)) \ .$$

Tant que les facteurs de transfert ne sont pas définis on ne peut pas vérifier cette hypothèse. Les lemmes suivants vont la rendre vraisemblable.

Lemme 6.13:

(a) *L'hypothèse est valable si $D' = D$.*

(b) *Si l'hypothèse est valable pour D', D alors elle est valable pour D, D'.*

(c) *Si l'hypothèse est valable pour D', D et D'' alors elle est valable pour D'', D.*

Le lemme suit du Lemme 6.11 et des égalités évidentes:

$$\theta(E, E) = 0;\ c(D, D) = 1;\ c(D, D') = c(D', D)^{-1};\ c(D'', D) = c(D'', D')c(D', D) \ .$$

Lemme 6.14:

(a) *Soit D donné; soit $h \in \mathfrak{A}(T_{G^*}/F)$; et soit D' le diagramme adjoint défini par h. Alors l'hypothèse est valable pour D', D.*

(b) *Soit D donné; soit $h \in \mathfrak{A}(T_G/F)$; et soit D' le diagramme adjint défini par h. Alors l'hypothése est valable pour D', D.*

Si D' est défini par $h \in \mathfrak{A}(T_{G^*}/F)$ alors

$$\Phi^{\kappa}_{T_G}(\gamma_G, f) \equiv \Phi^{\kappa'}_{T'_G}(\gamma'_G, f)$$

parce que $T_G = T'_G$. Donc

$$\Delta(\gamma_H, D', \phi_H) = \Delta(\gamma_H, D, \phi_H)$$

et

$$\Delta(\gamma_H, D_*, \phi_H) = c(D', D)\Delta(\gamma_H, D'_*, \phi_H) \ .$$

Pour des diagrammes adjoints $\gamma_H = \gamma'_H$.

On se souvient que, selon le lemme 3.1,

$$\Phi^{\kappa'}_{T'_{G^*}}(\gamma'_{G^*}, f) = \kappa(h)^{-1}\Phi_{T^{\kappa}_{G^*}}(\gamma_{G^*}, f) \ .$$

Donc

$$\Delta(\gamma_H, D'_*, \phi_H) = \kappa(h)\Delta(\gamma_H, D_*, \phi_H)$$

et

$$c(D', D) = \kappa(h)^{-1} \ .$$

Le lemme suit de cette égalité et des Lemmes 6.11 et 6.12.

De la même façon, si D' est défini par $h \in \mathfrak{A}(T_G/F)$ on a

$$\Delta(\gamma_H, D', \phi_H) = c(D', D)\Delta(\gamma_H, D, \phi_H)$$

et un calcul tout à fait pareil vérifie l'énconcé.

Soit D un diagramme donné et soit ω un élément du groupe de Weyl de T_H. Le diagramme nous permet de transporter ω à T_{G^*} et T_G. Soit $T'_H = T_H$, $T'_G = T_G$, $T'_{G^*} = T_{G^*}$ mais

$$\nu' = \nu \circ \omega, \ \eta' = \eta \circ \omega, \ \eta'_* = \eta_* \circ \omega$$

Lemme 6.15: *On a $c(D', D) = 1$ et l'hypothèse est valable pour D', D.*

Les deux diagrammes envoient γ_H sur les même éléments γ_{G^*} et γ_G de T_{G^*} et T_G et $\kappa = \kappa'$. Puisque

$$\begin{aligned}\Phi^{\mathrm{st}}_{T_H}(\gamma, f^H) &= \Delta(\gamma_H, D, \phi_H)\phi_{T_G}(\gamma_G, f) \\ &= \Delta(\gamma_H, D', \phi_H)\Phi^{\kappa'}_{T_G}(\gamma_G, f)\end{aligned}$$

pour tout f, on a

$$\Delta(\gamma_H, D', \phi_H) = \Delta(\gamma_H, D, \phi_H)\ .$$

De la même façon

$$\Delta(\gamma_H, D'_*, \phi_H) = \Delta(\gamma_H, D_*, \phi_*)$$

et $c(D', D) = 1$.

Lemme 6.16: *Si les sous-groupes de Cartan T_H et T'_H qui interviennent dans D et D' sont stablement conjugués alors l'hypothèse est valable.*

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
T'_H \arrow[drr, "\nu'"] & & \\
T_H \arrow[u, "\xi"] \arrow[rr, "\nu''"] & & \mathbb{T}_H \\
T_H \arrow[u, "\omega"] \arrow[urr, "\nu"'] & &
\end{tikzcd}$$

dans lequel ω est un élément du groupe de Weyl de T_H et ξ est défini sur F. Les Lemmes 6.13 et 6.15 nous permettent de supposer que $\nu'' = \nu$.

Soit D'' le diagramme obtenu de D en substituant T'_H à T_H et ν' à ν. Il est évident que $c(D'', D) = 1$ et que l'hypothèse est valable pour D'', D. Nous pouvons alors supposer que $T'_H = T_H$ et que $\nu' = \nu$.

Cela implique l'existence de $g \in \mathfrak{A}(T_G/F)$ et de $g_* \in \mathfrak{A}(T_F/F)$ et d'un diagramme commutatif,

$$\begin{tikzcd}
T_G \arrow[r, "\mathrm{ad}_{g_*}"] & T'_{G^*} \\
T_{G^*} \arrow[u, "\psi_{T_G, T_{G^*}}"] \arrow[r, "\mathrm{ad}_g"'] & T'_G \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Donc D' s'obtient de D en prenant le diagramme adjoint d'abord relatif à g_*, et ensuite relatif à g. le lemme en résulte.

Lemme 6.17: *L'hypothèse est valable pour les facteurs de transfert de Shelstad.*

Pour vérifier l'hypothèse pour D et D' il suffit de vérifier l'existence de $\bar{D}$ et $\bar{D}'$ attachés aux mêmes données endoscopiques pour lesquels elle est valable et tels que T_H et $\bar{T}_H$ aussi bien que T'_H et $\bar{T}'_H$ soient stablement conjugués.

Supposons que T_H intervienne dans le diagramme D et que α_H soit une racine réelle de T_H. On la transporte à T_G et T_{G^*} pour obtenir des racines réelles α_G et α_{G^*}. De la façon habituelle on attache à α_G et α_{G^*} des homomorphismes: $\mathrm{SL}(2) \to G$; $\mathrm{SL}(2) \to G^*$. Ils sont définis sur $\mathbf{R}$. Soient G_α et G^*_α leurs images.

Soient T'_H, T'_G, et T'_{G^*} des sous-groupes de Cartan obtenus en prenant la transformation de Cayley inverse relative à α_H, α_G, et α_{G^*}. Cela nous donne ad s_H: $T'_H \to T_H$, ad s_G: $T'_G \to T_G$, et ad s_{G^*}: $T'_{G^*} \to T_G$. Nous prenons $s_G \in G_\alpha(\mathbf{C})$, $s_{G^*} \in G^*_\alpha(\mathbf{C})$.

Si nous définissons

$$\nu' = \nu \circ \mathrm{ad}\ s_H,\ \eta' = \eta \circ \mathrm{ad}\ s_G,\ \ \eta'_* = \eta_* \circ \mathrm{ad}\ s_{G^*}\ ,$$

et

$$\psi_{T'_G, T'_{G^*}} = \mathrm{ad}\ s_{G_*}^{-1} \circ \psi_{T_G, T_{G^*}} \circ \mathrm{ad}\ s_G$$

nous obtenons un nouveau diagramme. Vu la transitivité du Lemme 6.13 et le fait que chaque T_H se lie au sous-groupe de Cartan fondamental par une suite de transformations de Cayley inverses il suffit de vérifier l'hypothèse pour le couple que nous venons de construire. Puisqu'on prend

$$\Lambda(\gamma_H, D, \phi_H) = \Lambda(\gamma_H, D^*, \phi_H)$$

dans la définition de Shelstad, nous pouvons supposer que G est simplement connexe.

La définition (3.7) nous donne

$$\frac{\varepsilon(T'_G, D')}{\varepsilon(T_G, D)} = c(D', D)\frac{\varepsilon(T'_{G^*}, D')}{\varepsilon(T_{G^*}, D)}\ .$$

Les quotients à gauche et à droite sont essentiellement ce que Shelstad note $\varepsilon_{\kappa_0}(m,n)\varepsilon_+(m,n)$ dans le §10 de [29], soit pour le groupe G^*, soit pour le groupe G. Les facteurs $\varepsilon_+(m,n)$ des deux côtés étant évidemment égaux, on obtient

$$\varepsilon_{\kappa'}(s) = c(D', D)\varepsilon_{\kappa'}(s_*)$$

où $s = s_G$, $s_* = s_G$. Mais selon la définition du §4 de [29] et notre choix de s et s^*,

$$\varepsilon_{\kappa'}(s) = \varepsilon_{\kappa'}(s_*) = 1\ .$$

Il reste à vérifier que $\kappa(\theta(E,E'))=1$. Nous reprenons la notation employée dans la définition de $\theta(E,E')$. Nous prenons

$$\varphi_{T'_G,T'_{G^*}}=\mathrm{ad}(s_*^{-1})\circ\varphi_{T_G,T_{G^*}}\circ\mathrm{ad}\ s$$

et

$$g=s_*^{-1}\varphi_{T_G,T_{G^*}}(s)\ .$$

La racine α_H se transporte à une racine α'_{G^*} de T'_{G^*} et $\kappa(\alpha'_{G^*})=1$. Il suffit de vérifier que

$$\theta(E,E')\in\mathbf{Z}\alpha'_{G^*}+\sum_{\mathrm{Gal}(K/F)}(\sigma^{-1}_{T'_{G^*}}-1)X_*(T'_{G^*})\ .$$

Le quotient

$$X_*(T'_{G^*})/\mathbf{Z}\alpha'_{G^*}$$

est un module galoisien isomorphe à

$$X_*(T'_{G^*}/T'_{G^*}\cap G^*_\alpha)\ .$$

Mais

$$T'_{G^*}/T'_{G^*}\cap G^*_\alpha\simeq T'_{G^*}G^*_\alpha/G^*_\alpha=T_{G^*}G^*_\alpha/G^*_\alpha\simeq T_{G^*}/T_{G^*}\cap G^*_\alpha\ .$$

Si $\bar{x}_\sigma$ et $\bar{y}_\sigma$ sont les projections de x_σ et y_σ sur ce quotient, alors $\bar{x}_\sigma\bar{y}_\sigma^{-1}=1$. Si $\eta=\lambda'-\lambda$, si $\bar{\eta}$ est η modulo $\mathbf{Z}\alpha'_G$ et si c et d ont des images $\bar{c}$ et $\bar{d}$, on a aussi

$$\bar{x}_\sigma\bar{y}_\sigma^{-1}=\left(\prod_\tau\alpha_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\bar{\eta}}\right)(\sigma(\bar{c}\bar{d}^{-1})\bar{c}^{-1}\bar{d})\bar{\varepsilon}_\sigma\ .$$

Pour terminer nous avons besoin de quelques considérations générales. Pour simplifier les notations, nous posons

$$X=X_*(T'_{G^*}),\ \ Y=X_*(T'_{G^*_{\mathrm{ad}}})$$

et

$$\bar{X}=X_*(T'_{G^*}/T'_{G^*}\cap G^*),\ \ X_1=\mathbf{Z}\alpha'_{G^*}\ .$$

Nous construisons ensuite un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & U_1 & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & U & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \bar{X} & \longrightarrow & \bar{Y} & \longrightarrow & \bar{U} & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Dans ce diagramma $Y_1 = \mathbf{Q}\, X_1 \cap Y$.

Le groupe de type multiplicatif attaché à U est le centre A de G et de G^*. Si

$$S_{\bar{X}} = T_{G^*} G^*_\alpha / G^*_\alpha$$

et $S_{\bar{Y}}$ sont les tores attachés à $\bar{X}$ et $\bar{Y}$, alors le noyau de l'homomorphisme $S_{\bar{X}} \to S_{\bar{Y}}$ est le groupe $\bar{A}$ attaché à $\bar{U}$.

L'image $\{\bar{\varepsilon}_\sigma\}$ de $\{\varepsilon_\sigma\}$ est un cocycle à valeurs dans $\bar{A}$ et la classe correspondante dans $H^{-2}(F, \bar{U})$ est donnée par l'image dans $\bar{U}$ de l'ensemble

$$\{\bar{\nu}_\sigma | \sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)\} \subseteq \bar{Y}\ .$$

On se souvient que $\{\varepsilon_\sigma\}$ est attaché à $\{u_\sigma | \in \mathrm{Gal}(K/F)\}$ et que u_σ se relève à $\nu_\sigma \in Y$, qu'on projette ensuite sur $\bar{\nu}_\sigma$.

Puisque il y a un plongement $\bar{A}(K) \to S_{\bar{X}}(K)$ le cycle $\{\bar{\varepsilon}_\sigma\}$ définit un cycle à valeurs dans $S_{\bar{X}}(K)$, où K est suffisamment grand. J'affirme que ce cycle correspond à la classe de

$$\bar{\nu} = \sum \sigma^{-1}\bar{\nu}_\sigma - \bar{\nu}_\sigma$$

dans $H^{-1}(\mathrm{Gal}(K/F), \bar{X})$. En nous souvenant que $\bar{x}_\sigma \bar{y}_\sigma^{-1} = 1$, nous en déduisons que la classe de $\bar{\eta} + \bar{\nu}$ est triviale. Donc

$$\bar{\eta} + \bar{\nu} \in \sum (\sigma^{-1} - 1)\bar{X}$$

et

$$\eta + \nu \in \mathbf{Z}\alpha'_{G^*} + \sum (\sigma^{-1}_{T'_{G^*}} - 1) X_*(T'_{G^*})\ .$$

Mais

$$\eta + \nu = \lambda' - \lambda + \sum \sigma^{-1}_{T'_{G^*}} \nu_\sigma - \nu_\sigma = -\theta(E, E')\ .$$

On peut énconcer le fait dont nous avons besoin sous forme d'un lemme général.

Lemme 6.18: *Soit*

$$0 \to \bar{X} \to \bar{Y} \to \bar{U} \to 0$$

une suite exacte de $\mathrm{Gal}(K/F)$*-modules, avec* $\bar{U}$ *fini et* $\bar{Y}$ *de type fini sur* $\mathbf{Z}$*. Si* $\bar{A}$ *est le groupe de type multiplicatif attaché à* $\bar{U}$ *et si* $\{\bar{\varepsilon}_\sigma\}$ *est attaché à* $\{\bar{\nu}_\sigma\}$ *alors son image dans* $H^1(\mathrm{Gal}(K/F),\ S_{\bar{X}}(K))$ *est attaché à* $\bar{\nu} = \sum \sigma^{-1}\bar{\nu}_\sigma - \bar{\nu}_\sigma$.

Si $\bar{u}_\tau$ est l'image de $\bar{\nu}_\tau$ dans $\bar{U}$ alors selon les définitions la classe de $\{\bar{\varepsilon}_\sigma\}$ est celle de

$$\prod_{\sigma,\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)} \delta_{\rho,\sigma,\tau}^{\rho\sigma\bar{u}_\tau}, \quad \rho \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)\ .$$

Suivant nos conventions ce cycle a pour image dans $S_{\bar{X}}(\bar{F})$

$$\prod_{\rho,\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)} \delta_{\rho,\sigma,\tau}^{\rho\sigma n\bar{\nu}_\tau} \ .$$

En substituant la formule explicite pour $\delta_{\rho,\sigma,\tau}$ on obtient

$$\left\{\prod_{\sigma,\tau} \rho(\beta_{\sigma,\tau})^{\rho\sigma n\bar{\nu}_\tau}\right\}\left\{\prod_{\sigma,\tau} \beta_{\rho\sigma,\tau}^{-\rho\sigma n\bar{\nu}_\tau}\right\}\left\{\prod_{\sigma,\tau} \beta_{\rho,\sigma\tau}^{\rho\sigma n\bar{\nu}_\tau}\,\beta_{\rho,\sigma}^{-\rho\sigma n\bar{\nu}_\tau}\right\} \ .$$

Le produit des deux premiers facteurs est le bord de

$$\prod_{\sigma,\tau} \beta_{\sigma\tau}^{\sigma n\bar{\nu}_\tau} \ ,$$

et le dernier produit s'écrit

$$\prod_{\sigma,\tau} \beta_{\rho,\sigma}^{\rho\sigma n(\tau^{-1}\bar{\nu}_\tau - \bar{\nu}_\tau)} = \prod_{\sigma} \beta_{\rho,\sigma}^{\rho\sigma n\bar{\nu}} = \prod_{\sigma} \alpha_{\rho,\sigma}^{\rho\sigma\bar{\nu}} \ .$$

VII. Des Propriétés Supplémentaires Globales

Avant d'entamer la stabilisation il nous faut définir un invariant global et établir ses propriétés. Pour cela on aura besoin de quelques théorèmes globaux de Poitou-Tate ([22], [35]) dont je rappellerai les démonstrations parce que je ne connais pas une référence tout à fait à mon goût. Mais nous commençons avec un lemme plus élémentaire.

1. Un lemme préliminaire

Comme d'habitude G^* est un groupe réductif quasi-déployé dont les formes simplement connexe et adjointe sont G^*_{sc} et G^*_{ad}, mais il est maintenant défini sur le corps global F. Soit T^* un sous-groupe de Cartan de G^* sur F et T^*_{sc} et T^*_{ad} les sous-groupes de Cartan de G^*_{sc} et G^*_{ad} qui relèvent de T^*. Soit L une extension galoisienne finie de F sur laquelle T^* se déploie.

On a un homomorphisme

$$\xi_1\colon H^{-1}(\mathrm{Gal}(L/F), X_*(T^*_{\mathrm{sc}})) \to H^{-1}(\mathrm{Gal}(L/F), X_*(T^*_{\mathrm{ad}})) \ .$$

D'autre part, si on étend chaque place v de F à une place de L on a

$$\xi_2\colon \oplus_v H^{-1}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), X_*(T^*_{\mathrm{sc}})) \to H^{-1}(\mathrm{Gal}(L/F), X_*(T^*_{\mathrm{sc}})) \ .$$

La somme se prend sur les places de F.

Lemme 7.1: *Le noyau de ξ_1 est contenu dans l'image de ξ_2.*

Nous pouvons supposer que G^* est simplement connexe et simple sur F, et puis, en utilisant le lemme de Shapiro, qu'il est absolument simple.

On pose

$$Y_v = \{\lambda \in X_*(T^*) | \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L_v/F_v)} \sigma\lambda = 0\} \ ,$$

$$V = \left\{ \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/F)} \sigma\mu_\sigma - \mu_\sigma | \mu_\sigma \in X_*(T^*) \right\} \ ,$$

et

$$Z = V + \sum_v Y_v \ .$$

Il faut vérifier que si $\lambda \in X_*(T^*)$ et

$$\lambda = \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/F)} \sigma\mu_\sigma - \mu_\sigma$$

avec $\mu_\sigma \in X_*(T^*_{\mathrm{ad}})$, alors $\lambda \in Z$.

Supposons d'abord que $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)$, $\mu \in X_*(T^*_{\mathrm{ad}})$, et $\sigma\mu - \mu \in X_*(T^*)$. Nous vérifions que $\sigma\mu - \mu \in Z$. Choisissons une place v et un $\tau \in \mathrm{Gal}(L/F)$ tels que $\tau\sigma\tau^{-1} \in \mathrm{Gal}(L_v/F_v)$. Alors $\tau\sigma\tau - \tau\mu$ est contenu dans Y_v de sorte que

$$\sigma\mu - \mu = [\tau\sigma\mu - \tau\mu] - [\tau(\sigma\mu - \mu) - (\sigma\mu - \mu)]$$

est contenu dans Z.

Donc si $\sigma\mu - \mu \in X_*(T^*)$ pour chaque $\mu \in X_*(T^*_{\mathrm{ad}})$, on a

$$\rho\sigma\mu - \mu = [\rho(\sigma\mu - \mu) - (\sigma\mu - \mu) + [\sigma\mu - \mu] + [\rho\mu - \mu] \equiv \rho\mu - \mu \pmod{Z}$$

pour tout $\rho \in \mathrm{Gal}(L/F)$.

Soit $\mathrm{Gal}(L/E)$ le sous-groupe des σ dont l'action sur $X_*(T^*)$ soit donnée par un élément du groupe de Weyl. L'extension E est galoisienne. Si G^* est déployé, c'est-à-dire, si $E = F$, alors le lemme se déduit immédiatement de notre première observation. Si l'extension est cyclique du degré k nous choisissons des représentants $1, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{k-1}$ dans $\mathrm{Gal}(L/F)$ suivant $\mathrm{Gal}(L/E)$. Selon la deuxième observation nous pouvons supposer que

$$\lambda = (\sigma\mu_1 - \mu_1) + (\sigma^2\mu_2 - \mu_2) + \cdots + (\sigma^{k-1}\mu_{k-1} - \mu_{k-1})$$

Puisque

$$\sigma^i\mu_i - \mu_i = (\sigma^i\mu_i - \sigma^{i-1}\mu_i) + (\sigma^{i-1}\mu_i - \sigma^{i-2}\mu_i) + \cdots + (\sigma\mu_i - \mu_i)$$

on a en fait

$$\lambda = \sigma\mu - \mu \ ,$$

et λ est contenu dans Z.

Le démonstration du lemme est donc terminée sauf dans le cas où $\mathrm{Gal}(E/F) \simeq S_3$ et que G^* est une forme de D_4. Le quotient $X_*(T^*)\backslash X_*(T^*_{\mathrm{ad}})$ est alors $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ et l'action de $\mathrm{Gal}(E/F)$ est donnée par un isomorphisme

$$\mathrm{Gal}(E/F) \simeq \mathrm{GL}(2, \mathbf{Z}_2) \ .$$

Soient

$$\rho \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

On a

$$\lambda = (\rho\mu - \mu) + (\sigma\nu - \nu) + (\sigma\rho\eta - \eta) + (\sigma\rho^2\xi - \xi) \ .$$

Puisque

$$\sigma\rho\eta - \eta = (\sigma\rho\eta - \eta) + (\rho\eta - \eta)$$

et

$$\sigma\rho^2\xi - \xi = (\sigma\rho^2\xi - \rho^2\xi) + (\rho^2\xi - \xi) \ ,$$

on peut même supposer que

$$\lambda = \rho\mu - \mu + \sigma\nu - \nu \ .$$

Si $\sigma\nu - \nu \in X_*(T^*)$ alors $\rho\mu - \mu \in X_*(T^*)$, et il résulte de nos observations préliminaires que $\lambda \in Z$. Sinon on remarque que

$$\lambda = \rho\mu - \sigma\mu + \sigma\eta - \eta, \qquad \eta = \nu + \mu \ .$$

En examinant les matrices $\rho - \sigma$ et $\sigma - 1$ on se rend compte que cette égalité implique que $\rho\mu - \sigma\mu$ et $\sigma\eta - \eta$ sont contenus dans $X_*(T^*)$. Donc $\sigma\eta - \eta \in Z$. De plus

$$\rho\mu - \sigma\mu = [\rho(\mu - \rho^{-1}\sigma\mu) - (\mu - \rho^{-1}\sigma\mu)] - [\rho^{-1}\sigma\mu - \mu] \ .$$

Puisque

$$\rho^{-1}\sigma\mu - \mu = \rho^{-1}(\sigma\mu - \rho\mu)$$

l'expression de gauche est dans Z.

2. Rappel des résultats globaux de Poitou-Tate

Ainsi que pour un corps local on commence avec un module galoisien fini sur F et on introduit $\hat{U}$ et le groupe multiplicatif A. Nous posons

$$H^1(F, A) = \varinjlim_{K} H^1(\mathrm{Gal}(K/F), A(K)).$$

Soit

$$P^1(F, A) = \prod_{v}{}' H^1(F_v, A)$$

le produit direct restreint introduit dans le chapître II.6 de [28]. Nous posons enfin

$$H^{-2}(F, U) = \varprojlim_{K} H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F), U).$$

Le seul lemme global dont nous aurons besoin est le suivant.

Lemme 7.2: *Pour chaque U il existe une suite exacte*

$$H^1(F,A) \to P^1(F,A) \to H^{-2}(F,U)$$

et ce suites sont fonctorielles relativement à U.

Si v est une place de F nous fixons un plongement $\bar{F} \hookrightarrow \bar{F}_v$ et alors, on a des homomorphisme $\mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ et

$$H^{-2}(F_v,U) \to H^{-2}(F,U).$$

En effet si $\{\mu_\sigma\}$ définit une classe dans $H^{-2}(\mathrm{Gal}(K_v/F_v),U)$ nous choississons $K \subseteq \bar{F}$ de sorte que $KF_v = K_v$, ce qui donne un plongement $\mathrm{Gal}(K_v/F_v) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(K/F)$. Si on pose $v_\sigma = u_\sigma$ pour σ dans $\mathrm{Gal}(K_v/F_v)$ et $v_\sigma = 0$ sinon, on obtient une classe dans $H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F),U)$, et on peut passer à la limite.

Il faut vérifier la compatibilité entre les homomoprhismes locaux et globaux.

Lemme 7.3: *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} H^1(F_v,A) & \longrightarrow & H^{-2}(F_v,U) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ P^1(F,A) & \longrightarrow & H^{-2}(F,U) \end{array}$$

est commutatif.

Pour vérifier ces lemmes nous introduisons un groupe $Q^1(F,A)$ pour lequel l'existence d'une suite exacte

(7.1) $$H^1(F,A) \to P^1(F,A) \to Q^1(F,A)$$

sera évidente.

Pour définir un élément de $Q^1(F,A)$ on se fixe les données suivantes:

a) Pour chaque place v de F une extension galoisienne finie K'_v de F_v ainsi qu'une extension galoisienne finie K de F telles que $K \subseteq K'_v$ pour chaque v. On exige que K'_v soit non ramifiée pour presque tout v.
b) Un 2-cocycle $\{\varepsilon_{\rho,\sigma}\}$ de $\mathrm{Gal}(K/F)$ à valeurs dans $A(K)$.
c) Pour chaque place v une chaîne $\{\beta_{\sigma'}(v)|\sigma' \in \mathrm{Gal}(K'_v/F_v)\}$ à valeurs dans $A(K'_v)$ telle que

$$\varepsilon_{\rho,\sigma} = \rho'(\beta_{\sigma'}(v))\beta_{\rho'}(v)\beta^{-1}_{\rho'\sigma'}(v)$$

si σ, ρ sont les images de ρ' et σ' dans $\mathrm{Gal}(K/F)$.

Puisque on peut toujours prendre des inflations les choix des K'_v ne sont pas importants. Deux données correspondantes à $\{\beta_{\sigma'}(v)\}$ et $\{\beta^1_{\sigma'}(v)\}$ sont dites équivalentes si

$$\beta^1_{\sigma'}(v) = \beta_{\sigma'}(v)\sigma(\gamma(v))\gamma(v)^{-1}\delta_{\sigma'}$$

avec $\gamma(v) \in A(K'_v)$ et $\delta_{\sigma'} \in A(\bar{F}')$. Les éléments $\delta_{\sigma'}$ sont définis pour $\sigma' \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, et sont localement constants et indépendants de v.

L'existence et l'exactitude de la suite (7.1) sont évidentes. Il s'agit maintenant de trouver un isomorphisme

$$Q^1(F,A) \simeq H^{-2}(F,U).$$

On définit les modules V et W ainsi que pour un corps local. L'isomorphisme cherché se déduit d'un diagramme à lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccccc}
\varprojlim_K H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F),W) & \longrightarrow & \varprojlim_K H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F),V) & \longrightarrow & H^{-2}(F,U) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
\varprojlim_K H^{0}(\mathrm{Gal}(K/F),W\otimes C_K) & \longrightarrow & \varprojlim_K H^{0}(\mathrm{Gal}(K/F),V\otimes C_K) & \longrightarrow & Q^1(F,A) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Le groupe C_K est le groupe des classes d'idèles.

La ligne en haut est évidente et le carré à gauche se construit comme pour un corps local. La première flèche en bas est évidente. Soit L une extension finie de sorte que V et W soient des $\mathrm{Gal}(L/F)$-modules et soit C_L^0 le groupe des classe de norme 1. Puisque

$$\mathfrak{a} = (V\otimes C_L)^{\mathrm{Gal}(L/F)}/\mathrm{Im}(W\otimes C_L)^{\mathrm{Gal}(L/F)} = (V\otimes C_L^0)^{\mathrm{Gal}(L/F)}/\mathrm{Im}(W\otimes C_L^0)^{\mathrm{Gal}(L/F)}$$

est compact on a un homomorphisme surjectif

$$\mathfrak{a} \to \varprojlim H^0(\mathrm{Gal}(K/F),V\otimes C_K)/\mathrm{Im}\varprojlim H^0(\mathrm{Gal}(K/F)W\otimes C_K).$$

Si l'ordre de chaque élément de $\mathfrak{a}$ divise n alors $\mathfrak{a}$ est annihilé par n. Mais le noyau de cet homomorphisme est divisible. En effet si $\alpha \in (V\otimes C_L)^{\mathrm{Gal}(K/F)}$ représente un élément du noyau alors pour chaque extension K de L galoisienne sur F il y a des éléments $\beta_K \in V\otimes C_K$ et $\gamma_K \in (W\otimes C_K)^{\mathrm{Gal}(K/F)}$ d'image $\bar{\gamma}_K \in (V\otimes C_K)^{\mathrm{Gal}(K/F)}$ tels que

$$\alpha = (Nm_{K/F}\beta_K)\bar{\gamma}_K.$$

On peut même supposer que γ_K est dans $W\otimes C_K^0$, que β_K est dans $V\otimes C_K^0$, et que

$$\gamma = \lim_K \gamma_K$$

existe. Si $K \subseteq K'$ alors

$$\alpha = (\mathrm{Nm}_{K/F}\mathrm{Nm}_{K'/K}\beta_{K'})\bar{\alpha}_{K'}$$

et $\mathrm{Nm}_{K/F}(V\otimes C_K)$ est ouvert dans $(V\otimes C_L)^{\mathrm{Gal}(L/F)}$. On peut donc prendre $\gamma_K = \gamma$ pour tout K. Soit

$$\delta_K = \mathrm{Nm}_{K/L}\beta_K.$$

On peut aussi supposer que

$$\delta = \lim_{K} \delta_K$$

existe, et alors δ est dans l'intersection de tous les sous-groupes ouverts et d'indice fini dans $V \otimes C_L$, un groupe divisible [1]. Par conséquent, si m est un entier donné il existe ε tel que $\varepsilon^m = \delta$ et

$$\varepsilon = \mathrm{Nm}_{K/L}\varepsilon_K, \quad \varepsilon_K \in V \otimes C_K.$$

L'élément $\eta = \mathrm{Nm}_{L/F}\varepsilon$ est dans le noyau et

$$\alpha = \eta^m \bar{\gamma}.$$

Donc le noyau est trivial et l'homomorphisme est un isomorphisme. Il s'agit alors de définir un isomorphisme

$$\mathfrak{a} \simeq Q^1(F, A).$$

Soit s un élément invariant dans $V \otimes C_L$. Il existe $t \in S_V(A_L) = V \otimes I_L$ qui s'applique sur s. Nous posons

$$\gamma = \sigma(t)t^{-1} \in S_V(L), \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(L/F).$$

Il y a une extension fini K telle que chaque γ_σ se relève en δ_σ dans $S_W(K)$. Posons

$$\varepsilon_{\rho,\sigma} = \delta_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}\rho(\delta_{\bar{\sigma}})^{-1}\delta_{\bar{\rho}}^{-1},$$

où $\rho, \sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$ ont pour images $\bar{\rho}, \bar{\sigma} \in \mathrm{Gal}(L/F)$.

D'autre part $t = \prod_v t(v)$ et $t(v)$ se relève en $\eta(v)$ dans $S_W(K'_v)$ où K'_v est une extension finie de F_v, non ramifiée pour presque tout v. On peut supposer que $K \subseteq K'_v$. Nous posons

$$\beta_{\sigma'}(v) = \delta_{\bar{\sigma}}^{-1}\sigma'(\eta(v))\eta(v)^{-1} \qquad \sigma' \in \mathrm{Gal}(K'_v/F_v),\ \sigma' \to \bar{\sigma}.$$

L'image de $\beta_{\sigma'}(v)$ dans S_V est

$$\gamma_{\bar{\sigma}}^{-1}\sigma(t(v))t(v)^{-1} = 1.$$

Donc $\beta_{\sigma'}(v) \in A(K'_v)$. De plus

$$\rho'(\beta_{\sigma'}(v))\beta_{\rho'}(v)\beta_{\rho'\sigma'}(v)^{-1} = \varepsilon_{\rho,\sigma}.$$

Il en résulte que les $\beta_{\sigma'}(v)$ définissent un élément de $Q_1(F, A)$. Il est facile de vérifier qu'on obtient de cette façon un homomorphisme bien défini et injectif de $\mathfrak{a}$ dans $Q^1(F, A)$.

Il reste à démonter la surjectivité. Supposons qu'on a des données $\{\beta_{\sigma'}(v)\}$ et $\{\varepsilon_{\rho,\sigma}\}$. Si on plonge A dans S_W alors $\{\varepsilon_{\rho,\sigma}\}$ définit un 2-cocycle de $\mathrm{Gal}(K/F)$ à valeurs dans $S_W(K)$. Le module W est un $\mathrm{Gal}(L/F)$-module induit. Donc on a

i) (voir Prop. 5 de Chap 7 de [26]). Si $L_v \subseteq K_v \subseteq K'_v$ alors

$$H^2(\mathrm{Gal}(K_v/F_v), S_W(K_v)) \to H^2(\mathrm{Gal}(K'_v/F_v), S_W(K'_v))$$

est injectif.

ii) (voir Chap 7.3 de [1]). Si $L \subset K$ l'application

$$H^2(\mathrm{Gal}(K/F), S_W(K)) \to \coprod_v H^2(\mathrm{Gal}(K_v/F_v), S_W(K_v))$$

est injective.

Puisque $\{\varepsilon_{\rho,\sigma}\}$ définit la classe triviale dans $H^2(\mathrm{Gal}(K'_v/F_v), A(K'_v))$ il définit la classe triviale dans $H^2(\mathrm{Gal}(K'_v/F_v), S_W(K'_v))$ et par conséquent $\{\varepsilon_{\rho,\sigma}\}$ définit la classe triviale dans $S_W(K)$.

Soit

$$\varepsilon_{\rho,\sigma} = \delta_{\rho\sigma}\rho(\delta_\sigma)^{-1}\delta_\rho^{-1}$$

dans $S_W(K)$. Localement $\beta_{\sigma'}(v)\delta_\sigma^{-1}$, $\sigma' \to \sigma$ est un 1-cocycle dans $S_W(K'_v)$ et donc un bord. On pose

$$\beta_{\sigma'}(v)\delta_\sigma^{-1} = \sigma'(\eta(v))\eta(v)^{-1}, \quad \sigma' \in \mathrm{Gal}(K'_v/F_v).$$

Puisque K'_v est non-ramifié presque partout on peut même supposer que $\eta(v)$ est dans le sous-groupe compact maximal de $S_W(K'_v)$ pour presque tout v. Donc si $t(v)$ est l'image de $\eta(v)$ dans $S_V(K'_v)$ alors $t(v) \in K_v$ et $t = \prod_v t(v) \in S_V(\mathbf{A}_k)$. L'image s de t dans $V \otimes C_K$ est contenue dans

$$(V \otimes C_K)^{\mathrm{Gal}(K/F)} = (V \otimes C_L)^{\mathrm{Gal}(L/F)}.$$

La surjectivité en résulte.

La commutativité du lemme 7.3 provient des définitions. Parce que nous en aurons besoin j'observe que l'existence d'une suite exacte

$$P^1(F,A) \to Q^1(F,A) \to H^2(F,A) \to \coprod H^2(F,A)$$

est évidente. L'élément définit par $\{\beta_{\sigma'}(v)\}$ et $\{\varepsilon_{\rho,\sigma}\}$ s'envoie sur la classe de $\{\varepsilon_{\rho,\sigma}\}$.

On peut en partie expliciter l'isomorphisme $Q^1(F,A) \to H^{-2}(F,U)$ et nous aurons besoin de la formule qu'on obtient. Soit K/F une extension galoisienne finie et soit $\{\alpha_{\sigma,\tau}\}$ un représentant de la classe fondamentale dans C_K, le groupe des classes d'idèles. Nous relevons $\alpha_{\sigma,\tau}$ en $\tilde{\alpha}_{\sigma,\tau}$ dans I_K. Alors

$$\rho\,(\tilde{\alpha}_{\sigma,\tau})\,\tilde{\alpha}_{\rho\sigma,\tau}^{-1}\tilde{\alpha}_{\rho,\sigma\tau}\tilde{\alpha}_{\rho,\sigma}^{-1} = \zeta_{\rho,\sigma,\tau}$$

est le cocycle de Teichmüller.

Il nous faut prendre des racines n-ièmes d'idèles. En général ce ne sont pas des idèles. Mais on peut néanmoins construire facilement un groupe dans lequel elles sont contenues.

Supposons qu'on ait pour chaque place v de F une extension finie $K'(v) \subseteq \bar{F}$. On peut introduire un produit direct restreint

$$\coprod_v \prod_{w|w} K'(v)_w^\times.$$

Le produit intèrieur porte sur les places de K' qui divisent v. C'est un module sur $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. Si $K'(v) \subseteq K''(v)$ pour chaque v alors

$$\coprod_v \prod_{w|v} K'(v)_w^\times \hookrightarrow \coprod_v \prod_{w|v} K''(v)_w^\times.$$

Prenons alors la limite inductive. Les racines d'idèles qui interviennent dans la suite sont prises dans elle.

Soit $\tilde{\alpha}_{\sigma,\tau}(v)$ la composante de $\tilde{\alpha}_{\sigma,\tau}$ à la place v et soit $\gamma_{\sigma,\tau}(v)$ une racine n-ième de $\tilde{\alpha}_{\sigma,\tau}(v)$. Nous posons

$$\xi_{\rho,\sigma,\tau}(v) = \rho(\gamma_{\sigma,\tau}(v))\gamma_{\rho\sigma,\tau}^{-1}(v)\gamma_{\rho,\sigma\tau}(v)\gamma_{\rho,\sigma}^{-1}(v), \quad \rho \in \mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v).$$

Soit ${}^1\xi_{\rho,\sigma,\tau}$ une racine n-ième de $\zeta_{\rho,\sigma,\tau}$ dans $\bar{F}$. Puisque $\xi_{\rho,\sigma,\tau}^n(v) = \zeta_{\rho,\sigma,\tau'}$ on a

$$\xi_{\rho,\sigma,\tau}(v) = {}^1\xi_{\rho,\sigma,\tau}\,{}^2\xi_{\rho,\sigma,\tau}(v),$$

où ${}^2\xi_{\rho,\sigma,\tau}(v)$ est une racine n-ième de l'unité dans $\bar{F}_v^\times$. Nous posons enfin

$$\eta_{\rho,\sigma,\tau,\varepsilon} = \rho\left({}^1\xi_{\sigma,\tau,\varepsilon}\right)\,{}^1\xi_{\rho\sigma,\tau,\varepsilon}^{-1}\,{}^1\xi_{\rho,\sigma\tau,\varepsilon}\,{}^1\xi_{\rho,\sigma,\tau\varepsilon}^{-1}\,{}^1\xi_{\rho,\sigma,\tau}.$$

Lemme 7.4: *Supposons que $\{u_\sigma | \sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)\} \subseteq U$ définisse une classe dans le groupe $H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F), U)$. Alors*

$$\beta_\rho(v) = \prod_{\sigma,\tau\in\mathrm{Gal}(K/F)} {}^2\xi_{\rho,\sigma,\tau}(v)^{\rho\sigma u_\tau}, \qquad \rho \in \mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v),$$

et

$$\varepsilon_{\rho,\sigma} = \prod_{\tau,\varepsilon\in\mathrm{Gal}(K/F)} \eta_{\rho,\sigma,\tau,\varepsilon}^{-\rho\sigma\tau u_\varepsilon}, \qquad \rho,\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F),$$

définissent un élément de $Q^1(F, A)$ dont l'image dans $H^{-1}(F, U)$ a pour projection $\{u_\sigma\}$ dans $H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F), U)$.

Pour simplifier les notations nous avons pris ρ et σ tantôt dans $\mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$ tantôt dans $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, mais il est entendu qu'il s'agit de fonctions localement constantes.

Il existe $\lambda_\sigma \in V$ dont l'image dans U est u_σ et tel que

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(K/F)} \sigma^{-1}\lambda_\sigma = \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(K/F)} \lambda_\sigma.$$

Alors

$$s = \prod_{\sigma,\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)} \alpha_{\sigma,\tau}^{\alpha\lambda_\tau}$$

est un élément invariant dans $V \otimes C_K$ dont un relèvement à $S_V(A_K L)$ est

$$t = \prod_{\sigma,\tau} \bar{\alpha}_{\sigma,\tau}^{\sigma\lambda_\tau}$$

et

$$\gamma_\rho = \rho(t)t^{-1} = \prod_{\sigma,\tau} \zeta_{\rho,\sigma,\tau}^{\rho\sigma\mu_\tau}.$$

Soit $\mu_\tau = n\lambda_\tau$. Alors un relèvement de γ_ρ à $S_W(\bar{F})$ est

$$\delta_\rho = \prod_{\sigma,\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)} {}^1\xi_{\rho,\sigma,\tau}^{\rho\sigma\mu_\tau}$$

et

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\rho,\sigma} &= \delta_{\rho\sigma}\rho(\delta_\sigma^{-1})\delta_\rho^{-1} \\ &= \prod_{\tau,\varepsilon} \eta_{\rho,\sigma,\tau,\varepsilon}^{-\rho\sigma\tau\mu_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Un relèvement de $t(v)$ à $S_W(\bar{F})$ est

$$\eta(v) = \prod_{\sigma,\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)} \gamma_{\sigma,\tau}(v)^{\sigma\mu_\tau}$$

et

$$\beta_\rho(v) = \delta_\rho^{-1}\rho(\eta(v))\eta(v)^{-1}, \quad \rho \in \mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v),$$

est égal à

$$\prod_{\sigma,\tau} {}^2\xi_{\rho,\sigma,\tau}(v)^{\rho\sigma\mu\tau} = \prod_{\sigma,\tau} {}^2\xi_{\rho,\sigma,\tau}^{\rho\sigma u_\tau}(v).$$

3. Un lemme important

Nous fixons une fois pour toutes un diagramme global.

$$E^0: \quad \begin{tikzcd} \mathbf{T}_{G^*} & T^0_{G^*} \arrow[l, "\eta^0_*"'] \\ & T^0_G \arrow[u, "\psi_{T^0_G,T^0_{G^*}}"'] \arrow[ul, "\eta'"] \end{tikzcd}$$

Il nous fournit un diagramme local en chaque place v, ainsi qu'un cocycle global $\{t_\sigma\}$, où

$$\sigma\left(\varphi_{T^0_G,T^0_{G^*}}\right)\varphi_{T^0_G,T^0_{G^*}} = \mathrm{ad}\ t^0_\sigma,$$

et la classe de $\{t^0_\sigma\}$ est bien définie.

Supposons que $\sigma \to t^0_\sigma$ soit en fait une fonction sur $\mathrm{Gal}(K/F)$. Alors $\{t^0_\sigma\}$ définit des cocycles locaux $\{t^0_\sigma | \sigma \in \mathrm{Gal}(K_v/F_v)\}$ qui correspondent à $\lambda^0(v) \in X_*(T^0_{G_{\mathrm{ad}}})$ avec

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K_v/F_v)} \sigma\lambda^0(v) = 0.$$

La classe locale est triviale pour presque tout v et nous fixons les $\lambda^0(v)$ de façon que $\lambda^0(v) = 0$ pour presque tout v. Ils nous serviront comme repères.

Soient maintenant E et E' deux diagrammes globaux. Nous choisissons les $\lambda(v)$ et $\lambda'(v)$ de sorte que $\lambda(v) - \lambda^0(v)$ et $\lambda'(v) - \lambda^0(v)$ soient dans $X_*(T^0_{G^*_{\mathrm{ad}}})$. Nous faisons usage des identifications permises par les diagrammes. Si $K \subseteq \bar{F}$ est suffisamment grand les invariants

$$\nu_\sigma(E, \lambda(v);\ E', \lambda'(v)) = \nu_\sigma(v), \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(K_v/F_v)$$

sont définis.

Lemme 7.5: *Supposons que $\lambda(v)$ et $\lambda'(v)$ soient nuls pour presque tout v. On peut choisir une extension galoisienne globale K suffisamment grande et les $y_\sigma(v)$, $c(v)$, et $d(v)$ de sorte que $\varepsilon_\sigma(v)$ soit un cocycle sur $\mathrm{Gal}(K_v/F_v)$ et $\nu_\sigma(v)$ un cycle sur le même groupe et tels que de plus $\varepsilon_\sigma(v) = 1$ et $\nu_\sigma(v) = 0$ pour presque tout v et tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_v/F_v)$.*

Puisque les $\varepsilon_\sigma(v)$ et $\nu_\sigma(v)$ sont de toute façon des fonctions sur $\mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$ localement constantes même la première affirmation du lemme n'est à vérifier que presque partout et résulte alors de la deuxième. La deuxième suit du lemme 6.10 et des résultats standards ([37]).

Des plongements $\bar{F} \hookrightarrow \bar{F}_v$ sont donnés une fois pour toutes de sorte que les sous groupes $\mathrm{Gal}(K_v/F_v) \subseteq \mathrm{Gal}(K/F)$ sont fixés. Nous posons

$$\nu_\sigma = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K_v/F_v)} \nu_\sigma(v), \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(K/F).$$

D'autre part selon une propriété connue de la dualité globale de Tate-Nakayama il existe η_σ et η'_σ dans $X_*(T'_{G^*_{\mathrm{ad}}})$ tels que

$$\sum_v \lambda(v) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)} \sigma^{-1}_{T_{G^*}} \eta_\sigma - \eta_\sigma$$
$$\sum_v \lambda'(v) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/V)} \sigma^{-1}_{T'_{G^*}} \eta'_\sigma - \eta'_\sigma.$$

Avant de définir l'invariant il faut vérifier le lemme suivant, qui est donc de quelque importance.

Lemme 7.6: *Supposons que G^*_{ad} vérifie le principe de Hasse. Alors il existe $\{\omega_\sigma\}$ et $\{\omega'_\sigma\}$ dans $X_*(T'_{G^*_{\mathrm{ad}}})$ tels que*

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(K/F)} \sigma^{-1}_{T_{G^*}}\,\omega_\sigma = \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(K/F)} \omega_\sigma,$$
$$\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(K/F)} \sigma^{-1}_{T'_{G^*}}\,\omega'_\sigma = \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(K/F)} \omega'_\sigma,$$

et

$$\nu_\sigma \equiv \eta_\sigma - \eta'_\sigma + \omega_\sigma - \omega'_\sigma \pmod{X_*(T'_{G^*_{\mathrm{sc}}})}.$$

Nous pouvons supposer que G est simplement connexe. Il y a quelques lemmes préliminaires à vérifier.

Supposons que h soit contenu dans $\mathfrak{A}(T_{G^*}/F)$. Alors $\{a_\sigma\} = \{\sigma(h)h^{-1}\}$ est un cocycle à valeurs dans $T_{G^*}(\bar F)$. Comme dans le cas local nous pouvons construire le diagramme adjoint $\bar E$.

$$\begin{tikzcd}
T_{G^*} & T_{G^*} \arrow[l, "\eta_*"'] \arrow[r, "\mathrm{ad}\,h^{-1}"'] & \bar T_{G^*} \arrow[ll, bend right, "\bar\eta_*"'] \\
 & T_G \arrow[u, "\varphi_{T_G,\,T_{G^*}}"] \arrow[ur, "\varphi_{T_G,\,\bar T_{G^*}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Le cocycle globale $\{a_\sigma\}$ définit des cocycles locaux auxquels sont attachés des invariants $\mu(v) \in X_*(T_{G^*})$. On peut supposer que presque tous ces invariants sont nuls. Selon la théorie globale de Tate-Nikayama

$$\sum_v \mu(v) = \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(K/F)} \sigma^{-1}_{T_{G^*}}\,\omega_\sigma - \omega_\sigma$$

avec $\omega\sigma \in X_*(T_{G^*})$. Comme nous avons vu dans le lemme 6.8 on peut prendre $\bar\lambda(v) = \lambda(v) - \mu(v)$ et puis

$$\nu_\sigma(\bar E, \bar\lambda(v);\ E', \lambda'(v)) = \nu_\sigma(E, \lambda(v);\ E', \lambda'(v)).$$

Nous en déduisons le lemme suivant:

Lemme 7.7: *Si le Lemme 7.6 est valable pour les diagrammes E', $\bar E$ et les $\bar\lambda(v)$ alors il est valable pour E', E et les $\lambda(v)$.*

Supposons de le même façon que $h \in \mathfrak{A}(T'_G/F)$ et construisons le diagramme adjoint $\bar E'$. On peut prendre $\bar\lambda'(v) = \bar\lambda'(v) + \mu(v)$ et

$$\nu_\sigma(E, \lambda(v);\ \bar E', \bar\lambda'(v)) = \nu_\sigma(E, \lambda(v);\ E', \lambda'(v)).$$

Lemme 7.8: *Si le Lemme 7.6 est valable pour les diagrammes E, $\bar{E}'$ et les $\bar{\lambda}'(v)$ alors il l'est aussi pour E, E' et les $\lambda'(v)$.*

Supposons que les deux cocycles $\{t_\sigma\}$ et $\{\bar{t}_\sigma\}$ de $\mathrm{Gal}(K/F)$ à valeurs dans $T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(K)$ définissent la même classe dans $H^1(\mathrm{Gal}(K/F), T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(\mathbf{A}_K))$. Alors le principe de Hasse implique l'existence de $h \in G^*(K)$ tel que

$$\bar{t}_\sigma = \mathrm{ad}(h\sigma(h^{-1}))t_\sigma.$$

Donc en remplaçant E par le diagramme adjoint $\bar{E}$ défini par h nous pouvons remplacer t_σ par $\bar{t}_\sigma$, ou plutôt son image dans $\bar{T}_{G^*}$, parce que

$$\sigma(\mathrm{ad}\ h^{-1} \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} \circ \mathrm{ad}\ h = \mathrm{ad}\ h^{-1}(\mathrm{ad}(h\sigma(h^{-1}))t_\sigma).$$

De la même façon le principe de Hasse nous permet de remplacer $\{s_\sigma\}$ par un cocycle convenable $\{\bar{s}_\sigma\}$.

Pour construire $\{\bar{s}_\sigma\}$ et $\{\bar{t}_\sigma\}$ nous nous rappelons la relation entre la classe fondamentale de l'extension globale K/F et la classe fondamentale de l'extension locale K_v/F_v ([1]). Celle de K_v/F est contenue dans $K_v^\times$; celle de K/F est contenue dans le groupe C_K des classes d'idèles, et il y a un plongement $K_v^\times \hookrightarrow C_K$ qui s'étend en un plongement $W_{K_v/F_v} \hookrightarrow W_{K/F}$.

Soit $\{\alpha_{\sigma,\tau}(v) | \sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(K_v/F_v)\}$ un représentant donné de la classe fondamentale de K_v/F_v et soient $\{\sigma_i\}$ des représentants à droite dans $\mathrm{Gal}(K/F)$ suivant $\mathrm{Gal}(K_v/F_v)$. Nous supposons que $1 \in \{\sigma_i\}$. Il existe un représentant $\{\alpha_{\sigma,\tau}(v) | \sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(K/F)\}$ de la classe fondamentale globale tel que

i) Pour $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(K_v/F_v)$, $\alpha_{\sigma,\tau}(v)$ est l'élément donné dans $K_v^\times$.
ii) Si $\tau \in \mathrm{Gal}(K_v/F_v)$ alors $\alpha_{\sigma_i^{-1},\tau} = 1$.

Pour $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(K_v.F_v)$ soit $\beta_{\sigma,\tau}(v)$ la racine n-ième de $\alpha_{\sigma,\tau}(v)$ choisie dans le chapitre VI. En général soit $\beta_{\sigma,\tau}(v)$, $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(K/F)$ une racine n-ième de $\alpha_{\sigma,\tau}(v)$. Nous posons

$$\delta_{\rho,\sigma,\tau}(v) = \rho(\beta_{\sigma,\tau}(v))\beta^{-1}_{\rho\sigma,\tau}(v)\beta_{\rho,\sigma\tau}(v)\beta^{-1}_{\rho,\sigma}(v),$$

où $\rho \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. Puisque $\delta^n_{\rho,\sigma,\tau}(v) \in \bar{F}^\times$ nous pouvons écrire

$$\delta_{\rho,\sigma,\tau}(v) = {}^1\delta_{\rho,\sigma,\tau}(v)\ {}^2\delta_{\rho,\sigma,\tau}(v),$$

où ${}^1\delta_{\rho,\sigma,\tau}$ est contenu dans $\bar{F}^x$ et ${}^2\delta_{\rho,\sigma,\tau}$ est un élément dont la n-ième puissance est 1. Nous prenons $\beta_{\sigma_i^{-1},\tau}(v) = 1$, $\tau \in \mathrm{Gal}(K_v/F_v)$.

Soit v une place donné de F. Nous construisons d'abord un cocycle de $\mathrm{Gal}(K/F)$ à valeurs dans $T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(\mathbf{A}_K)$ dont l'invariant local est $\lambda(v)$ en v et zéro ailleurs. Le groups $T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(\mathbf{A}_K)$ est un produit restreint sur tout v des groupes

$$\prod_{w|v} T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(K_w) = \Big(\prod_{w|v} K_w^\times\Big) \otimes X_*(T_{G^*_{\mathrm{ad}}}).$$

Comme module galoisien sur $\mathrm{Gal}(K/F)$ ce module est induit et isomorphe à

$$\mathrm{Ind}(\mathrm{Gal}(K/F), \mathrm{Gal}(K_v/F_v), K_v^\times \otimes X_*(T_{G^*_{\mathrm{ad}}})).$$

Soit

$$\sigma_i\sigma = u_i(\sigma)\sigma_j, \quad u_i(\sigma) \in \mathrm{Gal}(K_v/F_v).$$

Le lemme de Shapiro nous donne un isomorphisme

$$H^1(\mathrm{Gal}(K_v/F_v), T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(K_v)) = H^1(\mathrm{Gal}(K/F), \prod_{w|v} T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(K_w))$$

qui s'explicite facilement. La classe du cycle $\{\gamma_\sigma|\sigma \in \mathrm{Gal}(K_v/F_v)\}$ s'envoie sur la classe du cycle $\{\delta_\sigma|\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)\}$, où la valeur de δ_σ en σ_i est $\gamma_{u_i(\sigma)}$.

Prenons par exemple le cocycle

$$\gamma_\sigma(v) = \prod_{\tau \in \mathrm{Gal}(K_v/F_v)} \alpha_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\lambda(v)}$$

attaché à $\lambda(v)$. Il nous donne

$$\delta_\sigma(v)\colon \sigma_i \to \prod_{\tau \in \mathrm{Gal}(K_v/F_v)} \alpha_{u_i(\sigma),\tau}(v)^{u_i(\sigma)\tau\lambda(v)}.$$

La composition des deux flèches

$$K_v^\times \to \prod_{w|v} K_w^\times = \mathrm{Ind}(\mathrm{Gal}(K/F), \mathrm{Gal}(K_v/F_v), K_v^\times) \to \mathbf{A}_K$$

nous donne le plongement de $K_v^\times$ dans $\mathbf{A}_K$ et puis le plongement de $T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(K_v)$ dans $T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(\mathbf{A}_K)$. Donc $\delta_\sigma(v)$ s'écrit

$$\prod_i \sigma_i^{-1}\Big(\prod_{\tau \in \mathrm{Gal}(K_v/F_v)} \alpha_{u_i(\sigma),\tau}(v)^{u_i(\sigma)\tau\lambda(v)}\Big).$$

Dans cette expression $\alpha_{u_i(\sigma),\tau}(v)$ est un élément de $K_v^\times$; donc un élément de $\mathrm{Ind}(\mathrm{Gal}(K/F),$ $\mathrm{Gal}(K_v/F_v), K_v^\times)$ dont la valeur en 1 est $\alpha_{u_i(\sigma),\tau}(v)$ et dont la valeur en dehors de $\mathrm{Gal}(K_v/F_v)$ est 1.

L'image $\bar{\delta}_\sigma(v)$ de $\delta_\sigma(v)$ dans $C_K \otimes X_*(T_{G^*_{\mathrm{ad}}})$ est

$$\prod_{i,\tau} \sigma_i^{-1}(\alpha_{u_i(\sigma),\tau}(v))^{\sigma_i^{-1}u_i(\sigma)\tau\lambda(v)}.$$

Mais

$$\sigma_i^{-1}u_i(\sigma) = \sigma\sigma_j^{-1}$$

et

$$\begin{aligned}
\sigma_i^{-1}(\alpha_{u_i(\sigma),\tau}(v)) &= \alpha_{\sigma_i^{-1}u_i(\sigma),\tau}(v)\alpha^{-1}_{\sigma_i^{-1},u_i(\sigma)\tau}(v)\alpha_{\sigma_i^{-1},u_i(\sigma)}(v) \\
&= \alpha_{\sigma_i^{-1}u_i(\sigma),\tau}(v) \\
&= \sigma\big(\alpha_{\sigma_j^{-1},\tau}(v)\big)\alpha_{\sigma,\sigma_j^{-1}\tau}(v)\alpha^{-1}_{\sigma,\sigma_j^{-1}}(v) \\
&= \alpha_{\sigma,\sigma_j^{-1}\tau}(v)\alpha^{-1}_{\sigma,\sigma_j^{-1}}(v).
\end{aligned}$$

Puisque

$$\sum_{\tau} \tau\lambda(v) = 0,$$

on a

$$\bar{\delta}_\sigma(v) = \prod_{\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)} \alpha_{\sigma,\tau}(v)^{\sigma\tau\lambda(v)}.$$

Choisissons aussi un représentant fixé $\{\alpha_{\sigma,\tau}\}$ de la classe globale qui ne dépend pas de v. Alors

$$\alpha_{\sigma,\tau}(v) = \alpha_{\sigma,\tau}\sigma(\theta_\tau(v))\theta_\sigma(v)\theta_{\sigma\tau}(v)^{-1}.$$

Si on pose

$$\theta(v) = \prod_{\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)} \theta_\tau(v)^{\tau\lambda(v)}$$

alors

$$\prod_{\tau} \alpha_{\sigma,\tau}(v)^{\sigma\tau\lambda(v)} = \Big\{\prod_{\tau} \alpha_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\lambda(v)}\Big\}\{\sigma(\theta(v))\theta(v)^{-1}\}.$$

Puisque $\delta_\sigma(v) = 1$ pour presque tout v et tout σ le produit

$$\prod_{v} \delta_\sigma(v)$$

définit un cocycle à valeurs dans $T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(\mathbf{A}_K)$ d'invariants $\lambda(v)$. Si $\theta = \prod_v \theta(v)$ son image dans $C_K \otimes X_*(T_{G^*_{\mathrm{ad}}})$ est

$$\prod_{v} \bar{\delta}_\sigma(v) = \left\{\prod_{\tau} \alpha_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\lambda}\right\}\{\sigma(\theta)\theta^{-1}\}.$$

On a posé

$$\lambda = \sum_{v} \lambda(v) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)} \sigma_{T_{G^*}}^{-1}\eta_\sigma - \eta_\sigma.$$

Si on pose

$$\alpha = \prod_{\tau,\varepsilon} \alpha_{\tau,\varepsilon}^{-\tau\eta_\varepsilon}$$

on a

$$\prod_{\tau} \alpha_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\lambda} = \sigma(\alpha)\alpha^{-1}.$$

Nous choisissons un relèvement $\xi_\tau(v)$ de $\theta_\tau(v)$ à I_K et nous posons

$$\xi = \prod_{v} \prod_{\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)} \xi_\tau(v)^{\tau\lambda(v)}.$$

Soit en plus

$$\beta = \prod_{\tau,\varepsilon} \tilde{\alpha}_{\tau,\varepsilon}^{-\tau\eta_\varepsilon}$$

où $\tilde{\alpha}_{\tau,\varepsilon}$ est défini comme dans le lemme 7.4.

Alors les

$$\bar{t}_\sigma = \prod_v \delta_\sigma(v)\sigma(\xi^{-1}\beta^{-1})\xi\beta$$

définissent une classe dans $H^1(\mathrm{Gal}(K/F), T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(K))$ avec invariants locaux $\lambda(v)$. Nous construisons $\{\bar{s}_\sigma\}$ de la même façon sauf que $\lambda(v)$ est remplacé par $\lambda'(v)$. Les lemmes 7.7 et 7.8 nous permettent de supposer que $s_\sigma = \bar{s}_\sigma$ et $t_\sigma = \bar{t}_\sigma$.

Nous construisons maintenant un relèvement y_σ de t_σ à $\prod_v \prod_{w|v} T_{G^*}(K'(v)_w)$ où $K'(v)$ est une extension finie de K' et où le produit intérieur porte sur les places de $K'(v)$ divisant v. Si on projette Y_σ, $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$, sur $T_{G^*}(K'(v)_v)$ on obtient $y_\sigma(v)$, aui doit avoir la forme prescrite.

Posons $\mu(v) = n\lambda(v)$. On relève $\delta_\sigma(v)$ en

$$d_\sigma(v) = \prod_i \prod_{\tau\in\mathrm{Gal}(K_v/F_v)} \sigma_k^{-1}(\beta_{u_i(\sigma),\tau}(v))^{\sigma_i^{-1}u_i(\sigma)\tau\mu(v)}.$$

Soit $e_\tau(v)$ une racine n-ième de $\alpha_{\sigma,\tau}$ dont les composantes en v sont les $\gamma_{\sigma,\tau}(v)$ du lemme 7.4. Si $\chi_\varepsilon = n\eta_\varepsilon$ soit

$$b = \prod_{\tau,\varepsilon} \gamma_{\tau,\varepsilon}^{-\tau\chi_\varepsilon},$$

Nous posons

$$y_\sigma = \prod_v d_\sigma(v)\sigma(e^{-1}b^{-1})eb.$$

C'est le relèvement cherché.

Nous construisons un relèvement $\bar{x}_\sigma$ de s_σ de la même façon. Si $x_\sigma = \sigma(g)y_\sigma g^{-1}$ alors

$$x_\sigma = \bar{x}_\sigma\varepsilon_\sigma$$

avec

$$\varepsilon_\sigma \in \prod_v \prod_{w|v} A(K'(v)_w)$$

et $\varepsilon_\sigma(v)$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$, s'obtient en projetant ε_σ sur $A(K'(v)_v)$.

Nous allons écrire $y_\sigma = {}^1Y_\sigma{}^2Y_\sigma$ et $\bar{x}_\sigma = {}^1X_\sigma{}^2X_\sigma$ avec ${}^1Y_\sigma$, ${}^1X_\sigma$ dans $T_G(\bar{F})$ et ${}^2Y_\sigma$, ${}^2X_\sigma$ dans $\prod_v \prod_{w|v} A(K'(v)_w)$. Donc

$$x_\sigma = \sigma(g)({}^1Y_\sigma)g^{-1}({}^2Y_\sigma)$$

et

$$\varepsilon_\sigma \equiv {}^2Y_\sigma{}^2X_\sigma^{-1} \pmod{A(\bar{F})}.$$

Puisque $\left\{{}^2Y_\sigma{}^2X_\sigma^{-1}\right\}$ définira un élément de $Q^1(F,A)$ il nous suffira de calculer l'invariant qui lui est attaché.

Considérons d'abord $d_\sigma(v)$. puisqu'on a posé $\beta_{\sigma_i^{-1},\tau}(v)=1$, $\tau\in\mathrm{Gal}(K_v/F_v)$, il est égal à

$$\left\{\prod_{i,\tau}\beta_{\sigma_i^{-1}u_i(\sigma),\tau}(v)^{\sigma_i^{-1}u_i(\sigma)\tau\mu(v)}\right\}\left\{\prod_{i,\tau}\delta_{\sigma_i^{-1},u_i(\sigma),\tau}(v)^{\sigma_i^{-1}u_i(\sigma)\tau\mu(v)}\right\}.$$

Le premier facteur s'écrit comme le produit de

$$\prod_{i,\tau}\sigma(\beta_{\sigma_j^{-1},\tau}(v))^{\sigma\sigma_j^{-1}\tau\mu(v)}\beta_{\sigma,\sigma_j^{-1}}^{\sigma\sigma_j^{-1}\tau\mu(v)}$$

et

$$\prod_{ik\tau}\delta_{\sigma,\sigma_j^{-1},\tau}^{-\sigma\sigma_j^{-1}\tau\mu(v)}.$$

Puisque $\beta_{\sigma_j^{-1},\tau}(v)=1$ et $\sum_\tau\tau\mu(v)=0$ la première expression est égale à

$$\prod_{\tau\in\mathrm{Gal}(K/F)}\beta_{\sigma,\tau}(v)^{\sigma\tau\mu(v)}. \tag{7.2}$$

Nous posons

$${}^kA_\sigma(v)=\prod_{i,\tau}{}^k\delta_{\sigma_i^{-1},u_i(\sigma),\tau}(v)^{\sigma_i^{-1}u_i(\sigma)\tau\mu(v)}{}^k\delta_{\sigma,\sigma_j^{-1},\tau}(v)^{-\sigma\sigma_j^{-1}\tau\mu(v)}$$

pour $k=1,2$. Alors ${}^1A_\sigma(v)\in T_{G^*}(\bar F)$ et

$${}^2A_\sigma(v)\in\prod_v\prod_{w|v}A(K'(v)_w).$$

La puissance n-ième de

$$\beta_{\sigma,\tau}(v)\gamma_{\sigma,\tau}^{-1}\sigma(e_\tau(v))^{-1}e_\sigma(v)^{-1}e_{\sigma\tau}(v)$$

est contenue dans $\bar F^\times$. Donc l'expression est un produit

$${}^1b_{\sigma,\tau}(v){}^2b_{\sigma,\tau}(v)$$

où ${}^1b_{\sigma,\tau}(v)\in\bar F^\times$ et

$${}^2b_{\sigma,\tau}(v)\in\prod_v\prod_w K'(v)_w^\times$$

est une racine n-ième de l'unité.

Le produit (7.2) est égal à

$$\left\{\prod_{\tau\in\mathrm{Gal}(K/F)}\gamma_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\mu(v)}\right\}\left\{\prod_\tau(\sigma(e_\tau(v))e_\sigma(v)e_{\sigma\tau}(v)^{-1})^{\sigma\tau\mu(v)}\ {}^1B_\sigma(v)\ {}^2B_\sigma(v)\right\},$$

où

$${}^kB_\sigma(v)=\prod_\tau{}^kb_{\sigma,\tau}(v)^{\sigma\tau\mu(v)}.$$

Donc le produit

$$\left\{\prod_v d_\sigma(v)\right\}\sigma(e^{-1})e$$

est égal à

$$\left\{\prod_{\tau\in\mathrm{Gal}(K/F)}\gamma_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\mu}\right\}{}^1A_\sigma{}^1B_\sigma{}^2A_\sigma{}^2B_\sigma.$$

Nous avons posé

$$\mu=\sum_v\mu(v);\ {}^kA_\sigma=\prod_v{}^kA_\sigma(v);\ {}^kB_\sigma=\prod_v{}^kB_\sigma(v).$$

La somme est finit et les produits le sont aussi.

Si $\chi_\sigma=n\eta_\sigma$ alors

$$\mu=\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(K/F)}\sigma_{T_{G^*}}^{-1}\xi_\sigma-\xi_\sigma$$

et

$$\prod_{\tau\in\mathrm{Gal}(K/F)}\gamma_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\mu}$$

est égal à

$$\prod_{\tau,\varepsilon}\gamma_{\sigma,\tau}^{\sigma\tau\varepsilon^{-1}\chi_\varepsilon}\gamma_{\sigma,\tau}^{-\sigma\tau\chi_\varepsilon}=\sigma(b)b^{-1}\prod_{\tau,\varepsilon}\xi_{\sigma,\tau,\varepsilon}^{\sigma\tau\chi_\varepsilon}.$$

On a posé

$$\xi_{\sigma,\tau,\varepsilon}=\sigma(\gamma_{\tau,\varepsilon})\gamma_{\sigma\tau,\varepsilon}^{-1}\gamma_{\sigma,\tau\varepsilon}\gamma_{\sigma,\tau}^{-1}$$

et on a

$$\xi_{\sigma,\tau,\varepsilon}={}^1\xi_{\sigma,\tau,\varepsilon}{}^2\xi_{\sigma,\tau,\varepsilon}.$$

Si

$${}^kC_\sigma=\prod_{\tau,\varepsilon}{}^k\xi_{\sigma,\tau,\varepsilon}^{\sigma\tau\chi_\varepsilon}$$

et

$${}^kY_\sigma={}^kA_\sigma{}^kB_\sigma{}^kC_\sigma,$$

alors $Y_\sigma={}^1Y_\sigma{}^2Y_\sigma$. Nous construisons ${}^kX_\sigma$ de la même façon sauf que $\mu'(v)$ et χ'_ε remplacent $\mu(v)$ et χ_ε.

Nous calculons ${}^2Y_\sigma{}^2X_\sigma^{-1}$. Si ${}^2X_\sigma={}^2\bar{A}_\sigma{}^2\bar{B}_\sigma{}^2\bar{C}_\sigma$ on a

$${}^2Y_\sigma{}^2X_\sigma^{-1}=({}^2A_\sigma{}^2\bar{A}_\sigma^{-1})({}^2B_\sigma{}^2\bar{B}_\sigma^{-1})({}^2C_\sigma{}^2\bar{C}_\sigma^{-1}).$$

On observe d'abord que

$${}^2A_\sigma{}^2\bar{A}_\sigma^{-1}=\prod_v{}^2A_\sigma(v){}^2\bar{A}_\sigma(v)^{-1}$$

et que ${}^2A_\sigma(v){}^2\bar{A}_\sigma(v)^{-1}$ est égal à

$$\prod_{i,\tau}{}^2\delta_{\sigma_i^{-1},u_i(\sigma),\tau}(v)^{n\sigma_i^{-1}u_i(\sigma)\tau(\lambda(v)-\lambda'(v))}\ \ {}^2\delta_{\sigma,\sigma_j^{-1}\tau}(v)^{-n\sigma\sigma_j^{-1}\tau(\lambda(v)-\lambda'(v))}=1,$$

parce que ${}^2\delta_{\rho,\sigma,\tau}$ est une racine n-ième de l'unité. Un calcul semblable nous donne

$${}^2B_\sigma{}^2\bar{B}_\sigma^{-1}=1.$$

Enfin

$$^2C_\sigma {}^2\bar{C}_\sigma^{-1} = \prod_{\tau,\varepsilon} {}^k\xi_{\sigma,\tau,\varepsilon}^{\sigma\tau(\chi_\varepsilon - \chi'_\varepsilon)}$$

Il résulte du lemme 7.3 d'une part que l'invariant attaché à $\{\varepsilon_\sigma\}$ dans $H^{-2}(\mathrm{Gal}(K/F), U)$ est $\{\nu_\sigma \pmod{X_*(T'_G)}\}$ et du lemma 7.4 d'autre part que cet invariant est $\{\eta_\sigma - \eta'_\sigma \pmod{X_*(T'_G)}\}$, et le lemme 7.6 est démontré.

4. Un invariant global

Dans la suite nous ne considérons que des groupes tels que G^*_{ad} satisfasse le principe de Hasse. Supposons que nous ayons un groupe endoscopique global H et un diagramme global

$$D^*\colon T_H \xrightarrow{\nu} \mathbf{T}_H \longrightarrow \mathbf{T}_{G^*} \xleftarrow{\eta_*} T_{G^*}.$$

Un diagramme pseudo-global D sera un ensemble de diagrammes locaux $D(v)$, un pour chaque place v.

$$D(v)\colon\quad \begin{tikzcd} T_H \arrow[r, "\nu"] & \mathbf{T}_H \arrow[r] & \mathbf{T}_{G^*} & T_{G^*} \arrow[l, "\eta_*"'] \\ & & & T_G(v) \arrow[ul, "\eta(v)"] \arrow[u, "\psi_{T_G(v),T_{G^*}}"'] \end{tikzcd}$$

On suppose de plus que pour presque tout v le diagramme local $E(v)$ obtenu en omettant T_H et $\mathbf{T}_H$ satisfait les conditions du Lemme 6.10. Les $\lambda^0(v)$ étaient fixés dans le paragraphe ci-dessus. Nous choisissons l'invariant $\lambda(v)$ attaché à $E(v)$ de sorte que $\lambda(v) - \lambda^0(v) \in X_*(T_G)$.

La donnée endoscopique s définit un caractère de $X_*(\mathbf{T}_H)$ et au moyen de D un caractère $\kappa = \kappa(D)$ de $X_*(T_{G^*_{\mathrm{sc}}})$. Si $\mu_\sigma \in X_*(T_{G^*})$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_v/F_v)$, et si

$$\lambda = \sum \sigma_{T_{G^*}}^{-1} \mu_\sigma - \mu_0 \in X_*(T_{G^*_{\mathrm{ad}}})$$

alors $\kappa(\lambda) = 1$. De plus κ est invariant sous le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/F)$.

Nous avons défini $\mathfrak{K}(T_{G^*}/F)$ dans le chapître II. Soit $\mathfrak{K}^0(T_{G^*}/F) \subseteq \mathfrak{K}(T_{G^*}/F)$ l'ensemble des caractères κ tels que $\kappa(\lambda) = 1$ si il existe une place v telle que:

$$\sum_{\mathrm{Gal}(K_v/F_v)} \sigma_{T_{G^*}} \lambda = 0.$$

Soit $Z(D) = Z(D^*)$ l'ensemble des $\{\mu_\sigma | \sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)\} \subseteq X_*(T_{G^*_{\mathrm{ad}}})$ tels que

$$\mu = \sum_{\mathrm{Gal}(K/F)} (\sigma_{T_{G^*}}^{-1} - 1)\mu_\sigma \in X_*(T_{G^*_{\mathrm{sc}}})$$

et $\kappa(\mu) = 1$ si $\kappa = \kappa(D)$. Deux diagrammes D et D' seront dits congruents si $Z(D) = Z(D')$. C'est évidemment une relation d'équivalence.

Lemme 7.9: *Si une des deux conditions suivantes est satisfaite alors les diagrammes D et D' sont congruents.*

a) *Les données endoscopiques qui interviennent dans D et D' sont les mêmes.*

b) *Les sous-groupes de Cartan T_{G^*} et T'_{G^*} sont égaux et $\kappa'\kappa^{-1} \in \mathfrak{K}^0(T_{G^*}/F)$.*

Comme d'habitude les diagrammes nous permettent d'identifier $X_*(T_{G^*_{\mathrm{ad}}})$ et $X_*(T'_{G^*_{\mathrm{ad}}})$. De toute façon

$$\sigma_{T'_{G^*}} = \sigma_{T_{G^*}}\omega(\sigma)$$

avec $\omega(\sigma)$ dans le groupe de Weyl. Donc $\mu - \mu'$ ou

$$\sum(\sigma_{T_{G^*}}^{-1} - 1)\mu_\sigma - \sum(\sigma_{T'_{G^*}}^{-1} - 1)\mu_\sigma = \sum(\omega(\sigma)^{-1} - 1)\sigma_{T_{G^*}}^{-1}\mu_\sigma$$

est toujours dans $X_*(T'_{G^*_{\mathrm{sc}}})$.

Si la condition (a) est satisfaite alors $\kappa = \kappa'$ et $\omega(\sigma)$ est contenu dans le groupe de Weyl de H. Donc $\kappa(\mu - \mu') = 0$ et

$$\kappa(\mu) = \kappa(\mu') = \kappa'(\mu').$$

Si la condition (b) est satisfaite alors $\mu = \mu'$. Si $\kappa' = \kappa\kappa^0$ on a

$$\kappa'(\mu') = \kappa(\mu)\kappa^0(\mu).$$

Il résulte du lemme 7.1 et de la définition de $\mathfrak{K}^0(T_{G^*}/F)$ que $\kappa^0(\mu) = 1$.

Si D et D' sont congruents et si on prend $\nu_\sigma(E(v), \lambda(v);\, E'(v), \lambda'(v))$ comme dans le lemme 6.3 si $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_v/F_v)$ et égal à 0 sinon, alors

$$\{\nu_\sigma(D, D')\} = \left\{\sum_v \nu_\sigma(E(v), \lambda(v); E'(v), \lambda'(v))\right\}$$

est bien défini modulo $Z(D) = Z(D')$.

Fixons une classe de congruence $\mathbf{D}$ et supposons qu'elle contienne un diagramme global $\bar{D}$. Soit

$$\bar{\lambda} = \sum \bar{\lambda}(v) = \sum \sigma_{\bar{T}_{G^*}}^{-1}\eta_\sigma(\bar{D}) - \eta_\sigma(\bar{D})$$

avec $\eta_\sigma(\bar{D}) \in X_*(\bar{T}_{G^*_{\mathrm{ad}}})$. Si D est dans $\mathbf{D}$ nous posons

$$\eta_\sigma(D) = \nu_\sigma(D, \bar{D}) + \eta_\sigma(\bar{D}).$$

Ici $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$ et K est une extension galoisienne finie mais suffisamment grande.

Lemme 7.10:

(a) *Si D et D' sont contenus dans* $\mathbf{D}$ *alors*

$$\{\eta_\sigma(D) - \eta_\sigma(D')\} \equiv \{\nu_\sigma(D, D')\} \pmod{Z(\mathbf{D})}.$$

(b) *Si D dans* $\mathbf{D}$ *est un diagramme global et si*

$$\sum_v \lambda(v) = \sum \sigma_{T_{G^*}}^{-1} \eta_\sigma - \eta_\sigma$$

alors

$$\{\eta_\sigma\} \equiv \{\eta_\sigma(D)\} \pmod{Z(\mathbf{D})}.$$

Il résulte des lemmes 6.6 et 6.7 que

$$\begin{aligned}\{\nu_\sigma(D, D')\} &\equiv \{\nu_\sigma(D, \bar{D}) - \nu_\sigma(D', \bar{D})\} \pmod{Z(\mathbf{D})}\\ &= \{\eta_\sigma(D) - \eta_\sigma(D')\},\end{aligned}$$

et la première affirmation est vérifiée.

Si D est global et $\{\eta_\sigma\}$ est défini comme dans (b) le Lemme 7.6 implique que

$$\{\eta_\sigma - \eta_\sigma(\bar{D})\} \equiv \{\nu_\sigma(D, \bar{D})\} \equiv \{\eta_\sigma(D) - \eta_\sigma(\bar{D})\} \pmod{Z(\mathbf{D})},$$

ce qui vérifie la deuxième affirmation.

Nous attachons à $D \in \mathbf{D}$ l'invariant

$$\varepsilon(D) = \sum_v \lambda(v) - \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)} (\sigma_{T_{G^*}}^{-1} - 1)\eta_\sigma(D).$$

Soit $N(D)$ le noyau de κ dans $X_*(T_{G^*_{\mathrm{sc}}})$.

Lemme 7.11:

a) *l'invariant $\varepsilon(D)$ est contenu dans $X_*(T_{G^*_{\mathrm{sc}}})$ et est défini à un élément de $N(D)$ près.*

b) *Si D est un diagramme global alors $\varepsilon(D)$ est contenu dans $N(D)$.*

D'après la définition $\varepsilon(\bar{D}) = 0$. D'ailleurs

$$\begin{aligned}\varepsilon(D) - \varepsilon(\bar{D}) &= \sum_v (\lambda(v) - \bar{\lambda}(v)) - \sum (\sigma_{T_{G^*}}^{-1} - 1)\eta_\sigma(D) + \sum (\sigma_{\bar{T}_{G^*}}^{-1} - 1)\eta_\sigma(\bar{D})\\ &\equiv -\sum (\sigma_{\bar{T}_{G^*}}^{-1} - 1)\nu_\sigma(D, \bar{D})\\ &\equiv 0 \pmod{X_*(T_{G^*_{\mathrm{sc}}})}.\end{aligned}$$

Si D est global

$$\varepsilon(D) - \varepsilon(\bar{D}) \equiv \sum (\sigma_{T_{G^*}}^{-1} - 1)(\eta_\sigma - \eta_\sigma(D)) \pmod{N(D)}.$$

Donc l'affirmation (b) résulte du lemma 7.10.

Lemme 7.12: *L'invariant $\varepsilon(D)$, qui est pris modulo $N(D)$, ne dépend pas du choix des $\lambda^0(v)$, $\bar{\lambda}(v)$, et $\lambda(v)$.*

Nous vérifions ce lemme en faisant usage du lemme 6.4. Supposons que $\bar{\lambda}(v)$ soit remplacé par

$$\bar{\lambda}(v) + \sum_{\mathrm{Gal}(K_v/F_v)} \sigma_{\bar{T}_{G^*}}^{-1} \bar{\xi}_\sigma(v) - \bar{\xi}_\sigma(v)$$

et $\lambda(v)$ par

$$\lambda(v) + \sum_{\mathrm{Gal}(K_v/F_v)} \sigma_{T_{G^*}}^{-1} \xi_\sigma(v) - \xi_\sigma(v)$$

où

$$\sum \sigma_{T_{G^*}}^{-1} \xi_\sigma(v) - \xi_\sigma(v) \equiv \sum \sigma_{\bar{T}_{G^*}}^{-1} \bar{\xi}_\sigma(v) - \bar{\xi}_\sigma(v).$$

Nous posons $\xi_\sigma(v) = \bar{\xi}(v) = 0$ si $\sigma \notin \mathrm{Gal}(K_v/F_v)$ et

$$\xi_\sigma = \sum_v \xi_\sigma(v), \bar{\xi}_\sigma = \sum_V \bar{\xi}_\sigma(v).$$

Il résulte du lemme 6.4 que $\eta_\sigma(D)$ est remplacé par

$$\eta_\sigma(D) + \xi_\sigma$$

parce que $\eta_\sigma(\bar{D})$ est remplacé par $\eta_\sigma(\bar{D}) + \bar{\xi}_\sigma$ et $\nu_\sigma(D, \bar{D})$ par

$$\nu_\sigma(D, \bar{D}) + \xi_\sigma - \bar{\xi}_\sigma$$

Puisque $\sum_v \lambda(v)$ est remplacé par

$$\sum_v \lambda(v) + \sum (\sigma_{T_G}^{-1} - 1)\xi_\sigma$$

l'invariant ε ne se change pas.

Lemme 7.13: *Supposons que les groupes endoscopiques qui interviennent dans D et D' soient égaux, de sorte que $N(D) = N(D')$. Alors*

$$\varepsilon(D) - \varepsilon(D') \equiv \sum_v \theta(E(v), E'(v)) \pmod{N(D)}.$$

Dans la somme à droite $\theta(E(v), E'(v))$ est nul pour presque tout v. Cette somme est égale à

$$\sum_v \left(\lambda(v) - \lambda'(v) - \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K_v/F_v)} \sigma_{T'_{G^*}}^{-1} \nu_\sigma(v) - \nu_\sigma(v) \right),$$

qui est congruent à

$$\sum \lambda(v) - \sum \lambda'(v) - \sum (\sigma_{T_{G^*}}^{-1} - 1)(\eta_\sigma(D) - \eta_\sigma(D'))$$

modulo $N(D)$. Puisque

$$\sum(\sigma_{T'_G}^{-1}-1)\eta_\sigma(D)\equiv\sum(\sigma_{T_{G^*}}^{-1}-1)\eta_\sigma(D)\pmod{N(D)}$$

le lemme en résulte.

5. Les tores qui relèvent de G

Nous avons fixé G et l'isomorphisme φ: $G\to G^*$ défini sur $\bar F$. Nous disons qu'un sous-groupue de Cartan T_{G^*} sur F relève de G globalement ou sur F s'il y a un T_G sur F et un $g\in G^*(\bar F)$ tel que la restriction $\psi_{T_G,T_{G^*}}$ de $\mathrm{ad}g\circ\varphi$ à T_G l'envoie sur T_{G^*} et est définie sur F. Donc T_{G^*} relève de G si et seulement si un diagramme global

$$E:\quad\begin{tikzcd}\mathbf{T}_{G^*} & T_{G^*}\arrow[l] \\ & T_G\arrow[u,"\psi_{T_G,T_{G^*}}"']\arrow[ul]\end{tikzcd}$$

existe.

Soit E^0 un diagramme global donné et soient $\lambda^0(v)$ les repères introduits ci-dessus. Nous disons que T_{G^*} sur F relève de G localement partout ou sur chaque F_v s'il existe pour chaque v un diagramme

$$E(v):\quad\begin{tikzcd}\mathbf{T}_{G^*} & T_{G^*}\arrow[l,"\eta_*"'] \\ & T_G(v)\arrow[u,"\psi_{T_G(v),T_{G^*}}"']\arrow[ul,"\eta(v)"]\end{tikzcd}$$

Puisque le cocycle $\{\sigma(\varphi)\varphi^{-1}\}$ est trivial presque partout les diagrammes $E(v)$ existent de toute façon presque partout et on peut même les supposer non-ramifiés.

Nous avons attaché à $E(v)$ des invariants $\lambda(v)$ et $\nu_\sigma(E^0(v),\lambda^0(v);E(v);\lambda(v))$, $\sigma\in\mathrm{Gal}(K_v/F_v)$, qui sont presque tous nuls. Si $\sigma\in\mathrm{Gal}(K/F)$ mais $\sigma\notin\mathrm{Gal}(K_v/F_v)$ nous posons $\nu_\sigma(E^0(v),\lambda^0(v);\,E(v),\lambda(v))=0$. Soient

$$\sum_v\lambda^0(v)=\sum_{\mathrm{Gal}(K/F)}\sigma_{T^0_{G^*}}^{-1}\eta^0_\sigma-\eta^0_\sigma$$

et

$$\nu_\sigma=\sum_v(E^0(v),\lambda^0(v);\,E(v),\lambda(v)).$$

Nous posons

$$\theta=\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(K/F)}(\sigma_{T_{G^*}}^{-1}-1)(\eta^0_\sigma-\nu_\sigma)-\sum_v\lambda(v).$$

Soit enfin ξ_2 l'homomorphisme de lemme 7.1.

Lemme 7.14: *On a $\theta \in X_*(T_{G^*_{\rm sc}})$ et*

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)} \sigma_{T_{G^*}} \theta = 0.$$

De plus la classe $\bar\theta$ de θ suivant l'image de ξ_2 ne dépend que de T_{G^*}.

Il est évident que la norme de θ est nulle. Selon les définitioins

$$\sum \lambda^0(v) - \sum \lambda(v) - \sum (\sigma_{T_{G^*}}^{-1} - 1)\nu_\sigma \in X_*(T_{G^*_{\rm sc}})$$

et

$$0 = \sum \lambda^0(v) - \sum \sigma^{-1}_{T^0_{G^*}} \eta^0_\sigma - \eta^0_\sigma \equiv \sum \lambda^0(v) - \sum \sigma^{-1}_{T_{G^*}} \eta^0_\sigma - \eta^0_\sigma \pmod{(X_*(T_{G^*_{\rm sc}}))}.$$

Donc $\theta \in X_*(T_{G^*_{\rm sc}})$.

Il résulte des lemmes 6.3 et 7.1 que pour des $E(v), \lambda^0(v)$, et $\lambda(v)$ donnés $\bar\theta$ ne dépend pas du choix de η^0_σ ou de $\nu_\sigma(E^0(v), \lambda^0(v); E(v), \lambda(v))$. Les lemmes 6.4 et 7.1 impliquent que $\bar\theta$ ne dépend pas du choix de $\lambda^0(v)$ et $\lambda(v)$.

Si on a deux suites de diagrammes $\{E(v)\}$ et $\{E'(v)\}$ alors il existe des $h_v \in \mathfrak{A}(T_G(v)/F_v)$ tels que $E'(v)$ est adjoint à $E(v)$ relativement à h_v. Il y a un invariant $\mu(v) \in X_*(T_{G_{\rm sc}}) = X_*(T_{G^*_{\rm sc}})$ attaché à $\{\sigma(h_v)h_v^{-1}\}$. Selon le lemme 6.9

$$\theta' - \theta = -\sum \mu(v),$$

et l'expression à droite est évidemment dans l'image de ξ_2. On lvait de plus qu'en remplaçant les $E(v)$ par des diagrammes adjoints on peut remplacer θ par $\theta - \sum \mu(v)$, pourvu que $\mu(v)$ soit pour chaque v l'invariant attaché à un élément de $\vartheta(T_G(v)/F_v)$.

Supposons enfin que E^1 soit un autre diagramme global. Nous choisissons les $\lambda^1(v)$ de sorte que

$$\lambda^1(v) - \lambda^0(v) \in X_*(T_{G^*_{\rm sc}}).$$

Les lemmes 6.6, 6.7, et 7.1 impliquent que

$$\theta - \theta^1 \equiv \sum (\sigma^{-1}_{T_{G^*}} - 1)(\eta^0_\sigma - \eta^1_\sigma - \nu^{0,1}_\sigma) \pmod{\mathrm{Im}\,\xi_2},$$

où

$$\nu^{0,1}_\sigma = \sum_v (E^0(v), \lambda^0(v); E^1(v), \lambda^1(v)).$$

Il résulte des lemmes 7.1 et 7.6 que $\theta - \theta^1 \in \mathrm{Im}\,\xi_2$. Je souligne qu'en vertu du lemme 7.1 on a

$$\sum \sigma^{-1}_{T_{G^*}} \omega_\sigma - \omega_\sigma \in \mathrm{Im}\,\xi_2$$

si, par exemple, $\omega_\sigma \in X_*(T_{G^*_{\rm ad}})$ et

$$\sum \sigma^{-1}_{T^0_{G^*}} \omega_\sigma - \omega_\sigma = 0.$$

Lemme 7.15: *Supposons que G_{ad} vérifie le principe de Hasse. On a $\theta \in \mathrm{Im}\,\xi_2$ si et seulement si le sous-groupe de Cartan T_{G^*} relève de G globalement.*

Si T_{G^*} relève globalement de G on définit θ au moyen de $E^0 = E$ où E est un diagramme global contenant T_{G^*}. Cela donne $\theta = 0$.

Si $\bar{\theta} = 0$ on peut trouver pour chaque place v un $\mu(v) \in X_*(T_{G^*_{\mathrm{sc}}})$ à norme nulle et tel que

$$\sum_v (\lambda(v) + \mu(v)) = \sum_{\mathrm{Gal}(K/F)} (\sigma_{T_{G^*}}^{-1} - 1)\omega_\sigma,$$

avec $\omega_\sigma \in X_*(T_{G^*_{\mathrm{ad}}})$. Il résulte de la théorie de Tate-Nakayama qu'il y a une classe globale δ, c'est-à-dire dans $H^1(\mathrm{Gal}(K/F), T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(K))$, avec invariants locaux $\lambda(v) + \mu(v)$. Soit $\gamma(v)$ la classe dans $H^1(\mathrm{Gal}(K_v/F_v)$, $T_{G^*_{\mathrm{ad}}}(V_v))$ définie par $\sigma(\varphi_{T_G(v),T_{G^*}})\varphi^{-1}_{T_G(v),T_{G^*}}$. Son invariant est $\lambda(v)$.

Nous avons besoin du lemme suivant, la preuve duquel nous différons.

Lemme 7.16: *Soit T un tore sur le corps global F qui se déploie sur l' extension finie K. Alors l' homomorphisme*

$$H^1(\mathrm{Gal}(K/F), T(K)) \to H^1(\mathrm{Gal}(K/F), T(K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R}))$$

est surjectif.

Autrement dit on peut trouver une classe globale ayant des invariants donnés aux places infinies. Soit ε une classe globale dans $H^1(\mathrm{Gal}(K/F), T_{G^*_{\mathrm{sc}}}(K))$ d'invariants $\mu(v)$ aux places infinies et soit η son image dans $H^1(\mathrm{Gal}(K/F), T_{G^*_{\mathrm{sc}}}(K))$. Nous pouvons remplacer δ par $\gamma'\eta^{-1}$ pour supposer que $\delta(v) \sim \gamma(v)$ aux places infinies.

Soit G' la forme tordue de G^* définie par δ. C'est aussi une forme tordue de G. La classe qui la définit localement est l'image de $\psi^{-1}_{T_G(v),T_{G^*}}(\gamma(v)\delta^{-1}(v))$ dans $H^1(F_v, G_{\mathrm{ad}}(\bar{F}_v))$. Donc cette classe est triviale aux places infinies. Mais $\gamma(v)\delta^{-1}(v)$ provient à chaque place d'une classe dans $H^1(\mathrm{Gal}(K_v/F_v), T^*_{\mathrm{sc}}(K_v))$. Donc la classe dans $H^1(F_v, G_{\mathrm{ad}}(\bar{F}_v))$ qui définit G' provient de $H^1(F_v, G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}_v))$. Il résulte d'un théorème bien connu qu'elle est triviale à chaque place finie, et le principe de Hasse implique alors que le cocycle global, $\{\sigma(\varphi)^{-1}\delta_\sigma\varphi)\}$, définissant G' est trivial.

Si

$$\sigma(\varphi^{-1})\delta_\sigma\varphi = \sigma(g)g^{-1}, \qquad g \in G_{\mathrm{ad}}(\bar{F})$$

alors T_{G^*} relève de

$$T_G = \mathrm{ad}\ g^{-1} \circ \varphi^{-1}(T_G)$$

au moyen de

$$\psi_{T_G,T_{G^*}} = \varphi \circ \mathrm{ad}\ g.$$

Nous revenons à la démonstration du Lemme 7.16. Supposons que les invariants $\mu(v)$ soient donnés aux places infinies. Il suffit de vérifier que l'on peut trouver des invariants $\mu(v)$ aux places finies tels que presque tous les $\mu(v)$ soient nuls et

$$\sum_v \mu(v) = \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(K/f)} \sigma_T^{-1}\eta_\sigma - \eta_\sigma$$

$\eta_\sigma \in X_*(T)$.

Si v est complexe $\mu(v) = 0$. Si v est réel, $G(K_v/F_v)$ ne contient que deux éléments 1 et σ_v. A chaque réel v nous attachons une place finie v' non-ramifiée dans K et telle que le Frobenius dans $\mathrm{Gal}(K_{v'}/F_{v'})$ soit conjugué à σ_v,

$$\Phi_{v'} = \tau_v\sigma_v\tau_v^{-1}.$$

Nous posons $\mu(v') = -\tau_v\mu(v)$ et nous posons $\mu(w) = 0$ si w est une place finie attachée à aucune place réelle. On a

$$\sum \mu(v) = \sum_{v \text{ réele}} \mu(v) - \tau_v\mu(v).$$

6. Une observation sur le principe de Hasse

D'habitude le principe de Hasse s'énonce pour les groupes simplement connexes, soit comme théorème soit comme conjecture. Donc pour soulager le lecteur et pour le convaincre que l'hypothèse que G_{ad} satisfait le principe de Hasse, une hypothèse que mous faisons désormais, n'est pas très ennuyeuse nous vérifions le lemme facile suivant, qui semble être bien connu mais que je n'ai trouvénulle part.

Lemme 7.17: *Si le principe de Hasse est valable pour G_{sc} il l'est aussi pour G_{ad}.*

Pour simplifier la notation nous prenons G simplement connexe. Le lemme de Shapiro nous ramène immédiatement au cas où G est absolument simple.

La suite

$$1 \to A \to G \to G_{\mathrm{ad}} \to 1$$

nous donne un diagamme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(F,A) & \longrightarrow & H^1(F,G) & \longrightarrow & H^1(F,G_{\mathrm{ad}}) & \longrightarrow & H^2(F,A) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\
\prod_v H^1(F_v,A) & \longrightarrow & \coprod_v H^1(F_v,G) & \longrightarrow & \coprod_v H^1(F_v,G_{\mathrm{ad}}) & \longrightarrow & \coprod_v H^2(F_v,A)
\end{array}$$

Le symbole $\coprod_v$ dénote une somme directe d'ensembles et le symbole $\prod_v$ un produit direct restreint.

Puisque le principe de Hasse pour G est tenu pour acquis, il suffit de vérifier les deux affirmations suivantes:

i) Soit V_∞ l'ensemble des places infinies. Alors l'homomorphisme

$$\eta\colon H^1(F,A) \to \coprod_{v\in V_\infty} H^1(F_v,A)$$

et surjectif.

ii) L'homomorphisme φ du diagramme est injectif.

Le groupe A est défini par un module galoisien fini U et l'action sur A se factorise par $\mathrm{Gal}(K/F)$, où K est une extension finie. Nous pouvons supposer que toutes les places infinies de K sont complexes. Nous introduisons encore une suite exacte,

$$0 \to \hat{V} \to \hat{W} \to \hat{U} \to 0,$$

où $\hat{W}$ est un module induit sur $\mathrm{Gal}(K/F)$ et un module libre sur **Z**. Celà nous donne une suite exacte,

$$1 \to A \to S_W \to W_V \to 1,$$

si $W = \mathrm{Hom}(\hat{W}, \mathbf{Z})$, $V = \mathrm{Hom}(\hat{V}, \mathbf{Z})$.

Utilisant le théorème 90 de Hilbert on a

$$\begin{array}{ccccccc} & & S_V(K) & \longrightarrow & H^1(\mathrm{Gal}(K/F), A(K)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow\zeta & & \big\downarrow & & \\ \coprod_{v\in V_\infty} S_W(K_v) & \xrightarrow{\xi} & \coprod_{v\in V_\infty} S_V(K_v) & \longrightarrow & \coprod_{v\in V_\infty} H^1(\mathrm{Gal}(K_v/F_v), A(K_v)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

L'image de ξ est ouverte d'indice fini. Donc pour vérifier la surjectivité il suffit de vérifier le lemme suivant.

Lemme 7.18: (Serre [27]) *Soit T un tore sur F et K une extension finie de F. Alors $T(K)$ est dense dans $T(K \times_{\mathbb{Q}} \mathbf{R})$.*

Nous pouvons supposer que $F = K$. Choisissons une suite exacte de tores déployés sur une extension finie L,

$$1 \to R \to S \to T \to 1,$$

où $X_*(S)$ et induit. Alors $S(F)$ est dense dans $S(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R})$ parce que $L^\times$ est dense dans $(L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R})^\times$.

Nous avons un diagramme à lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccc} R(F) & \longrightarrow & S(F) & \longrightarrow & T(F) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ R(F\otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R}) & \longrightarrow & S(F\otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R}) & \longrightarrow & T(F\otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R}) \end{array}$$

Supposons que t soit dans $T(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R})$. Choisissons un relèvement s dans $S(L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R})$. Alors s définit un cocycle $\alpha_\sigma = \sigma(s)s^{-1}$ à valeurs dans $R(L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R})$. Selon le lemme 7.16 nous pouvons supposer que α_σ prend ses valeurs dans $R(L)$. C'est un bord dans $S(L)$. Donc $\alpha_\sigma = \sigma(s_1)s_1^{-1}$ et l'image t_1 de s_1 dans $T(L)$ est contenu dans $T(F)$. Nous remplaçons t par tt_1^{-1} et supposons que $s \in S(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R})$. Mais il est alors approché par s' dans $S(F)$ et t par l'image t' de s'.

Pour vérifier la deuxième affirmation nous utilisons un résultat de Poitou-Tate (voir [28]). Nous omettons la démonstration.

Lemme 7.19: *Le noyau de* φ: $H^2(F, A) \to \coprod_v H^2(F_v, A)$, *qui est un groupe fini, est dual au noyau de* ψ: $H^1(F, \hat{U}) \to \prod_v H^1(F_v, \hat{U})$.

Soit $\mathrm{Gal}(\bar{F}/K)$ le groupe des éléments qui agissent trivialement sur $\hat{U}$. Alors $\mathrm{Gal}(K/F)$ y agit fidèlement. Puisque

$$H^1(K, \hat{U}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(\bar{F}/K), \hat{U})$$

il résulte du théorème de densité de Tchebotareff que le noyau de

$$H^1(K, \hat{U}) \to \prod_w H^1(K_w, \hat{U})$$

est trivial. Le produit se prend sur les places de K. Donc le noyau de φ est contenu dans $H^1(\mathrm{Gal}(K/F), \hat{U})$.

Il suffit de vérifier que le noyau de

$$H^1(\mathrm{Gal}(K/F), \hat{U}) \to \prod_v H^1(\mathrm{Gal}(K_v/F_v), \hat{U})$$

est trivial. En ne considérant que les composantes p-primaires du module à gauche et en remplaçant F par une extension convenable, nous ramenons le problème au cas où $\mathrm{Gal}(K/F)$ est un p-groupe.

Mais $\mathrm{Gal}(K/F)$ est un sous-groupe du groupe d'automorphismes d'un graphe de Dynkin connexe. Ces groupes sont assez petits, c'est-à-dire soit triviaux, soit un des grouupes $\mathbf{Z}_2$ ou S_3, et en particulier ne contiennent que des p-groupes cycliques. Il existe par conséquent un v tel que $\mathrm{Gal}(K_v/F_v) = \mathrm{Gal}(K/F)$. Le lemme en résulte.

7. Une hypothèse globale

Soit T_{G^*} un sous-groupe de Cartan de G^* défini sur F et soit $\kappa \in \mathfrak{K}(T_{G^*}/F)$, le groupe de caractères introduit dans III.3. Nous y avons vu comment on attache à T_{G^*} et κ des données endoscopiques et un diagramme

$$D^*\colon T_H \xrightarrow{\nu} \mathbf{T}_H \longrightarrow \mathbf{T}_{G^*} \xleftarrow{\eta_*} T_{G^*}.$$

Supposons de plus que T_{G^*} relève de G localement partout. On a alors des diagrammes locaux

$$D(v)\colon \quad \begin{tikzcd} T_H \arrow[r, "\nu"] & \mathbf{T}_H \arrow[r] & \mathbf{T}_{G^*} & T_{G^*} \arrow[l, "\eta_*"'] \\ & & & T_G(v) \arrow[ul, "\eta(v)"] \arrow[u, "\psi_{T_G(v),T_{G^*}}"'] \end{tikzcd}$$

Leur ensemble est un diagramme pseudo-global $D = D(\kappa)$. Le nombre $\kappa(\varepsilon(D(\kappa)))$ est bien définie si $D(\kappa)$ est congruent à un diagramme global.

Lemme 7.20: *Soit $\bar\kappa$ un élément donné de $\mathfrak{K}(T_{G^*}/F)$. Supposons, ce qui est évidemment possible, que les $\psi_{T_G(v),T_{G^*}}$ qui interviennent dans $D(\kappa)$, $\kappa \equiv \bar\kappa \pmod{\mathfrak{K}^0(T_{G^*}/F)}$ ne dépendent pas de κ. Supposons que $D(\kappa)$ soit congruent à un diagramme global. Alors*

$$\sum_{\kappa \equiv \bar\kappa \pmod{\mathfrak{K}^0(T_{G^*}/F)}} \kappa(\varepsilon(D(\kappa))) = |\mathfrak{K}^0(T_{G^*}/F)|\bar\kappa(\varepsilon(D(\bar\kappa)))$$

si T_{G^*} relève de G globalement et 0 autrement.

Il résulte de la définition que $\varepsilon(D(\kappa)) = \varepsilon(D(\bar\kappa))$ si $\kappa \equiv \bar\kappa \pmod{\mathfrak{K}^0(T_{G^*}/F)}$. Donc l'égalité se ramène à l'égalité

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{K}^0(T_{G^*}/F)} \kappa(\varepsilon(D(\bar\kappa))) = |\mathfrak{K}^0(T_{G^*}/F)|$$

si T_{G^*} relève de G globalement et 0 sinon.

Selon le lemme 7.14, la valeur $\kappa(\theta)$ est bien définie si $\kappa \in \mathfrak{K}^0(T_{G^*}/F)$. Le lemma 7.15 implique que la somme

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{K}^0(T_{G^*}/F)} \kappa(\theta)$$

est $|\mathfrak{K}^0(T_{G^*}/F)|$ ou 0 suivant que T_{G^*} relève de G ou non.

Considérons la somme $\varepsilon(D) + \theta$, où $D = D(\bar\kappa)$. On peut supposer que le diagramme global E^0 définissant θ fait partie d'un diagramme D^0 congruent à D. La somme est égale à

$$-\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)} (\sigma_{T_{G^*}}^{-1} - 1)\eta_\sigma(D) + \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)} (\sigma_{T_{G^*}}^{-1} - 1)(\eta_\sigma^0 - \nu_\sigma),$$

où $\nu_\sigma = \nu_\sigma(D^0, D)$. Il résulte des lemmes 7.1 et 7.10 que

$$\kappa(\varepsilon(D) + \theta) = 1$$

si $\kappa \in \mathfrak{K}^0(T_{G^*}/F)$, ce qui implique le lemme.

Dans la suite nous admettrons l'hypothèse suivante, qui nous permettra d'utiliser le lemme que nous venons de démontrer. *Pour chaque donnée endoscopique globale nous pouvons trouver des facteurs de transfert* $\Delta(\gamma, D(v), \phi_H)$ *tels que pour chaque diagramme pseudoglobal* D *congruents à un diagramme global et chaque* $\gamma \in T_H(F)$ *régulier dans* G *la valeur* $\Delta(\gamma, D(v), \phi_H)$ *est* 1 *pour presque toute place* v *et*

$$\prod_v \Delta(\gamma, D(v), \phi_H) = \kappa(\varepsilon(D)).$$

Pour rendre cette hypothèse un peu plus plausible nous vérifions deux lemmes simples.

Lemme 7.21: *Supposons que* D *soit un diagramme pseudo-global et que pour chaque* v *l'élément* h_v *soit dans* $\mathfrak{A}(T_G(v)/F_v)$. *On suppose que* h_v *est trivial pour presque tout* v. *Soit* $D' = \{D'(v)\}$ *le diagramme adjoint défini par les* h_v. *Alors l'égalité*

$$\prod_v \Delta(\gamma, D(v), \phi_H) = \kappa(\varepsilon(D)), \qquad \gamma \in T_H(F),$$

implique l'égalité

$$\prod_v \Delta(\gamma, D'(v), \phi_H) = \kappa(\varepsilon(D'))' \qquad \gamma \in T_H(F).$$

Selon le lemme 3.1

$$\Phi^{\kappa}_{T_G(v)}(\gamma, f_v) = \kappa(h_v)\Phi^{\kappa'}_{T'_G(v)}(\gamma', f_v)$$

si $\gamma' = \mathrm{ad}\ a^{-1}(\gamma)$. Par conséquent

$$\Delta(\gamma', D'(v), \phi_H) = \kappa(h_v)\Delta(\gamma, D(v), \phi_H)$$

et

$$\prod_v \Delta(\gamma', D'(v), \phi_H) = \Big\{\prod_v \kappa(h_v)\Big\}\Big\{\prod_v \Delta(\gamma, D(v), \phi_H)\Big\}.$$

Mais l'égalité

$$\prod_v \kappa(h_v) = \kappa'(\varepsilon(D'))\kappa(\varepsilon(D))^{-1}$$

résulte des lemmes 6.9 et 7.13.

Lemme 7.22: *Supposons que l'hypothèse locale soit vérifiée. Alors si l'hypothèse globale est vérifiée pour* G^* *elle l'est aussi pour* G.

Les facteurs $\Delta(\gamma, D^*(v), \phi_H)$ sont fixés en sorte que l'hypothèse globale est vérifiée. Supposons que H soit défini par des données endoscopiques globales. Il y a deux possibilités:

(a) Les diagrammes pseudo-globaux de la forme $D = \{D(v)\}$ où

$$\begin{tikzcd}
T_H \arrow[r, "\nu"] & \mathbf{T}_H \arrow[r] & \mathbf{T}_{G^*} & T_{G^*} \arrow[l, "\eta_*"'] \\
& & & T_G(v) \arrow[ul, "\eta(v)"] \arrow[u, "\psi_{T_G(v),T_{G^*}}"']
\end{tikzcd}$$

sont tous congruents à un diagramme global.

(b) Aucun de ces diagrammes n'est congruent à un diagramme global.

Dans le deuxième cas il n'y a rien à vérifier. Dans le premier cas on fixe un diagramme $\bar{D}$ et on pose

$$\Delta(\gamma, \bar{D}(v), \phi_H) = c_v \Delta(\gamma^*, \bar{D}^*(v), \phi_H), \bar{D}^*(v) = \bar{D}^*,$$

si $\gamma \in T_G(v)$ et $\gamma^* = \psi_{T_G(v),T_{G^*}}(\gamma)$. Les c_v sont des constantes, presque toutes égales à 1 et telles que

$$\prod c_v = \bar{\kappa}(\varepsilon(\bar{D})).$$

Donce si γ provient d'un élément de $T_H(F)$

$$\prod_v \Delta(\gamma, \bar{D}(v), \phi_H) = \bar{\kappa}(\varepsilon(\bar{D})) \prod_v \Delta(\gamma^*, \bar{D}^*(v), \phi_H) = \bar{\kappa}(\varepsilon(\bar{D}))$$

parce que

$$\bar{\kappa}(\varepsilon(\bar{D}^*)) = \bar{\kappa}^*(\varepsilon(\bar{D}^*)) = 1.$$

Selon l'hypothèse locale on a en général

$$\Delta(\gamma, D(v), \phi_H) = c_v \kappa(\theta(D(v), \bar{D}(v)))\Delta(\gamma, D^*(v), \phi_H).$$

Puisque $\kappa = \bar{\kappa}$ le lemme 7.13 implique l'égalité

$$\prod_v (\gamma, D(v), \phi_H) = \kappa(\varepsilon(\bar{D}))\kappa(\varepsilon(D) - \varepsilon(\bar{D})) = \kappa(\varepsilon(D)).$$

Dans le prochain chapître nous tirerons quelques conséquences de l'hypothèse et du lemme 7.20.

VIII. Stabilisation Partielle

Je n'ai pas visé dans ces notes la vérification d'une formule des traces stable. Mon seul but est de montrer qu'en manipulant les termes elliptiques réguliers on peut arriver à une approximation convaincante de la formule (2.2). La stabilisation complète n'est achevée que dans quelques cas particuliers (voir [13], [25]).

1. Une première réduction

Nous employons les noations de II.2. Le terme elliptique régulier de la formule des traces s'écrit

$$\sum_{\{\lambda\}} \delta(\gamma)^{-1}\mathrm{mes}({}_oZG_\gamma(G)\backslash G_\gamma(\mathbf{A}_F)) \int_{G_\gamma(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})} f(g^{-1}\gamma g)dg. \tag{8.1}$$

Chaque terme dans la somme est fini et elle converge absolument. Donc nous pouvons la manier à notre grè. La somme porte sur un ensemble de représentants des classes elliptiques régulières relativement à l'équivalence

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Longleftrightarrow \gamma_2 = z\varepsilon^{-1}\gamma_1\varepsilon, \quad \varepsilon \in G(F),\ z \in {}_0Z \cap Z(F).$$

Nous disons, bien que ce ne soit pas la définition habituelle, que γ est elliptique régulier si son centralisateur G_γ est un sous-groupe de Cartan anisotrope modulo le centre Z. L'entier $\delta(\gamma)$ est égal au nombre de $z \in {}_0Z \cap Z(F)$ tel que $z\gamma = \varepsilon^{-1}\gamma\varepsilon$ pour un $\varepsilon \in G(F)$.

Soit $\mathcal{T}$ un ensemble de représentants pour les classes de connjugaison sur F de sous-groupes de Cartan elliptiques et soit $\mathcal{T}_{\mathrm{st}}$ un ensemble de représentants pour les classes de conjugaisons stables. Si T est un sous-groupe de Cartan arbitraire sur F soit $\Omega_F^0(T,G)$ le quotient du normalisateur $N^0(T)$ de T dans $G(F)$ par $T(F)$; et soit $\Omega_F(T,G)$ le groupe des éléments du groupe de Weyl absolu dont l'action sur T est définie sur F. Il est évident que $\Omega_F^0(T,G) \subseteq \Omega_F(T,G)$. Nous réécrivons (8.1) comme

$$\sum\nolimits_{\mathcal{T}} \frac{\mathrm{mes}({}_oZT(F)\backslash T(\mathbf{A}))}{|\Omega_F^0(T,G)} \sum_{{}_oZ(F)\backslash T(F)} \int_{T(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})} f(g^{-1}\gamma g)dg. \tag{8.2}$$

La somme intérieure parcourt l'ensemble des éléments γ dans $T(F)$ dont le centralisateur est T. Nous avons posé $\mathbf{A} = \mathbf{A}_F$ et ${}_oZ(F) = {}_oZ \cap Z(F)$.

Pour justifier ce changement nous observons d'abord que dans la somme (8.1) on peut supposer que chaque γ est contenu dans un T de $\mathcal{T}$. Nous pourrons alors essayer de faire la sommation sur tout T et tout γ dans $T(F)$ et régulier. La comme continue à converger parce que chaque classe intervient au plus $|\Omega_F^0(T,G)|$ fois. En effet, si onpose

$$\Omega_F^0(T,G)_\gamma = \{\omega \in \Omega_F^0(T,G) \mid \gamma^\omega \equiv \gamma \pmod{{}_oZ(F)}\}$$

la classe de γ intervient avec la multiplicité

$$\frac{|\Omega_F^0(T,G)|}{|\Omega_F^0(T,G)_\gamma|}.$$

On obtient (8.2) en observant que

$$\delta(\gamma) = |\Omega^0_F(T,G)_\gamma|.$$

Comme pour les corps locaux on pose

$$\Phi_T(\gamma, f) = \int_{T(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})} f(g^{-1}\gamma g)dg$$

et si $\delta \in \vartheta(T/F)$ est représenté par $a \in \mathfrak{A}(T/F)$ on pose

$$\Phi_{T^\delta}(\gamma^\delta, f) = \Phi_{T^a}(\gamma^a, f).$$

Nous remplaçons (8.2) par

$$\sum_{\mathfrak{T}_{\mathrm{st}}} \frac{\mathrm{mes}({}_oZT(F)\backslash T(\mathbf{A}))}{|\Omega_F(T,G)|} \sum_{{}_oZ(F)\backslash T(F)} \sum_{\vartheta(T/F)} \Phi_{T^\delta}(\gamma^\delta, f). \tag{8.3}$$

Puisqu'il est évident que chaque $T' \in \mathfrak{T}$ est un T^a avec $a \in \mathfrak{A}(T/F)$ et $T \in \mathfrak{T}_{\mathrm{st}}$ le seul problème est de compenser le superflu.

Supposons que T et $h \in \mathfrak{A}(T/F)$ soient donnès. Le nombre de $\delta \in \vartheta(T/F)$ tels que T^h et T^g, où g représente δ, sont conjugués est égal au nombre de δ dans $\mathfrak{A}(T^h/F)$ tels que T^h et T^{hg} sont conjugués, où g représente maintenant le nouveau δ, car $g \to hg$ donne une bijection: $\vartheta(T^h/F) \to \vartheta(T/F)$. Ce nombre est égal à

$$|T^h(\bar{F})N(T^h)\backslash N^0(T^h)| = |T^h(F)N^0(T^h)\backslash N(T^h)|,$$

où $N(T^h)$ est le normalisateur de T^h dans $\mathfrak{A}(T^h/F)$. L'ordre du quotient à droite est

$$\frac{|\Omega_F(T^h,G)|}{|\Omega^0_F(T^h,G)|}.$$

Puisque

$$\Omega_F(T^h,G) \simeq \Omega_F(T,G),$$

on obtient la formule.

2. Une deuxième réduction

Nous fixerons T et un γ dans $T(F)$ régulier et considérerons

$$\sum_{\vartheta(T/F)} \Phi_{T^\delta}(\gamma^\delta, f). \tag{8.4}$$

Mais pour cela il nous faut des considérations préalables; nous y reviendrons dans le Lemme 8.5.

Nous avons introduit dans II.3 les groups $\mathcal{E}(T/F)$ et $\mathcal{E}(T/F_v)$. Soient

$$\mathcal{E}(T/\mathbf{A}) = \oplus_v \mathcal{E}(T/F_v),$$
$$\vartheta(T/\mathbf{A}) = \oplus_v \vartheta(T/F_v) \subseteq \mathcal{E}(T/\mathbf{A}).$$

On observe que $\vartheta(T/\mathbf{A})$ n'est pas un groupe en général. Il y a une application

$$\varphi_{T/F}\colon \mathcal{E}(T/F) \to \mathcal{E}(T/\mathbf{A}).$$

Lemme 8.1: *Supposons que G_{sc} vérifie le principe de Hasse. Soit $\delta \in \mathcal{E}(T/F)$. Alors $\delta \in \vartheta(T/F)$ si et seulement si $\varphi_{T/F}(\delta) \in \vartheta(T/\mathbf{A})$.*

Il est évident que l'image de $\vartheta(T/F)$ est contenue dans $\vartheta(T/\mathbf{A})$. Supposons que δ soit contenu dans $\mathcal{E}(T/F)$ et $\varphi_{T/F}(\delta)$ dans $\vartheta(T/\mathbf{A})$.

Nous nous rappelons qu'on a construit dans [18] un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & & \\
 & & A \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & G_{\mathrm{sc}} \arrow[r] & \tilde{G} \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] & 1 \\
 & & G \arrow[d] & & \\
 & & 1 & &
\end{tikzcd}$$

Le groups A est un tore et $X_*(A)$ est un module induit de sorte que $H^1(F, A) = \{1\}$. Le diagramme correspondant de sous-groupes de Cartan est

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & & \\
 & & A \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & T_{\mathrm{sc}} \arrow[r] & \tilde{T} \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] & 1 \\
 & & T \arrow[d] & & \\
 & & 1 & &
\end{tikzcd}$$

Les applications $\vartheta(\tilde{T}/F) \to \vartheta(T/F)$ et $\vartheta(\tilde{T}/\mathbf{A}) \to \vartheta(T/\mathbf{A})$ sont injectives. Remplaçant G par $\tilde{G}$ nous supposons qu'on a une suite exacte

$$1 \to T_{\mathrm{sc}} \to T \to D \to 1,$$

dans laquelle D est un tore. Si L est une extension galoisienne finie qui déploie T alors

$$1 \to T_{\mathrm{sc}}(L) \to T(L) \to D(L) \to 1$$

est exacte.

Soit $\{\delta_\sigma \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)\}$ un cocycle à valeurs dans $T_{\mathrm{sc}}(L)$ qui représente δ. Nous avons supposé qu'il y a un cocycle $\{\gamma_\sigma \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)\}$ à valeurs dans $T_{\mathrm{sc}}(L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R})$ qui est un bord dans $G_{\mathrm{sc}}(L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R})$ et qui satisfait l'équation

$$\gamma_\sigma^{-1}\delta_\sigma = \sigma(\alpha)\alpha^{-1} \tag{8.5}$$

avec $\alpha \in T(L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R})$. Nous voulons en déduire que δ_σ est cohomologue dans $T(L)$ à un cocycle β_σ à valeurs dans $T_{\mathrm{sc}}(L)$ qui est un bord dans $G_{\mathrm{sc}}(L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R})$. Selon un théorème bien connu il est forcément un bord dans $G_{\mathrm{sc}}(L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{Q}_p)$ pour chaque nombre premier p, et le principe de Hasse implique alors qu'il est un bord dans $G_{\mathrm{sc}}(L)$. Nous concluons que δ est contenu dans $\vartheta(T/F)$.

Nous avons besoin d'un lemme.

Lemme 8.2: *Soient F un corps local de caractéristique zéro, L une extension finie galoisienne de F, et G un groupe algébrique sur F. Soit $\{\gamma_\sigma\}$ un cocycle de $\mathrm{Gal}(L/F)$ à valeurs dans $G(L)$ et supposons que $\{\gamma_\sigma\}$ soit un bord. Alors chaque cocycle $\{\beta_\sigma\}$ tel que β_σ est suffisamment proche de γ_σ pour tout σ est aussi un bord.*

Admettons ce lemme et terminons la démonstration du Lemme 8.1. Soit $\bar{\alpha}$ l'image de α dans $(L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R})$. L'égalité (8.5) implique qu'il est contenu dans $D(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R})$. Selon le lemme 7.18 il y a un $\bar{\varepsilon}$ dans $D(F)$ qui lui est proche. Le théorème 90 de Hilbert implique de plus que $\bar{\varepsilon}$ est l'image d'un ε dans $T(L)$. Puisque $\sigma(\varepsilon)\varepsilon^{-1} \in T_{\mathrm{sc}}(L)$ pour tout σ, nous pouvons remplacer δ_σ par $\sigma(\varepsilon)\varepsilon^{-1}\delta_\sigma$ et supposer que $\bar{\alpha}$ est proche de l'identité. On a $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ vec α_2 proche de l'identité et α_1 dans $T_{\mathrm{sc}}(L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R})$. On choisit une approximation ε_1 de α_1 dans $T_{\mathrm{sc}}(L)$ et puis on remplace δ_σ par $\sigma(\varepsilon_1)^{-1}\varepsilon_1\delta_\sigma$. En effet on peut enfin supposer que δ_σ est proche à γ_σ pour tout σ; et alors selon le lemme 8.2 il suffit de prendre $\{\beta_\sigma\} = \{\delta_\sigma\}$.

Revenant au Lemme 8.2 lui-même nous supposons pour la durée de sa démonstration, d'ailleurs très courte, que F est local. On tord G en remplaçant l'action du groupe de Galois par σ': $g \to \gamma_\sigma^{-1}\sigma(g)\gamma_\sigma$, ce qui donne un nouveau groupe G' sur F. Si β_σ est un autre cocycle à valeurs dans $G(L)$ alors $\gamma_\sigma^{-1}\beta_\sigma = \beta'_\sigma$ est un cocycle à valeurs dans $G'(L)$. C'est un bord si et seulement si $\{\beta_\sigma\}$ et $\{\gamma_\sigma\}$ sont cohomologues. Donc en passant à G' au besoin on peut supposer que $\gamma_\sigma \equiv 1$.

Le groupe $\mathrm{Gal}(L/F)$ est résoluble et la démonstration se fait par induction sur son ordre. On vérifie que si chaque β_σ est près de l'identité alors $\beta_\sigma = \sigma(\alpha)\alpha^{-1}$ avec α près de l'identité.

Supposons que $F \subsetneqq E \subsetneqq L$ et que E/F est galoisien. Selon l'hypothèse inductive, il existe α près de l'identité tel que $\beta_\sigma = \sigma(\alpha)\alpha^{-1}$ pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/E)$. On remplace β_σ par $\sigma(\alpha)^{-1}\beta_\sigma\alpha$ et on passe à l'extension E/F.

Si E n'existe pas le groupe $\mathrm{Gal}(L/F)$ est cyclique d'ordre premier ℓ. Soit σ un générateur. Si $\beta = \beta_\sigma$ alors

$$\sigma^{\ell-1}(\beta)\ldots\sigma(\beta)\beta = 1.$$

Les ensembles $G(L)$ et $G(F)$ sont des variétés analytiques sur F. Choisissons dans un voisinage de l'identité dans $G(L)$ une sous-variété V complémentaire à $G(F)$. Le jacobien de l'application

$$(u, v) \to \sigma(v)^{-1}uv, \;\; u \in G(F), \;\; v \in V,$$

au point $(1, 1)$ n'est pas nul et donc l'image de cette application contient un voisinage de l'identité, et l'équation

$$\beta = \sigma(v)^{-1}uv$$

a une solution avec u et v près de 1. Mais alors $u^\ell = 1$.

Soit maintenant T_{G^*} un sous-groupe de Cartan de G^* qui est défini sur F et qui relève localement partout de G. Soit $E = \{E(v)\}$,

$$E(v): \quad \begin{tikzcd} T_H \arrow[r, "\nu"] & \mathbf{T}_H \arrow[r] & \mathbf{T}_{G^*} & T_{G^*} \arrow[l, "\eta_*"'] \\ & & & T_G(v) \arrow[ul, "\eta(v)"] \arrow[u, "\psi_{T_G(v), T_{G^*}}"'] \end{tikzcd}$$

un ensemble de diagrammes locaux. Donc pour chaque v on choisit $E(v)$ et on exige que $E(v)$ soit non-ramifié pour presque tout v.

Les diagrammes attachent à chaque $\delta_* \in \mathcal{E}(T_{G^*}/\mathbf{A})$ des $\delta(v) \in \mathcal{E}(T_G(v)/F_v)$. Soit γ_* dans $T_{G^*}(A)$ aux composantes $\gamma_*(v)$ et soit $\gamma_*(v)$ l'image de $\gamma(v)$ dans $T_G(v)(F_v)$. Nous posons

$$\Phi(\gamma_*, f_v; E(v), \delta_*) = \Phi_{T_G(v)^{\delta(v)}}(\gamma(v)^{\delta(v)}, f_v)$$

si $\delta(v) \in \vartheta(T_G(v)/F_v)$ et

$$\Phi(\gamma_*, f_v; E(v), \delta_*) = 0$$

sinon.

Pour presque tout v le groupe G est quasi-déployé sur F_v et déployé sur une extension non-ramifiée L_v. D'ailleurs pour presque tout v la fonction f_v est le quotient de la fonction caractéristique d'un sous-groupe compact hyperspécial par sa mesure. Il est par conséquent évident que pour un tel v

$$\Phi(\gamma_*, f_v; E(v), \delta_*) = 0$$

si $\gamma_*(v)$ n'est pas dans le sous-groupe compact maximal de $T_{G^*}(F_v)$. En particulier il n'y a qu'un nombre fini de γ_* réguliers dans $T_{G^*}(F)$ qui sont tels que

$$\Phi(\gamma_*, f_v; E(v), \delta_*) \neq 0$$

pour au moins un δ_* et tout v.

Nous allons vérifier maintenant que pour un γ_* donné régulier dans $T_{G^*}(F)$ il n'y a qu'un nombre fini de δ_* tels que

$$\Phi(\gamma_*, f_v; E(v), \delta_*) \neq 0$$

pour tout v. En plus presque toutes les composantes locales d'un tel δ_* sont triviales. C'est en effet une conséquence du lemme suivant.

Lemme 8.3: *Soit $T = T_G(v)$ et supposons que:*

i) *le diagramme $E(v)$ soit nonm-ramifié relativement aux sous-groupes compacts hyperspéciaux U_v et U_v^*;*

ii) *la fonction f_v soit la fonction caractéristique du sous-groupe U_v;*

iii) *l' élément γ de $T(F_v)$ soit contenu dans $T_{G^*}(F_v) \cap U_v$ et $\alpha(\gamma)$ ne soit congru à 1 modulo $\mathfrak{g}_v$ pour aucune racine α.*

Soit $a \in \mathfrak{A}(T_G(v)/F_v)$. La fonction $g \to f_v(g^{-1}\gamma^a g)$ sur $G(F_v)$ est identiquement nulle sauf quand la classe δ dans $\xi(T_G(v)/F_v)$ attachée à a est triviale. Alors elle est la fonction caractéristique de $a^{-1}T(\bar{F}_v)U_v \cap G(F_v)$.

Puisque $E(v)$ est non-ramifié relativement à U_v le point x dans $\mathfrak{X}$, l'immeuble de Bruhat-Tits de $G(L_v)$, qui définit U_v est contenu dans l'appartement A de $T(L_v)$. Nous pouvons supposer que $a \in G(L_v)$. Selon l'hypothèse (iii) et (3.6i) de [37] l'ensemble de points fixes de γ dans $\mathfrak{X}$ est contenu dans A.

Donc $f_v(g^{-1}\gamma^a g)$ est 1 ou 0 suivant que agx soit contenu dans A ou non. Si A contient agx alors $agx = tx$, $t \in T(L_v)$ et $h = t^{-1}ag$ stabilise x. Les arguments habituels impliquent que $h = \sigma(k^{-1})k$, où k stabilise x. Il en résulte que δ est trivial, et le lemme est vérifié.

Il nous permet de poser

$$\Phi(\gamma_*, f, E, \delta_*) = \prod_v \Phi(\gamma_*, f_v, E(v), \delta_*)$$

et

$$\Phi(\gamma_*, f, E, \kappa) = \sum_{\delta_* \in \vartheta(T_{G^*}/\mathbf{A})} \kappa(\delta_*)\Phi(\gamma_*, f, E, \delta_*)$$

si $\kappa \in \mathfrak{K}(T_{G^*}/F)$.

Le caractère κ définit un diagramme D^* et les diagrammes D^* et E définissent ensemble un diagramme D. Nous posons

$$\Phi^{\kappa}_{T_{G^*}}(\gamma_*, f) = 0$$

si D n'est congruent à aucun diagramme global. Si D est congruent à un diagramme global nous posons

$$\Phi^{\kappa}_{T_{G^*}}(\gamma_*, f) = \kappa(\varepsilon(D))\Phi(\gamma_*, f, E, \kappa).$$

Lemme 8.4: *La valeur $\Phi^{\kappa}_{T_{G^*}}(\gamma_*, f)$ ne dépend pas du choix de E. Si $a \in \mathfrak{A}(T_{G^*}/F)$, si $T'_{G^*} = T^a_{G^*}$, $\gamma'_* = \gamma^a_*$, et si κ' s'obtient de κ par transport de structure alors*

$$\Phi^{\kappa'}_{T'_{G^*}}(\gamma', f) = \Phi^{\kappa}_{T_{G^*}}(\gamma, f).$$

Tout autre choix de E se déduit d'un E donné en prenant les diagrammes adjoints des $E(v)$ relatifs à des $h_v \in \mathfrak{A}(T_G(v)/F_v)$. Cela multiplie $\Phi(\gamma_*, f, E, \kappa)$ par $\prod_v \kappa_v(h_v)^{-1}$, où le caractère κ_v est l'image de κ dans $\mathfrak{K}(T_{G^*}/F_v)$. Mais selon les lemmes 6.9 et 7.13

$$\kappa'(\varepsilon(D')) = \kappa(\varepsilon(D')) = \kappa(\varepsilon(D))\prod_v \kappa_v(\theta(E'(v), E(v)))$$

et

$$\kappa_v(\theta(E'(v), E(v))) = \kappa_v(h_v).$$

Si $a \in \mathfrak{A}(T_{G^*}/F)$ alors $a \in \mathfrak{A}(T_{G^*}/F_v)$ pour chaque v et $\prod_v \kappa_v(a) = 1$, ce qui donne la seconde affirmation.

Le noyau de $\mathcal{E}(T_{G^*}/F) \to \mathcal{E}(T_{G^*}/\mathbf{A})$ est fini, et le groupe $\mathfrak{K}(T_{G^*}/F)$ l'est aussi. Leurs ordres soient $\iota_1(F, T_{G^*}, G^*) = \iota_1(F, T_{G^*})$ et $\iota_2(F, T_{G^*}, G^*) = \iota_2(F, T_{G^*})$. Nous posons

$$\iota(F, T_{G^*}, G^*) = \iota(F, T_{G^*}) = \frac{\iota_1(F, T_{G^*})}{\iota_2(F, T_{G^*})}.$$

Lemme 8.5: *Soit $\gamma^* \in T_{G^*}(F)$ régulier. Considérons*

$$\iota(F, T_{G^*}) \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}(T_{G^*}/F)} \Phi^{\kappa}_{T_{G^*}}(\gamma_*, f).$$

a) *Si T_{G^*} ne relève pas de G globalement cette expression est égale à zéro.*

b) *Si T_{G^*} relève de T_G alors elle est égale à*

$$\sum_{\delta \in \vartheta(T_G/F)} \Phi(\gamma^{\delta}, f)$$

si $\gamma_* = \psi_{T_G, T_{G^*}}(\gamma)$.

On observe qu'il s'agit ici de la somme (8.4) avec $T = T_G$.

Nous vérifions la deuxième affirmation d'abord. Puisque la classe de conjugaison stable du γ qui y intervient est bien définie la somme est aussi bien définie. Si on définit $\Phi_{T_{G^*}}(\gamma_*, f)$ à partir d'un diagramme global contenant T_G nous obtenons

$$\Phi^{\kappa}_{T_{G^*}}(\gamma_*, f) = \sum \kappa(\delta) \prod_v \Phi_{T_G^{\delta(v)}}(\gamma^{\delta(v)}, f_v)$$

parce que $\kappa(\varepsilon(D)) = 1$. La somme parcourt $\mathcal{E}(T_G/\mathbf{A}) = \mathcal{E}(T_{G^*}/\mathbf{A})$. Il résulte de la théorie de Tate-Nakayama que δ est dans le noyau de tout $\kappa \in \mathfrak{K}(T_{G^*}/F)$ si et seulement s'il est dans l'image de $\mathcal{E}(T/F)$. Donc en sommant sur κ nous obtenons

$$\iota_2(F, T_{G^*}) \sum_{\text{Image } \mathcal{E}(T/F)} \prod_v \Phi_{T_G^{\delta(v)}}(\gamma^{\delta(v)}, f_v).$$

Tenant compte du lemme 8.1, des définitions et de l'égalité

$$\Phi_{T_G^{\delta}}(\gamma^{\delta}, f) = \prod_v \Phi_{T_G^{\delta(v)}}(\gamma^{\delta(v)}, f_v),$$

où $\delta \in \mathcal{E}(T_G/F)$ a pour image $\{\delta(v)\}$, nous obtenons l'énoncé.

Pour vérifier la premièr partie il suffit de montrer que pour chaque κ donné

$$\sum_{\kappa^0 \in \mathfrak{K}^0(T_{G^*}/F)} \Phi_{T_{G^*}}^{\kappa\kappa^0}(\gamma_*, f) = 0.$$

Si les diagrammes attachés à T_{G^*} et les $\kappa\kappa^0$ ne sont pas congruents à un diagramme global c'est une conséquence immédiate de la définition.

Si au contraire ils sont congruents à un diagramme global nous fixons un $E = \{E(v)\}$ et l'utilisons pour construire des diagrammes pseudo-globaux $D(\kappa\kappa^0)$. Notre somme est égale à

$$\sum_{\kappa^0} \kappa\kappa^0(\varepsilon(D(\kappa\kappa^0))) \sum_{\delta_*} \kappa(\delta_*)\kappa^0(\delta_*)\Phi(\gamma_*, f, E, \delta_*).$$

Mais $\mathfrak{K}^0(T_{G^*}/F)$ est précisément le groupe de tous les éléments κ^0 dans $\mathfrak{K}(T_{G^*}/F)$ tels que

$$\kappa^0(\delta_*) = \prod_v \kappa_v^0(\delta_*(v)) = 1$$

pour tout $\delta_* \in \mathcal{E}(T_{G^*}/A)$.

Il en résulte que la somme intérieure ne dépend pas de κ^0. L'égalité

$$\sum \kappa\kappa^0(\varepsilon(D(\kappa\kappa^0))) = 0$$

est vérifiée dans le lemme 7.20.

Le terms elliptique régulier de la formule des traces s'écrit maintenant

$$\sum_{\mathcal{T}_{\text{st}}^*} \frac{\text{mes}({}_oZT^*(F)\backslash T^*(\mathbf{A}))\iota(F, T^*)}{|\Omega_F(T^*, G^*)|} \sum_{{}_oZ(F)\backslash T^*(F)} \sum_{\kappa} \Phi_{T^*}^{\kappa}(\gamma_*, f). \tag{8.6}$$

Dans cette expression $\mathcal{T}_{\text{st}}^*$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison stable de sous-groupes de Cartan elliptiques de G^*. La somme au milieu ne parcourt que les éléments réguliers de ${}_oZ(F)\backslash T^*(F)$. On consideère ${}_oZ$ et $Z(F)$ somme des sous-groupes de $G^*(\mathbf{A})$ et on a utilisé l'égalité $|\Omega_F(T, G)| = |\Omega_F(T^*, G^*)|$ qui est valable si T^* relève de T.

La somme converge dans l'ordre donné, mais il n'est pas encore démontré qu'elle converge absolument. C'est une question à laquelle nous reviendrons, cependant sans la résoudre. Pour l'instant nous admettons qu'elle converge absolument.

3. Utilisation de l'hypothèse globale

Nous avons attaché dans II.5 à un couple T^*, κ des données endoscopiques et un diagramme D^*. Si $T^* = T_{G^*}$ et si D^* est congruent à un diagramme global alors

$$\Phi^{\kappa}_{T_{G^*}}(\gamma_*, f) = \kappa(\varepsilon(D)) \prod_v \Phi^{\kappa_v}_{T_G(v)}(\gamma(v), f_v) \ .$$

L'hypothèse globale nous permet de réecrire l'expression à droite. Elle est égale à

$$\prod_v \Delta(\gamma, D(v), \Phi_H) \Phi^{\kappa_v}_{T_G(v)}(\gamma(v), f_v) = \prod_v \Phi^{\mathrm{st}}_{T_H}(\gamma, f^H_v) \tag{8.7}$$

si γ dans T_H correspond à γ_* dans T_{G^*}. Si on pose $f^H = 0$ quand D^* n'est pas congruent à un diagramme global on obtient la même égalité en général.

Si on a des connées endoscopiques $(s, {}^LH^0, {}^LB^0_H, {}^LT^0_H, \{\gamma_{\alpha^v}\}, \rho)$ on peut introduire le groupe Λ de g dans $\mathrm{ad}({}^LG^0)$ tel que

$$\begin{aligned} &{}^LH_0 = g({}^LH^0), {}^LB^0_H = g({}^LB^0_H), {}^LT^0_H = g({}^LT^0_H) \\ &Y_{g\alpha^v} = g(Y_{\alpha^v}) \end{aligned}$$

et

$$g(s) = zs \tag{8.8}$$

avec z dans le produit du centre de ${}^LG^0$ avec la composante connexe du centre de ${}^LH$. Il est isomorphe à un sous-groupe du groupe de Weyl absolu et donc fini. Son ordre est un invariant de la classe $\mathfrak{S}$ des données; on le note $\lambda(\mathfrak{S})$.

Nous disons que $\mathfrak{S}$ est elliptique si la composante connexe du centre de ${}^LH$ est contenu dans le centre de ${}^LG^0$, ce qui est évidemment le cas si $\mathfrak{S}$ est défini par (T, κ) avec un T elliptique. Pour des données elliptiques le z qui intervient dans (8.8) est dans le centre de ${}^LG^0$.

Supposons que l'on ait une classe $\mathfrak{S}$ elliptique et un diagramme partiel

$$T_H \xrightarrow{\nu} \mathbf{T}_H \longrightarrow \mathbf{T}_{G^*}$$

ainsi qu'un $\gamma \in T_H(F)$. Il y a alors au moins un diagramme

$$T_H \xrightarrow{\nu} \mathbf{T}_H \longrightarrow \mathbf{T}_{G^*} \xleftarrow{\eta} T_{G^*}$$

dans laquelle la classe stable de T_{G^*} est déterminée par celle de T_H et qui nous donne $\gamma_* \in T_{G^*}(F)$, l'image de γ. Puisque un s qui définit la classe est contenu dans ${}^L T_H^0$ qui s'identifie avec $\mathrm{Hom}(X_*(\mathbf{T}_{G^*}, \mathbf{C}^\times)$, cet s définit, en le transportant à T_{G^*}, un élément κ dans $\mathfrak{K}(T_{G^*}/F)$. En se souvenant que $\mathfrak{S}$ est elliptique on voit que κ est bien défini et ne dépend pas du choix de s.

Nous nous demandons combien de couples (γ_*, κ) on obtient de cette façon, mais en supposant que les γ que l'on obtient sont réguliers dans G^*. Si on a deux diagrammes, définis par η et $\bar{\eta}$, alors $\bar{\eta} = \eta \circ \omega$ avec $\omega \in \Omega_F(T_{G^*}, G^*)$. Donc le nombre de couples est $|\Omega_F(T_{G^*}, G^*)|$.

Si l'on prend pour T_{G^*} un des groupes T^* intervenant dans 8.6 alors, comme nous avons vu dans (8.7) la valeur de $\Phi^\kappa_{T^*}(\gamma_*, f)$ ne dépend pas de couple (γ_*, κ) et est égale à $\Phi^{\mathrm{st}}_{T_H}(\gamma, f^H)$. Pour simplifier ce qui suit nous notons cette valeur commune Φ. La contribution de ces $|\Omega_F(T_{G^*}, G^*)|$ couples à (8.6) est

$$\mathrm{mes}({}_0ZT^*(F)\backslash T^*(\mathbf{A}))\iota(F, T^*)\Phi. \tag{8.9}$$

On observe que

$$\mathrm{mes}({}_0ZT^*(F)\backslash T^*(\mathbf{A})) = \mathrm{mes}({}_0ZT_H(F)\backslash T_H(\mathbf{A})),$$

les gruupes eux-mêmes étant égaux.

Pour obtenir notre approxiamtion à la formule (2.2) il faut remarquer que plus d'une classe stable de sous-groupes de Cartan de H ou plus d'un γ dans $T_H(F)$ peut donner le même ensemble de (γ_*, κ), bien que la classe de données endoscopiques soit déterminée par cet ensemble.

Si $\gamma \in T_H(F)$ et $\bar{\gamma} \in \bar{T}_H(F)$ définissent le même couple alors il y a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
T_H \arrow[rrr] \arrow[dr, "\nu"] & & & T_{G^*} \arrow[dl, "\eta"'] \\
& \mathbb{T}_H \arrow[r] & \mathbb{T}_{G^*} & \\
\bar{T}_H \arrow[rrr] \arrow[ur, "\bar{\nu}"'] \arrow[uu, "\mu"] & & & T_{G^*} \arrow[ul, "\bar{\eta}"] \arrow[uu, "\omega"']
\end{tikzcd} \tag{8.10}$$

Le flèche en haut et la flèche en bas sont définies sur F. Les deux flèches ω et μ sont induites par des automorphismes intérieurs de G^* et H, et en plus ω fixe κ.

Si γ est donné la flèche en haut définit γ_* et l'inverse de celle en bas définit $\bar{\gamma}$, qui est alors l'image de γ_*. Le morphisme ω est donné par un élément du groupe de Weyl absolu. Il n'est pas nécessairement défini sur F, mais en utilisant le diagramme pour identifier T_H et T_{G^*} aussi bien que $\bar{T}_H$ et T_{G^*} on a

$$\omega\sigma(\omega^{-1}) = \omega\sigma_{T_{G^*}}\omega^{-1}\sigma^{-1}_{T_{G^*}} = \mu\sigma_{\bar{T}_H}\mu^{-1}\sigma_{T_H} = \mu\sigma(\mu^{-1}),$$

ce qui implique que $\omega\sigma(\omega^{-1}) \in \Omega(T_H, H)$ pour tout σ dans le groupe de Galois.

Inversement si un ω donné satisfait à cette condition alors selon un théorème bien connu de Steinberg [34] on peut trouver un $\bar{T}_H$ et un μ tel que $\omega\sigma(\omega^{-1}) = \mu\sigma(\mu^{-1})$ pour tout σ, ce qui nous permet de construire un diagramme (8.10).

Le diagramme

$$T_H \xrightarrow{\nu} \mathbf{T}_H \longrightarrow \mathbf{T}_{G^*} \xrightarrow{\eta} T_{G^*}$$

étant donné, soit $\Omega^\kappa(T_{G^*}, G^*)$ l'ensemble des ω dans $\Omega(T_{G^*}, G^*)$ qui fixent κ et sont tels que $\omega\sigma(\omega^{-1})$ est dans $\Omega(T_H, H)$ pour tout σ dans le groupe de Galois. On vient de voir qu'il est possible d'attacher à chaque ω dans $\Omega^\kappa(T_{G^*}, G^*)$ un $\mu = \mu(\omega)$ et un $\bar{T}_H$. Deux éléments ω et ω_1 définissent la même classe stable de sous-groupe de Cartan de H si et seulement si

$$\omega_1\sigma(\omega_1^{-1}) \equiv \zeta\omega\sigma(\omega^{-1})\sigma(\zeta^{-1}), \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$$

avec $\zeta \in \Omega(T_H, H)$. Donc les classes stables qui apparaissent sont paramètrisée par les classes doubles

$$\Omega(T_H, H)\backslash\Omega^*(T_{G^*}, G^*)/\Omega_F^\kappa(T_{G^*}, G^*). \tag{8.11}$$

Nous vons posé

$$\Omega_F^\kappa(T_{G^*}, G^*) = \Omega_F(T_{G^*}, G^*) \cap \Omega^\kappa(T_{G^*}, G^*).$$

Nous vérifions que pour un ensemble donné de (γ_*, κ) la somme

$$\sum \frac{1}{|\Omega_F(\bar{T}_H, H)|}$$

qui est étendue aux classes stables $\bar{T}_H$ et aux $\bar{\gamma} \in \bar{T}_H(F)$ intervenant dans (8.10) est égale à $\lambda(\mathfrak{S})$.

Nous vérifions d'abord que pour un $\bar{T}_H$ donné le nombre de $\bar{\gamma}$ qui interviennent est égale à $|\Omega_F^\kappa(T_{G^*}, G^*)|$. Pour ceci on peut supposer que $\bar{T}_H = T_H$ et que μ est l'identité. Mais alors $\omega \in \Omega_F^\kappa(T_{G^*}, G^*)$.

Donc la somme s'écrit comme une somme sur les classes doubles (8.11) de

$$\frac{|\Omega_F^\kappa(T_{G^*}, G^*)|}{|\Omega_F(\bar{T}_H, H)|} \tag{8.12}$$

L'isomorphisme μ nous permet d'identifier $\Omega(T_H, H)$ et $\Omega(\bar{T}_H, H)$, au moyen de $\alpha \leftrightarrow \mu^{-1}\alpha\mu$. Puisque

$$\sigma(\mu^{-1}\alpha\mu) = \mu^{-1}(\mu\sigma(\mu^{-1}\sigma(\alpha)\sigma(\mu)\mu^{-1})\mu = \mu^{-1}(\omega\sigma(\omega^{-1})\sigma(\alpha)\sigma(\omega)\omega^{-1}),$$

on a

$$\Omega_F(\bar{T}_H, H) = \omega^{-1}\Omega(T_H, H)\omega \cap \Omega_F^\kappa(T_{G^*}, G^*).$$

Par conséquent le quotient (8.12) est le nombre de classes à droite suivant $\Omega_F(T_H, H)$ dans la classe double et la somme est égale à

$$\frac{|\Omega^\kappa(T_{G^*}, G^*)|}{\Omega(T_H, H)}.$$

Nous vérifions enfin que le groupe $\Omega^\kappa(T_{G^*}, G^*)/\Omega(T_H, H)$ est isomorphe à $\Lambda(\mathfrak{S})$. La flèche $T_{G^*} \to \mathbf{T}_{G^*}$ nous permet d'identifier $\Omega(T_{G^*}, G^*)$ et $\Omega({}^LT^0, {}^LG^0)$. Nous pouvons supposer que le s qui définit ${}^LH$ est dans ${}^LT^0$ et que ${}^LT^0_H = {}^LT^0$, ${}^LB^0_H = {}^LB^0$. Alors $\Lambda(\mathfrak{S})$ est isomorphe au sous-groupe des éléments de $\Omega^\kappa(T_{G^*}, G^*)$ qui fixent l'ensemble des racines de ${}^LT^0_H$ positives par rapport à ${}^LB^0_H$. Mais $\Omega^\kappa(T_{G^*}, G^*)$ est le produit semi-direct de ce groupe et $\Omega(T_H, H)$.

Puisque $\Phi^{\mathrm{st}}_{\bar T_H}(\bar\gamma, f^H)$ est égal à Φ pour tous les $\bar T_H$ et $\bar\gamma$ qui interviennent nous déduisons que

$$\sum \frac{\iota(F, T_{G^*})}{\iota(F, T_H)} \frac{1}{\lambda(\mathfrak{S})} \mathrm{mes}({}_0ZT^*(F)\backslash T^*(\mathbf{A}))\iota(F, T_H)\Phi^{\mathrm{st}}_{\bar T_H}(\bar\gamma, f^H)$$

est égal à (8.9).

Pour obtenir le remaniement cherché de la formule des traces il nous faut le lemme suivant

Lemme 8.6: *Supposons que T_H et T_{G^*} et T'_H et T'_{G^*} sont liés par des diagrammes D et D' correspondant à la même classe de données endoscopiques et que T_{G^*} et T'_G sont anisotropes modulo le centre. Alors*

$$\frac{\iota(F, T_{G^*})}{\iota(F, T_H)} = \frac{\iota(F, T'_{G^*})}{\iota(F, T'_H)}.$$

Soit α la valeur commune de ces quotients. Nous posons

$$\iota(G, H) = \iota(\mathfrak{S}) = \frac{\alpha}{\lambda(\mathfrak{S})}.$$

Alors en supposant que la somme (8.6) converge absolument nous déduisons du lemme qu'elle est égale à la somme sur les classes elliptiques de données endoscopiques du produit de $\iota(G, H)$ et de

$$\sum_{\mathcal{T}_{\mathrm{st}}(H)} \sum_{\gamma \in T_H(F)} \frac{\mathrm{mes}({}_0ZT_H)\backslash T_H(\mathbf{A}))\iota(F, T_H)\Phi^{\mathrm{st}}_{T_H}(\gamma, f^H)}{|\Omega_F(T_H, H)|} \tag{8.13}$$

La somme intérieure parcourt des γ dont l'image dans $T_{G^*}(F)$ est régulière.

Si on admet que la trace stable pour le groupe quasi-déployé a pour terme elliptique régulier

$$\sum_{\mathcal{T}_{\mathrm{st}}(G)} \sum_{\gamma \in T_{G^*}(F)}{}' \frac{\mathrm{mes}({}_0ZT_{G^*}(F)\backslash T_{G^*}(\mathbf{A}))\iota(F, T_{G^*})\Phi^{\mathrm{st}}_{T_{G^*}}(\gamma, f^{G^*})}{|\Omega_F(T_{G^*}, G^*)|}$$

alors la somme (8.13) est presque le terme elliptique pour le groupe H et la fonction f^H, et nous avons une forme approximative de la formule (2.2), les termes correctifs n'intervenant pas à notre niveau d'approximation sauf pour les groupes endoscopiques non elliptiques où ils absorbent tout.

4. Vérification du dernier lemme cohomologique

Il s'agit du Lemme 8.6. Sa preuve est assez longue. Shelstad m'a fait remarquer que pour un groupe simplement connexe le nombre $\iota(F, T_{G^*})$ n'est, selon un théorème bien connu d'Ono, que l'inverse du nombre de Tamagawa de T_{G^*}, mais je n'ai pas su utiliser cette observation pour simplifier la démonstration.

Pour la commencer nous nous délestons de toute notation superflue. Nous supposons surtout que G est déjà quasi-déployé, ce qui nous permet de supprimer tout astérisque. Nous posons

$$T = T_G,\ T' = T'_G,\ S = T_H,\ S' = T'_H,$$

et nous nous souvenons que le centre de ${}^LG^0$ est supposé connexe et donc que l'homomoprhisme $G_{\mathrm{sc}} \to G$ est un plongement. Le lemme étant trivial pour $H = G$, nous supposons que la dimension de H est strictement plus petite que celle de G. Le diagramme D nous donne un isomorphisme entre S et T et puisque $X_*(S_{\mathrm{sc}}) \subseteq X_*(T_{\mathrm{sc}})$ nous avons un homomorphisme φ: $S_{\mathrm{sc}} \to T_{\mathrm{sc}}$.

Lemme 8.7: *Soit L une extension galoisienne fini de F qui déploie T. Alors le noyau de*

$$H^1(\mathrm{Gal}(L/F), T_{\mathrm{sc}}(L)) \to H^1(\mathrm{Gal}(L/F), T_{\mathrm{sc}}(\mathbf{A}_L))$$

est contenu dans l'image de

$$H^1(\mathrm{Gal}(L/F), S_{\mathrm{sc}}(L)) \to H^1(\mathrm{Gal}(L/F), T_{\mathrm{sc}}(L)).$$

On ne perd rien dans ce lemme en supposant G simplement connexe. S'il se décompose, alors T_{sc} et S_{sc} se décomposent aussi, de sorte qu'on peut supposer G simple. Enfin en utilisant le lemme de Shapiro on peut supposer qu'il est absolument simple.

Nous posons

$$Y = \mathbf{Q}\, X_*(S_{\mathrm{sc}}) \cap X_*(T_{\mathrm{sc}})$$

et définissons Z et U par l'exactitude des diagrammes

$$0 \to Y \to X_*(T_{\mathrm{sc}}) \to Z \to 0 \tag{8.14}$$

$$0 \to X_*(S_{\mathrm{sc}}) \to Y \to U \to 0. \tag{8.15}$$

Il y a deux actions du groupe de Galois sur ces modules. L'une qui apparaît dans l'énoncé du lemmes et dans ces diagrammes est celle définie par l'action naturelle sur $X_*(T)$. On la dénotera $\mu \to \sigma\mu$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. Pour obtenir l'autre, notée $\mu \to \bar{\sigma}\mu$, on choisit un ensemble de racines simples de ${}^LT^0$ dans ${}^LH^0$ comme dans [18] (p.708) et on écrit $\sigma = \omega(\sigma)\bar{\sigma}$ où $\omega(\sigma)$ dans le groupe de Weyl de ${}^LT^0$ relatif à ${}^LH^0$ est choisi en sorte que $\overline{\sigma}$ fixe cet ensemble de racines simples. Si on travaille modulo $X_*(S_{\mathrm{sc}})$ les deux actions sont identiques.

Nous vérifions ensuite que

$$H^1(\mathrm{Gal}(L/F), L^\times \otimes Z) \to H^1(\mathrm{Gal}(L/F), I_L \otimes Z)$$

est injectif. Le groupe I_L est le groupe de classes d'idèles de L.

Puisque le groupe T est anisotrope le caractère κ est d'ordre fini et nous pouvons attacher un graphe à (T,κ) comme dans [18], (pages 708–709). Si ce graphe était ordinaire et pas complété alors ${}^LH^0$ serait un facteur de Levi d'un sous-groupe parabolique P de ${}^LG^0$ où l'ensemble de racines de ${}^LT^0$ relatif à P serait invariant sous l'action (avec ou sans barre) du groupe de Galois. La somme de ces racines, qui n'est pas zéro, serait invariante sous le groupe de Galois, ce qui contredit l'hypothèse que $T_{\rm sc}$ est anisotrope.

Donc nous avons à considérer un graphe complété. L'action avec barre du groupe de Galois permute les racines du graphe qui ne sont pas des racines de ${}^LH^0$, et le $\mathbf{Z}$-module libre V sur ces racines est donc aussi un module galoisien. Il y a un homomorphisme naturel $V\to Z$. Nous vérifions que le noyau est le module galoisien trivial $\mathbf{Z}$ de sorte que l'on a une suite exacte de modules galoisiens:

$$0\to\mathbf{Z}\to V\to Z\to 0. \tag{8.16}$$

En effet, puisque le graphe est complété l'ensemble de sommets est la réunion d'une base $\alpha_1^\vee,\dots,\alpha_\ell^\vee$ et l'opposé $\alpha^\vee$ de la plus grande racine. La relation définissant Z s'obtient en enlevant les racines de ${}^LH^0$ de la relation

$$\alpha^\vee+\sum_{i=1}^{\ell}a_i\alpha_i^\vee=0.$$

On se souvient que les a_i sont des entiers positifs. Si $\alpha^\vee$ n'est pas une racine de ${}^LH^0$ cette relation est alors

$$\alpha^\vee+\sum_{i=k+1}^{\ell}a_i'\alpha_i^\vee=0,$$

où $a_i=aa_i'$, a étant le plus grand diviseur commun des a_i, $k+1\le i\le\ell$. Puisque l'action du groupe de Galois permute les sommets du graphe, il est maintenant évident que le noyau de $V\to Z$ est le module galoisien trivial $\mathbf{Z}$.

La suite exacte (8.16) nous donne un diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(\mathrm{Gal}(L/F),L^\times\otimes V) & \to & H^1(\mathrm{Gal}(L/F),L^\times\otimes Z) & \to & H^2(\mathrm{Gal}(L/F),L^\times)\\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow\\
H^1(\mathrm{Gal}(L/F),I_L\otimes V) & \to & H^1(\mathrm{Gal}(L/F),I_L\otimes Z) & \to & H^2(\mathrm{Gal}(L/F),I_L)
\end{array}$$

Le théorème 90 de Hilbert implique que les deux groupes à gauche sont zéro, et la théorie du corps de classe que la flèche à droite est injective. Il en résulte que la flèche au centre est aussi injective.

Le suites (8.14) et (8.15) nous donnent deux diagrammes commutatifs, les lignes du premier étant exactes:

$$\begin{tikzcd}
H^1(\mathrm{Gal}(L/F),L^\times\otimes Y) \arrow[r] \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "\lambda"] & H^1(\mathrm{Gal}(L/F),T_{\rm sc}(L)) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\mathrm{Gal}(L/F),L^\times\otimes Z) \arrow[d, hook] \\
H^1(\mathrm{Gal}(L/F),I_L\otimes Y) \arrow[r] & H^1(\mathrm{Gal}(L/F),T_{\rm sc}(\mathbf{A}_L)) \arrow[r] & H^1(\mathrm{Gal}(L/F),I_L\otimes Z)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathrm{Gal}(L/F), S_{\mathrm{sc}}(L)) & \xrightarrow{\varphi} & H^1(\mathrm{Gal}(L/F), L^\times \otimes Y) \\ \zeta\big\downarrow & \searrow^{\chi} & \big\downarrow\eta \\ H^1(\mathrm{Gal}(L/F), S_{\mathrm{sc}}(\mathbf{A}_L)) & \xrightarrow[\psi]{} & H^1(\mathrm{Gal}(L/F), I_L \otimes Y) \end{array}$$

Pour vérifier le lemme 8.7 il suffit, vu l'injectivité de la flèche à gauche dans le premier diagramme, d'établir que le noyau de λ est contenu dans l'image de φ. Donc que $\mathrm{Ker}\,\lambda \subseteq \mathrm{Im}\,\varphi$. Pour commencer nous montrons que

$$\mathrm{Ker}\,\nu \subseteq \mathrm{Im}\,\psi. \tag{8.17}$$

On se souvient que

$$H^1(\mathrm{Gal}(L/F), I_L \otimes Y) \simeq \otimes_v H^{-1}(\mathrm{Gal}(L_v, F_v), Y);$$

la somme parcourt les places de F et L_v est la complétion de L par rapport à une place de L au-dessus de v. L'élément $\oplus\lambda_v$, presque tous les λ_v étant zéro, est contenu dans le noyau de ν, ou plutôt représente un élément de ce noyau, si et seulement si pour chaque v

$$\lambda_v = \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L_v/F_v)} \sigma\mu_v(\sigma) - \mu_v(\sigma) \tag{8.18}$$

avec $\mu_v(\sigma) \in X_*(T_{\mathrm{sc}})$.

Nous exploitons encore le graphe de (T, κ). Si $\alpha^\vee$ n'est pas une racine de ${}^LH^0$ alors $X_*(S_{\mathrm{sc}}) = Y$ et il n'y a rien à vérifier. Sinon la seule relation entre $\alpha^\vee_{k+1}, \ldots, \alpha^\vee_\ell$ modulo Y est

$$\sum_{i=k+1}^{\ell} a'_i\alpha_i^\vee = 0.$$

Il est important de remarquer que les a'_i sont positifs, parce que nous allons utiliser ce fait pour vérifier que s'il y a une famille $\mu(\sigma)$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)$, avec $\mu(\sigma) \in X_*(T_{\mathrm{sc}})$ et telle que la somme

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/F)} \mu\sigma(\sigma) - \mu(\sigma) \in Y,$$

alors elle est déjà contenue dans $X_*(S_{\mathrm{sc}})$. Il en résulte que tous les λ_v de (8.18) sont dans $X_*(S_{\mathrm{sc}})$, ce qui implique (8.17).

En effet chaque μ dans $X_*(T_{\mathrm{sc}})$ s'écrit comme

$$\sum_{i=1}^{\ell} b_i\alpha_i^\vee$$

avec des entiers b_i. Par conséquent

$$\sigma\mu - \mu \equiv \bar\sigma\mu - \mu \equiv \sum_{i=k+1}^{\ell} b_i(\bar\sigma\alpha_i^\vee - \alpha_i^\vee) \equiv \sum_{i=k+1}^{\ell} c_i\alpha_i^\vee \pmod{X_*(S_{\mathrm{sc}})}$$

avec

$$\sum_{i=k+1}^{\ell} c_i = 0.$$

Plus généralement

$$\sum \sigma\mu(\sigma) - \mu(\sigma) \equiv \sum_{i=k+1}^{\ell} c_i \alpha_i^\vee \pmod{X_*(S_{\mathrm{sc}})}$$

avec $\sum c_i = 0$. Mais si l'expression à gauche et donc celle à droite est dans Y on a $c_i = ca'_i$ et

$$0 = c \sum a'_i,$$

ce qui implique que $c = 0$.

Le fait que nous venons de vérifier peut s'énoncer comme un lemme.

Lemme 8.8: *Les flèches*

$$H^{-2}(\mathrm{Gal}(L/F), X_*(S_{\mathrm{sc}})\backslash X_*(T_{\mathrm{sc}})) \to H^{-2}(\mathrm{Gal}(L/F), Z)$$
$$H^{-2}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), X_*(S_{\mathrm{sc}})\backslash X_*(T_{\mathrm{sc}})) \to H^{-2}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), Z)$$

sont surjectives.

Nous montrons ensuite que

$$\mathrm{Im}\,\psi \cap \mathrm{Im}\,\eta \subseteq \mathrm{Im}\,\chi;$$

l'inclusion opposé est évidente. D'abord, un petit lemme.

Lemme 8.9: *L'action du groupe de Galois sur U est triviale.*

Les deux actions sont les mêmes et nous considérons celle à barre. Nous pouvons supposer que $\alpha^\vee$ est une racine dans ${}^L H^0$, sinon $U = 0$. L'action permute les racines $\alpha^\vee, \alpha_1^\vee, \dots, \alpha_\ell^\vee$ et les racines $\alpha_{k+1}^\vee, \dots, \alpha_\ell^\vee$ et fixe la relation

$$\alpha^\vee + \sum_{i=1}^{\ell} a_i \alpha_i^\vee = 0.$$

Par conséquent elle fixe les éléments

$$\sum_{i=k+1}^{\ell} a_k \alpha_k^\vee$$

et

$$\sum_{i=k+1}^{\ell} a'_k \alpha_k^\vee.$$

Puisque cet élèment engendre Y modulo $X_*(S_{\mathrm{sc}})$ le lemme est vérifié.

Un élément dans l'image de ψ s'écrit

$$\oplus\lambda_v, \lambda_v \in X_*(S_{\mathrm{sc}}).$$

S'il est aussi dans l'image de η il satisfait à l'équation

$$\sum \lambda_v = \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/F)} \sigma\mu(\sigma) - \mu(\sigma),$$

$\mu(\sigma) \in Y$.

Choisissons pour chaque $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)$ une place $v(\sigma)$ et un $\tau(\sigma)$ dans $\mathrm{Gal}(L_{v(\sigma)}/F_{v(\sigma)})$ en sorte que σ et $\tau(\sigma)$ sont conjugués

$$\sigma = \rho^{-1}(\sigma)\tau(\sigma)\rho(\sigma), \quad \rho(\sigma) \in \mathrm{Gal}(L/F).$$

Soit

$$\nu(\sigma) = \tau(\sigma)\rho(\sigma)\mu(\sigma) - \rho(\sigma)\mu(\sigma)$$

de sorte que

$$\sigma\mu(\sigma) - \mu(\sigma) = \nu(\sigma) + \rho^{-1}(\sigma)\nu(\sigma) - \nu(\sigma).$$

D'après le lemme on a $\nu(\sigma) \in X_*(S_{\mathrm{sc}})$.

Nous pouvons remplacer λ_v par

$$\lambda'_v = \lambda_v - \sum_{v=v(\sigma)} \nu(\sigma)$$

sans changer la classe dans $H^1(\mathrm{Gal}(L/F), I_L \otimes Y)$ attachée à $\oplus\lambda_v$. Puisque

$$\sum \lambda'_v = \sum \lambda_v - \sum_{\sigma} \nu(\sigma) = \sum \rho^{-1}(\sigma)\nu(\sigma) - \nu(\sigma)$$

et $\nu(\sigma) \in X_*(S_{\mathrm{sc}})$ cette classe est l'image d'un élément de $H^1(\mathrm{Gal}(L/F), S_{\mathrm{sc}}(L))$.

Si α est un élément de $H^1(\mathrm{Gal}(L/F), L^\times \otimes Y)$ et si $\lambda(\alpha) = 0$ alors $\eta(\alpha)$ est contenu dans le noyau de ν et donc dans l'image de ψ. Choisissons β de sorte que $\eta(\alpha) = \chi(\beta)$ et posons $\alpha' = \alpha - \varphi(\beta)$. Alors $\eta(\alpha') = 0$. Donc pour vérifier le lemme 8.7 il suffit de vérifier que $\mathrm{Ker}\,\eta \subseteq \mathrm{Im}\,\varphi$.

Soit η_v l'homomorphisme naturel

$$H^1(\mathrm{Gal}(L/F), L^\times \otimes Y) \to H^1(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), L_v^\times \otimes Y).$$

Il faut vérifier que si $\eta_v(\alpha) = 0$ pour tout v alors α est dans l'image de φ. Puisque il s'agit de cohomologie de degré 1 nous pouvons remplacer L par $\bar{F}$.

$$0 \to W \to \bar{F}^\times \otimes X_*(S_{\mathrm{sc}}) \to \bar{F}^\times \otimes Y \to 0$$

avec

$$W = \mathrm{Ext}(U, \bar{F}^\times).$$

Mais U étant donné par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{a} \mathbf{Z} \longrightarrow U \longrightarrow 0, \tag{8.19}$$

le groupe W est le groupe des racines a-ièmes l'unité.

Nous considérons les diagrammes commutatifs:

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), S_{\mathrm{sc}}(\bar{F})) & \xrightarrow{\varphi} & H^1(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \bar{F}^\times \otimes Y) & \longrightarrow & H^2(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), W) \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow \Theta_v \\ & & H^1(\mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F), \bar{F}_v^\times \otimes Y) & \longrightarrow & H^2(\mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v), W) \end{array}$$

Si α s'envoie sur β dans $H^2(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), W)$ alors $\theta_v(\beta) = 0$ pour tout v et la théorie du corps de classe implique que $\beta = 0$ de sorte que α est contenu dans l'image de φ.

La preuve du lemme 8.7 étant terminée la notation qui y était utilisée est libérée pour l'énoncé d'un autre lemme.

Lemme 8.10: *Soit L une extension galoisienne finie de F que déploie T et soit C_L le groupe des classes d'idèles de L. Considérons le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathrm{Gal}(L/F), S_{\mathrm{sc}}(A_L)) & \xrightarrow{\varphi} & H^1(\mathrm{Gal}(L/F), T_{\mathrm{sc}}(A_L)) \\ \big\downarrow \eta & & \\ H^1(\mathrm{Gal}(L/F), C_L \otimes X_*(S_{\mathrm{sc}})) & \xrightarrow[\psi]{} & H^1(\mathrm{Gal}(L/F), C_L \otimes X_*(T_{\mathrm{sc}})) \end{array} \tag{8.20}$$

L'image sous η du noyau de φ est le noyau de ψ.

Il suffit encore de vérifier le lemme pour un groupe absolument irréductible. Nous définissons M par la suite exacte:

$$0 \to X_*(S_{\mathrm{sc}}) \to X_*(T_{\mathrm{sc}}) \to M \to 0.$$

On a le diagramme commutatif (8.21) suivant dans lequel les flèches verticales sont obtenues d'une co-restriction suivie d'une sommation.

$$\begin{array}{ccccc} \oplus H^{-2}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), M) & \to & \oplus H^{-1}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), X_*(S_{\mathrm{sc}})) & \to & \oplus H^{-1}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), X_*(T_{\mathrm{sc}})) \\ \zeta \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ H^{-2}(\mathrm{Gal}(L/F), M) & \to & H^{-1}(\mathrm{Gal}(L/F), X_*(S_{\mathrm{sc}})) & \to & H^{-1}(\mathrm{Gal}(L/F), X_*(T_{\mathrm{sc}})) \end{array}$$

Il a été remarqué à la fin de l'appendice à [19] que les théorèmes de Tate-Nakayama nous permettent d'identifier le carré (8.20) avec le carré à droite de (8.21). Donc pour vérifier le lemme il suffit de montrer que ζ est surjectif.

Les modules Z et U définis par (8.14) et (8.15) font partie d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow M \longrightarrow Z \longrightarrow 0.$$

Nous utilisons la suite exacte (8.16) pour montrer d'abord que

$$\oplus H^{-2}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), Z) \to H^{-2}(\mathrm{Gal}(L/F), Z)$$

est surjectif.

Puisque la cohomologie de Z en degré -1 est triviale on a un diagramme à lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccc} \oplus H^{-1}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), V) & \longrightarrow & \oplus H^{-2}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), Z) & \longrightarrow & 0 \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\ H^{-2}(\mathrm{Gal}(L/F), V) & \longrightarrow & H^{-2}(\mathrm{Gal}(L/F), Z) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La surjectivité de la flèche verticale à droite résulte de celle de la flèche à gauche.

Puisque le groupe de Galois agit sur V en permutant les éléments de la base le lemme de Shapiro nous permet de ramener la preuve de cette surjectivité à celle de

$$\oplus H^{-2}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), \mathbf{Z}) \longrightarrow H^{-2}(\mathrm{Gal}(L/F), \mathbf{Z}),$$

où F est un corps de nombres arbitraires. Puisque H^{-1} à coefficients dans **Z** est le groupe de Galois rendu abélien, c'est une conséquence du théorème de Tchebotareff.

Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \oplus H^{-2}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), U) & \to & \oplus H^{-2}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), M) & \to & \oplus H^{-2}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), Z) \\ \big\downarrow \zeta & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ H^{-2}(\mathrm{Gal}(L/F), U) & \to & H^{-2}(\mathrm{Gal}(L/F), M) & \to & H^{-2}(\mathrm{Gal}(L/F), Z) \end{array} \tag{8.22}$$

Selon le lemme 8.8 les flèches horizontales à droite sont surjectives. Puisque la flèche verticale à droite est surjective la surjectivité de ζ résultera de la surjectivité de la flèche à gauche.

La présentation (8.19) nous donne un diagramme à lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccc} \oplus H^{-2}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), \mathbf{Z}) & \longrightarrow & \oplus H^{-2}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), U) & \longrightarrow & 0 \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\ H^{-2}(\mathrm{Gal}(L/F), \mathbf{Z}) & \longrightarrow & H^{-2}(\mathrm{Gal}(L/F), U) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Mais la surjectivité de la flèche verticales à droite résulte de celle de la flèche à gauche, et celle-ci est, comme nous avons déjà vu, une conséquence du théorème de Tchebotareff.

Nous revenons maintenant au lemme 8.6. Il faut vérifier que

$$\frac{\iota(F,T)}{\iota(F,S)} = \frac{\iota(F,T')}{\iota(F,S')}.$$

Nous introduisons deux modules galoisiens N et $X_*(D)$ par les suites exactes:

$$0 \to X_*(S_{\mathrm{sc}}) \to X_*(T) \to N \to 0$$
$$0 \to X_*(T_{\mathrm{sc}}) \to X_*(T) \to X_*(D) \to 0.$$

Le groupe D est le quotient de T par T_{sc}.

Soit L une extensison galoisienne finie de F qui déploie T. Le groupe $H^{-2}(Gal(L/F), X_*(D))$ est fini. Soit ρ l'homomorphisme naturel

$$\oplus H^{-2}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), X_*(D)) \longrightarrow H^{-2}(\mathrm{Gal}(L/F), X_*(D)).$$

Alors

$$\oplus H^{-2}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), X_*(D))/\mathrm{Ker}\,\rho$$

est fini. Soit π l'homomorphisme

$$\oplus H^{-1}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), M) \longrightarrow \oplus H^{-1}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), N).$$

La suite exacte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow X_*(D) \longrightarrow 0$$

nous donne une surjection

$$\beta\colon \oplus H^{-2}(\mathrm{Gal}(L_v/F_v), X_*(D)) \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\pi$$

et

$$\mathrm{Ker}\,\pi/\beta(\mathrm{Ker}\,\rho)$$

est fini.

Puisque M, N et $X_*(D)$ ne change pas si S et T sont remplacés par S' et T' il suffit d'établir la formule suivante.

Lemme 8.11:

$$\frac{\iota(F,T)}{\iota(F,S)} = |H^{-1}(\mathrm{Gal}(L/F), M)|\ |\mathrm{Ker}\,\pi/\beta(\mathrm{Ker}\,\rho)$$

Pour la preuve nous utilisons le diagramme (8.23) à la fin du chapitre et les notations qui y apparaissent.

Le quotient

$$\frac{\iota_1(F,T)}{\iota_1(F,S)}$$

est, par sa définition même, égal à

$$|\mathrm{Im}\,\varepsilon \cap \ker\,\xi / \mathrm{Im}\,\chi \cap \mathrm{Ker}\,\xi|.$$

Puisque $\mathrm{Ker}\,\zeta \subseteq \mathrm{Im}\,\nu$ cet ordre est celui de

$$(\mathrm{Im}\,\zeta \cap \mathrm{Ker}\,\theta)/(\zeta(\mathrm{Ker}\,\varepsilon) + (\mathrm{Im}\,\zeta\nu \cap \mathrm{Ker}\,\theta)).$$

Le groupe

$$J(T) = \mathrm{Im}\,\zeta \cap \mathrm{Ker}\,\theta$$

est un quotient du module des $\oplus\lambda_v$, où les λ_v sont contenus dans $X_*(T_{\mathrm{sc}})$, presque tous égaux à 0, et satisfont aux conditions:

$$\sum_v \lambda_v = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)} \sigma^{-1}\mu(\sigma) - \mu(\sigma),\ \ \mu(\sigma) \in X_*(T_{\mathrm{sc}}), \tag{8.24}$$

$$\lambda_v = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_v/F_v)} \sigma^{-1}\mu_v(\sigma) - \mu_v(\sigma),\ \ \mu_v(\sigma) \in X_*(T). \tag{8.25}$$

On divise par le groupe des $\oplus\lambda_v$ pour lesquels on peut trouver des $\mu_v(\sigma)$ dans $X_*(T_{\mathrm{sc}})$ qui satisfont à (8.25).

Un élément de $J(T)$ est contenu dans le sous-groupe

$$J'(T) = \mathrm{Im}\,\zeta\nu \cap \mathrm{Ker}\,\Theta$$

si'il existe un représentant $\oplus\lambda_v$ tel que les $\mu(\sigma)$ qui figurent dans (8.24) peuvent être choisis dans $X_*(S_{\mathrm{sc}})$. Les λ_v eux-même sont alors forcément dans $X_*(S_{\mathrm{sc}})$.

Le groupe $\zeta(\mathrm{Ker}\,\varepsilon)$ est l'image de $\zeta\lambda$ ou de $\mu\kappa$. L'image de κ est le noyau de

$$H^0(\mathrm{Gal}(L/F), D(\mathbf{A}_L)) \to H^0(\mathrm{Gal}(L/F), C_L \otimes X_*(D)).$$

Le théorème de Tate-Nakayama et l'observation à la fin de [19] nous permettent de représenter ce noyau comme quotient du module des $\oplus\mu_v$, où μ_v est une fonction sur $\mathrm{Gal}(L_v/F_v)$ à valeurs dans $X_*(T)$ qui est zéro pour presque tout v et qui satisfait à

$$\lambda_v = \sum_{\mathrm{Gal}(L_v/F_v)} \sigma^{-1}\mu_v(\sigma) - \mu_v(\sigma) \in X_*(T_{\mathrm{sc}}) \tag{8.26}$$

$$\sum_{\{v|\sigma \in \mathrm{Gal}(L_v/F_v)\}} \mu_v(\sigma) \equiv \sum_{\tau \in \mathrm{Gal}(L/F)} \tau^{-1}b(\tau,\sigma) - b(\tau^{-1},\sigma) + b(\sigma,\tau) \pmod{X_*(T_{\mathrm{sc}})} \tag{8.27}$$

Ici $b(\rho,\sigma)$ est une fonction sur $\mathrm{Gal}(L/F) \times \mathrm{Gal}(L/F)$ à valeurs dans $X_*(T)$. On divise par les $\oplus\mu_v$ qui sont des bords locaux:

$$\mu_v(\sigma) \equiv \sum_{\tau \in \mathrm{Gal}(L_v/F_v)} \tau^{-1}b_v(\tau,\sigma) - b_v(\tau^{-1},\tau\sigma) + b_v(\sigma,\tau) \pmod{X_*(T_{\mathrm{sc}})}.$$

L'homomorphisme μ de (8.23) envoie $\oplus\mu_v$ sur $\oplus\lambda_v$, où λ_v est donné par (8.26).

Nous posons

$$I(T) = \omega(\operatorname{Ker}\Theta)$$

et nous définissons $K(T)$ de la même façon que nous avons défini $J(T)$ sauf que nous omettons la condition (8.24). Alors

$$I(T) \simeq K(T)/J(T)$$

et

$$|J(T)/(\operatorname{Im}\zeta\lambda + J'(T))| = \frac{|K(T)/(\operatorname{Im}\zeta\lambda + J'(T))|}{|I(T)|}.$$

Nous définissons $J(S)$ et $K(S)$ de la même façon que nous avons défini $J(T)$ et $k(T)$ mais en remplaçant $X_*(T_{\mathrm{sc}})$ par $X_*(S_{\mathrm{sc}})$. Soit par ailleurs $K'(T)$ le groupe des éléments dans $K(T)$ admettant un représentant $\oplus\lambda_v$ où λ_v est dans $X_*(S_{\mathrm{sc}})$. Les groupes $J(S)$ et $K(S)$ sont des sous-groupes de $H^1(\operatorname{Gal}(L/F), S_{\mathrm{sc}}(A_L))$ et φ envoie $J(S)$ sur $J'(T)$ et $K(S)$ sur $K'(T)$.

L'ordre

$$|K(T)/\operatorname{Im}\zeta\lambda + J'(T)|$$

est égal au produit

$$|K(T)/\operatorname{Im}\zeta\lambda + K'(T)| \quad |\operatorname{Im}\zeta\lambda + K'(T)/\operatorname{Im}\zeta\lambda + J'(T)|. \tag{8.28}$$

En utilisant le théorème de Tate-Nakayama on obtient au moyen de l'homomorphisme $\oplus\mu_v \to \oplus\lambda_v$ défini par (8.25) un isomorphisme

$$K(T) \simeq \oplus_v H^{-2}(\operatorname{Gal}(L_v/F_v), X_*(D))/H^{-2}(\operatorname{Gal}(L_v/F_v), X_*(T))$$

ainsi au'unisomoprhisme

$$K'(T) \simeq \oplus_v H^{-2}(\operatorname{Gal}(L_v/F_v), N)/H^{-2}(\operatorname{Gal}(L_v/F_v), X_*(T)).$$

Donc le quotient $K(T)/K'(T)$ est isomorphe au noyau de π et

$$K(T)/(\operatorname{Im}\zeta\lambda + K'(T)) \simeq \operatorname{Ker}\pi/\beta(\operatorname{Ker}\rho),$$

car la condition (8.27) exprime que l'élément μ_v est dans le noyau de ρ.

Soit φ_0 la restriction de φ à $K(S)$. alors le deuxième facteur de (8.28) est égal à

$$|(K(S) + \varphi_0^{-1}(\operatorname{Im}\zeta\eta))/(J(S) + \varphi_0^{-1}(\operatorname{Im}\zeta\lambda))|$$

ou plutôt à

$$|K(S)/(J(S)+\varphi_0^{-1}(\mathrm{Im}\,\zeta\lambda))|$$

qui est un quotient

$$\frac{|K(S)/J(S)|}{|(J(S)+\varphi_0^{-1}(\mathrm{Im}\,\zeta\lambda))/J(S)|}$$

Nous posons

$$I(S)=K(S)/J(S).$$

C'est un groupe fini.

Le groupe

$$(J(S)+\varphi_0^{-1}(\mathrm{Im}\,\zeta\lambda))/J(S)$$

est isomorphe à

$$\eta(\varphi_0^{-1}(\zeta(\mathrm{Ker}\,\varepsilon))).$$

Ce groupe contient $\eta(\mathrm{Ker}\,\varphi)$ et est contenu dans $\mathrm{Ker}\,\psi$. Mais selon le lemme 8.10 ces deux groupes sont égaux. Donc

$$\frac{\iota_1(F,T)}{\iota_1(F,S)}=\frac{|I(S)|}{|I(T)|}\frac{|\mathrm{Ker}\,\pi/\beta(\mathrm{Ker}\,\rho)|}{|\mathrm{Ker}\,\psi|}$$

D'autre côté selon les définitions même

$$\iota_2(F,T)=\frac{|H^{-1}(\mathrm{Gal}(L/F),X_*(T_{\mathrm{sc}})|}{|I(T)|}$$
$$\iota_2(F,S)=\frac{|H^{-1}(\mathrm{Gal}(L/F),X_*(S_{\mathrm{sc}})|}{|I(S)|}.$$

Donc

$$\frac{\iota(F,T)}{\iota(F,S)}=|\mathrm{Ker}\,\pi/\beta(\mathrm{Ker}\,\rho)|\quad|H^{-1}(\mathrm{Gal}(L/F),X_*(T_{\mathrm{sc}})/\mathrm{Im}\,\psi|^{-1}.$$

Puisque

$$H^0(\mathrm{Gal}(L/F),X_*(T_{\mathrm{sc}}))=0$$

on a

$$H^{-1}(\mathrm{Gal}(L/F),X_*(T_{\mathrm{sc}}))/\mathrm{Im}\,\psi\simeq H^{-1}(\mathrm{Gal}(L/F),M)$$

et le lemme 8.11 est vérifié.

5. Le problème de convergence

Dans notre remaniement de la formule des traces nous avons supposé que (8.6) ou, ce qui est équivalent, (8.13) converge absolument. Mais nous n'avons pas pu le vérifier. En effet la preuve de convergence semble dépendre d'une propriété des fonctions f^H, dont l'existence même reste problématique.

Le groupe G est non ramifié en v s'il est quasi-déployé sur F_v et déployé sur une extension non ramifiée de F_v. On dit que des données endoscopiques sont non ramifiées en v si le groupe G est non ramifié en v et si la restriction de ρ au groupe de décomposition est également non ramifiée.

L'hypothèse dont nous avons besoin pour vérifier la convergence est la suivante:

Supposons que G soit non ramifié en v mais que les données endoscopiques dans la classe $\mathfrak{K}$ soient ramifiées en v. Supposons de plus que la fonction f est dans l'algèbre de Hecke de $G(F_v)$ relative à un sous-groupe compact hyperspécial. Alors on peut prendre $f^H = 0$, c'est-à-dire, pour tout couple (T, κ) attaché à $\mathfrak{K}$ on a

$$\Phi_T^\kappa(\gamma, f) \equiv 0.$$

La convergence est une conséquence de cette hypothèse et du lemme simple suivant.

Lemme 8.12: *Soit V un ensemble fini de places de F contenant toutes les places archimédiennes. Alors le nombre de classes de données endoscopiques non ramifiées en dehors de V est fini.*

Chaque classe contient un représentant pour lequel ${}^LT_H^0 = {}^LT^0$. Si ${}^LT_H^0$ est ainsi fixé il n'y a qu'un nombre fini de possibilitiés pour ${}^LH^0$ et ${}^LB_H^0$. Nous fixons ${}^LH^0$, ${}^LB_H^0$, et ${}^LT_H^0$. Puisque nous ne considérons que les classes de données nous pouvons fixer l'ensemble $\{Y_{\alpha^\vee}\}$ aussi. Si tout cela est fixé il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour l'image $\rho(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F))$, et cette image étant donnée il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour s modulo le produit du centre ${}^LG^0$ et la composante connexe du centre de ${}^LH$.

Donc le lemme résulte du lemme bien connu suivant.

Lemme 8.13: *Soit $\mathfrak{G}$ un groupe fini donné et V en ensemble fini de places de F contenant toutes les places archimédiennes. Alors il n'y a qu'un nombre fini d'homomorphismes de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ sur $\mathfrak{G}$ qui sont non ramifiés en dehors de V.*

Ce lemme est une conséquence du fait qu'il n'y a qu'un nombre fini d'extensions à discriminant donné et de la théorie locale du corps de classe.

Nous revenons au problème de la convergence absolue. L'hypothèse et le lemme 8.12 le ramènent au problème de la convergence absolue de (8.13). Par induction nous pouvons supposer que (8.13) converge absolument si $H \neq G^*$.

En vérifiant la convergence pour $H = G^*$ nous pouvons supposer que $G = G^*$ et que $f = f^{G^*}$. Si f' est positif et si $f'(g) \geq |f(g)|$ pour tout g alors

$$\Phi_T^1(\gamma, f') \geq |\Phi_{T^*}^1(\gamma, f)|.$$

Donc en remplaçant au besoin f par f' nous pouvons supposer que f est positif.

Ces changements faits la somme (8.13) avec $H = G^*$ converge absolument si et seulement si elle est finie. Supposons qu'elle soit infinie. Alors en prenant les contributions des autres classes endoscopiques, en les sommant toutes, et en poursuivant notre remaniement dans le sens inverse nous parvenons à une somme qui diverge. Mais c'est le terme elliptique régulier de la formule des traces et par conséquent une somme convergente. Cette contradiction montre que la somme (8.13) est finie aussi pour $H = G^*$.

(8.23)

$$
\begin{tikzcd}
 & H^1(\mathrm{Gal}(L/F), S_{\mathrm{sc}}(L)) \arrow[dd] \arrow[dr, "\nu"] \arrow[drr, "\chi"] & & \\
H^0(\mathrm{Gal}(L/F), D(L)) \arrow[rr, crossing over, "\lambda"'] \arrow[dd, "\kappa"] & & H^1(\mathrm{Gal}(L/F), T_{\mathrm{sc}}(L)) \arrow[r, "\varepsilon"'] \arrow[dd, "\zeta"] & H^1(\mathrm{Gal}(L/F), T(L)) \arrow[dd, "\xi"] \\
 & H^1(\mathrm{Gal}(L/F), S_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A}_L)) \arrow[dd, "\eta"] & & \\
H^0(\mathrm{Gal}(L/F), D(A_L)) \arrow[rr, crossing over, "\mu"'] & & H^1(\mathrm{Gal}(L/F), T_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A}_L)) \arrow[r, "\theta"'] \arrow[dd, "\omega"] & H^1(\mathrm{Gal}(L/F), T(\mathbb{A}_L)) \\
 & H^1(\mathrm{Gal}(L/F), C_L \otimes X_*(S_{\mathrm{sc}})) \arrow[dr, "\psi"] & & \\
 & & H^1(\mathrm{Gal}(L/F), C_L \otimes X_*(T_{\mathrm{sc}})) &
\end{tikzcd}
$$

Bibliographie

1. E. Artin et J. Tate: *Class field theory* (Harvard, 1967).
2. I. N. Bernstein et A. V. Zelevinski: *Représentations induites du groupe* $\mathrm{GL}(n)$ *sur un corps* $\mathfrak{p}$*-adique*, Funkt. Anal. i Pril., t. 10, (1976).
3. A. Borel et W. Casselman, *Proc. of AMS Summer Institute on L-functions and automorphic representations* (1979).
4. A. Borel: *Automorphic L-functions*, dans [3].
5. S. Gelbart et A. Knapp: *Irreducible constituents of principle series of* $\mathrm{SL}_n(k)$, Duke Math. Jour. vol. 48, n°2, 313–326 (1981).
6. S. Gelbart et A. Knapp: *L-indistinguishability and R groups for the special linear group*, à paraître dans Advances in Math.
7. H. Jacquet et R. P. Langlands: *Automorphic forms on* $\mathrm{GL}(2)$, SLN 114 (1970).
8. H. Jacquet et J. Shalika: *On Euler products and the classification of automorphic representations*, I, II, Amer. Jour. of Math. t. 103 (1981).
9. C. D. Keys: *On the decomposition of reducible principal series representations of p-adic Chevalley groups*, Thesis, Univ. of Chicago (1979).
10. A. Knapp et G. Zuckerman: *Multiplicity one fails for* $\mathfrak{p}$*-adic unitary principal series*, Hiroshima Math. Jour. t. 10 (1980).
11. R. Kottwitz: *Unstable orbital integrals on* $\mathrm{SL}(3)$, Duke Math. Jour., à paraître.
12. S. Kudla: *On certain Euler products for* $\mathrm{SU}(2,1)$, Comp. Math., t. 42 (1981).
13. J.-P. Labesse et R. P. Langlands: *L-indistinguishability for* $\mathrm{SL}(2)$, Jour. Canad. de Math., t. 31 (1979).
14. S. Lang: *Galois cohomology of abelian varieties over p-adic fields*, notes polycopiées (1959).
15. R. P. Langlands: *On the classification of representations of real algebraic groups*, Notes IAS (1973).
16. R. P. Langlands: *On the notion of an automorphic representations*, dans [3].
17. R. P. Langlands: *Automorphic representations, Shimura varieties, and motives*, dans [3].
18. R. P. Langlands: *Stable conjugacy: definitions and lemmas*, Jour. Canad. de Math., t. 31 (1979).
19. R. P. Langlands: *On the zeta-functions of some simple Shimura varieties*, Jour. Canad. de Math., t. 31 (1979).
20. R. P. Langlands: *Base Change for* $\mathrm{GL}(2)$, Annals of Math. Study 96 (1980).
21. T. Ono: *On the Tamagawa number of algebraic tori*, Ann. of Math., t. 78 (1963).
22. G. Poitou: *Cohomology galoisienne des modules finis*, Séminaire de l'Institute de Mathématiques de Lille, Paris (1967).
23. M. Rapoport: *On the bad reduction of Shimura varieties associated to certain unitary groups*, en préparation.
24. J. Rogawski: *Thesis*, Princeton Univ. (1980).
25. J. Rogawski: *Automorphic forms and L-indistinguishability for* $\mathrm{SU}(3)$, à paraître.
26. J.-P. Serre: *Corps locaux*, Paris (1962).
27. J.-P. Serre: *Cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires*, dans *Colloque sur la théorie des groupes algébriques*, Bruxelles (1962).
28. J.-P. Serre: *Cohomologie galoisienne*, SLN 5 (1965).
29. D. Shelstad: *Characters and inner forms of a quasi-split group over* $\mathbf{R}$, Comp. Math. 39 (1979).
30. D. Shelstad: *Orbital integrals and a family of groups attached to a real reductive group*, Ann. Scient. de l'Ecole Normale Supérieure, 9ème série, t. 12 (1979).
31. D. Shelstad: *Embeddings of L-groups*, à paraître au Jour. Canad. de Math. .

32. D. Shelstad: *L-indistinguishability for real groups*, Math. Ann. 259, 385–430 (1982).
33. D. Shelstad: *Notes on L-indistinguishability*, dans [3].
34. R. Steinberg: *Regular elements of semi-simple algebraic groups*, Publ. Math. IHES (1965).
35. J. Tate: *Duality theorems in Galois cohomology over number-fields*, Proc. Int. Cong. Math., Stockholm (1962).
36. J. Tate: *Number-theoretic background*, dans [3].
37. J. Tits: *Reductive groups over local fields*, dans [3].